

Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej

Geometria

1. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach Z i Y . Odcinki BY i CZ przecinają się w punkcie G , zaś punkty R i S wybrano tak, że czworokąty $BCYR$ i $BCSZ$ są równoległobokami. Wykazać, że $GR = GS$.
2. W czworokącie $ABCD$ opisanym na okręgu prosta $\downarrow$ przechodząca przez punkt A przecina bok BC w punkcie M oraz półprostą $DC^{\rightarrow}$ w punkcie N . Punkty I_1, I_2, I_3 są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ABM, MNC, NDA . Dowieść, że punkt przecięcia wysokości trójkąta $I_1I_2I_3$ leży na prostej $\downarrow$.
3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB \neq AC$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B i C na dwusieczną kąta wewnętrznego $\angle CAB$. Niech F będzie punktem przecięcia się prostych CD i BE . Udowodnić, że proste AD i AF są prostopadłe.
4. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F . Punkt M jest środkiem boku BC , zaś odcinki AM i EF przecinają się w punkcie G . Wykazać, że proste GD i BC są prostopadłe.
5. Wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, nie będącego trapezem, leży taki punkt X , że $\angle ADX = \angle BCX, \angle DAX = \angle CBX$ i wszystkie te kąty są ostre, oraz taki punkt Y , że $AY = BY$ i $CY = DY$. Dowieść, że $\angle AYB = 2\angle ADX$.