

Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej

Ciągi jednomonotoniczne

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq a^2 + b^2.$$

2. Wykaż, że jeżeli liczby x i y są dodatnie oraz n jest liczbą naturalną, to:

$$x^n + y^n \geq x^{n-1} + y^{n-1}.$$

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

5. Wykazać, że jeśli liczby a, b i c są dodatnie, to

$$a^3 b + b^3 c + c^3 a \geq a^2 b c + a b^2 c + a b c^2.$$

6. Wykaż, że jeżeli liczby a, b, c i d są dodatnie, to

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 d + d^2 a.$$

7. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 3$) o sumie równej s mamy:

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \dots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

8. Niech a, b, c będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Udowodnij, że

$$9(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b+c)^3.$$

9. Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi. Wykaż, że

$$a^7 + b^7 + c^7 \geq a^2 b^2 c^2 (a+b+c).$$

10. (37 OM) Udowodnij, że jeżeli x, y i z są takimi liczbami nieujemnymi, że $x+y+z=1$, to

$$\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} \leq \frac{3}{4}.$$