

Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej

Boki trójkąta i nierówności

1. (34 OM) Udowodnij, że jeżeli a , b i c są długościami boków trójkąta, to

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{a-b+c} + \sqrt{-a+b+c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

2. (6 MOM) Wykaż, że jeżeli liczby a , b , c są długościami boków trójkąta, to

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

3. (24 MOM) Niech a , b , c będą długościami boków trójkąta. Udowodnij, że

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

4. Udowodnij, że jeżeli a , b , c są długościami boków trójkąta, to

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

5. Liczby dodatnie x , y , z spełniają warunek $xyz(x+y+z) = 1$. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia

$$(x+y)(x+z).$$