

Zadanie 1. Udowodnij, że w trójkącie

- a) dwusieczne kątów,
- b) środkowe (P.S. centroid, barycentrum),
- c) wysokości (lub ich przedłużenia) (P.S. ortocentrum)

przecinają się w jednym punkcie, dodatkowo punkt ten dzieli środkowe w stosunku 2 : 1.

Zadanie 2. Niech A_1, B_1, C_1 będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokami, odpowiednio, BC , AC i AB . Udowodnij, że AA_1, BB_1 i CC_1 przecinają się w jednym punkcie. (punkt Gergonne'a).

Zadanie 3. Niech A_2, B_2, C_2 będą punktami styczności okręgów dopisanych do boków trójkąta ABC z odpowiednimi bokami (A_2 punkt styczności okręgu dopisanego do boku BC z bokiem BC , itd.). Udowodnij, że AA_2, BB_2, CC_2 przecinają się w jednym punkcie. (punkt Nagela).

Zadanie 4. Niech ABC będzie trójkątem, punkt P leży w jego wnętrzu, punkty X_1, Y_1, Z_1 będą przecięciami prostych, odpowiednio, AP, BP, CP z bokami trójkąta ABC . Niech X_2 będzie punktem symetrycznym do punktu X_1 względem środka odcinka BC , leżącym na BC , podobnie określamy Y_2 i Z_2 . Wykaż, że proste AX_2, BY_2 i CZ_2 przecinają się w jednym punkcie. (ten punkt nazywamy sprzężeniem izotomicznym punktu P , jakie jest sprzężenie izotomiczne punktu Nagela? punktu Gergonne'a?, centroidu?)

Zadanie 5. Niech $ABCD$ będzie takim trapezem o podstawach AD i BC , że proste AB i CD przecinają się w punkcie Q , punkt P jest punktem przecięcia przekątnych tego trapezu, a punkty M i N są środkami podstaw. Udowodnij, że punkty M, N, P, Q leżą na jednej prostej.

Zadanie 6. Niech ABC będzie trójkątem, punkt P leży w jego wnętrzu, punkty X_1, Y_1, Z_1 będą przecięciami prostych, odpowiednio, AP, BP, CP z bokami trójkąta ABC . Okrąg opisany na trójkącie $X_1Y_1Z_1$ przecina boki BC, AC, AB trójkąta ABC jeszcze w punktach X_3, Y_3, Z_3 (odpowiednio). Udowodnij, że proste AX_3, BY_3 i CZ_3 przecinają się w jednym punkcie.¹

Zadanie 7. Niech ABC będzie trójkątem, okrąg przechodzący przez punkty A, B przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach D i E . Proste AB i DE przecinają się w punkcie F a proste BD i CF przecinają się w punkcie M . Udowodnij, że $MF = MC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $MB \cdot MD = MC^2$.

Zadanie 8. Niech ABC będzie trójkątem, punkt P leży w jego wnętrzu, punkty X_1, Y_1, Z_1 będą przecięciami prostych, odpowiednio, AP, BP, CP z bokami trójkąta ABC . Niech AX_4, BY_4 i CZ_4 będą prostymi symetrycznymi do odpowiednio AX_1, BY_1, CZ_1 względem odpowiednich dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta ABC . Udowodnij, że AX_4, BY_4, CZ_4 przecinają się w jednym punkcie.²

Zadanie 9. Niech punkty A_1, B_1 i C_1 leżą na bokach BC, AC i AB (odpowiednio) trójkąta ABC . Niech G_a, G_b, G_c będą barycentrum odpowiednio trójkątów AB_1C_1, BA_1C_1 i CA_1B_1 . Udowodnij, że proste AG_a, BG_b i CG_c przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy proste AA_1, BB_1 i CC_1 przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 10. Niech G będzie centroidem (barycentrum) trójkąta ABC , O środkiem okręgu na nim opisanego, a H jego ortocentrum. Wykaż, że G, O i H leżą na jednej prostej (zwanej prostą Eulera), ponadto $HG = 2GO$.

Zadanie 11. Wykaż, że punkty A_1, B_1, C_1 są współliniowe³, gdzie A_1 jest punktem przecięcia prostej BC ze styczną do okręgu opisanego na trójkącie ABC poprowadzoną w punkcie A ; punkty B_1, C_1 definiujemy analogicznie.

Zadanie 12. ⁴ Niech ABC będzie trójkątem, punkt P leży w jego wnętrzu, punkty X_1, Y_1, Z_1 będą przecięciami prostych, odpowiednio, AP, BP, CP z bokami trójkąta ABC . Niech X będzie punktem przecięcia BC z B_1C_1 , Y punktem przecięcia CA z C_1A_1 a Z punktem przecięcia AB z A_1B_1 . Udowodnij, że X, Y, Z są współliniowe.

¹gdym P jest ortocentrum, czym są X_3, Y_3, Z_3 ? P.S. Okrąg, o którym mowa w zadaniu, wtedy nazywany jest okręgiem dziewięciu punktów, albo okręgiem Eulera, albo okręgiem Feuerbacha; sześć punktów już wymieniliśmy, a pozostałe trzy, co to za punkty?

²taki punkt nazywamy izogonalnie sprzężonym z punktem P . W przypadku, gdy P jest barycentrum trójkąta ABC punkt do niego sprzężony nazywamy punktem Lemoine'a, a proste AX_4, BY_4, CZ_4 , o których mowa w zadaniu, nazywane są symedianami.

³ta prosta nazywa się prostą Lemoine'a

⁴nie używając twierdzenia Desargues'a

Zadanie 13. Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC , proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie. Proste DE i DF przecinają prostą równoległą do BC przechodzącą przez punkt A odpowiednio w punktach E' i F' . Udowodnij, że punkt A jest środkiem odcinka $E'F'$.

Zadanie 14. Dane są rozłączne zewnętrznie okręgi O_1, O_2, O_3 o środkach odpowiednio P_1, P_2, P_3 . Te dwie styczne do obu okręgów O_1, O_2 , które rozdzielają te okręgi, przecinają się w punkcie A_3 . Punkty A_1 i A_2 zdefiniowane są analogicznie. Wykaż, że proste P_1A_1, P_2A_2, P_3A_3 przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 15. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie P . Punkt M jest środkiem boku AB . Prosta MP przecina bok CD w punkcie Q . Udowodnij, że stosunek pól trójkątów BCP i ADP jest równy stosunkowi długości odcinków CQ i DQ .

Zadanie 16. W trójkącie ABC punkty D, E są spodkami dwusiecznych odpowiednio $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ABC$. Punkt F jest spodkiem dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku C . Udowodnij, że punkty D, E, F leżą na jednej prostej.

Zadanie 17. Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC , proste AD, BE, CF przecinają się w punkcie P . Wykaż, że

$$\frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = \frac{AP}{PD}.$$

Zadanie 18. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do prostych BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F . Proste BC i EF przecinają się w punkcie X , proste CA i DF przecinają się w punkcie Y , proste AB i DE przecinają się w punkcie Z . Dowieść, że punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej.

Zadanie 19. Dany jest trójkąt ABC . Punkty L, Z leżą na boku BC , punkty M, X leżą na boku CA , punkty K, Y leżą na boku AB , przy czym $AB \parallel MZ, BC \parallel KX, CA \parallel LY$. Dowieść, że proste KX, LY i MZ przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AY}{YK} \cdot \frac{BZ}{ZL} \cdot \frac{CX}{XM} = 1.$$

Zadanie 20. Niech ABC będzie trójkątem, O środkiem okręgu na nim opisanego. Punkty P, Q należą do wnętrza odcinków odpowiednio AC, AB . Punkty K, L, M są środkami odcinków odpowiednio BP, CQ, PQ . Niech ω będzie okręgiem opisanym na K, L, M . Udowodnij, że jeśli PQ jest styczna do ω , to $OP = OQ$.

Zadanie 21. Dany jest okrąg ω o środku w punkcie O oraz punkt A leżący na zewnątrz tego okręgu. Z punktu A poprowadzono proste styczne do okręgu ω w punktach K i L . Punkt M jest środkiem odcinka KL . Okrąg o przechodzi przez punkty O i M oraz przecina okrąg ω w różnych punktach B i C . Wykaż, że punkty A, B, C leżą na jednej prostej.

Zadanie 22. Na bokach BC, AC, AB trójkąta ABC obrano takie punkty odpowiednio K, L, M , że odcinki AK, BL, CM przecinają się w jednym punkcie. Prosta przechodząca przez punkt M i równoległa do prostej KL przecina prostą BC w punkcie V , a prostą AK w punkcie W . Udowodnij, że $VM = MW$.

Zadanie 23. Na przeciwprostokątnej AC trójkąta prostokątnego ABC obrano taki punkt D , że $AB = CD$. Udowodnij, że w trójkącie ABD dwusieczna kąta A , środkowa wychodząca z wierzchołka B i wysokość poprowadzona z wierzchołka D przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 24. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F . Wewnątrz trójkąta ABC obrano taki punkt X , że okrąg wpisany w trójkąt XBC jest styczny do boku BC w punkcie D , zaś do boków CX i XB odpowiednio w punktach Y i Z . Wykaż, że czworokąt $EFZY$ można wpisać w okrąg.