

Małe Twierdzenie Fermata, Twierdzenie Eulera, kongruencje, podzielność

Zadanie 1. Każdy wierzchołek pewnego wielokąta ma obie współrzędne całkowite. Długość każdego boku tego wielokąta jest liczbą naturalną. Udowodnij, że jego obwód jest liczbą parzystą.

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}$

$$30|ab(a^2 - b^2)(a^2 + b^2).$$

Zadanie 3. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p , dla których

$$p|\underbrace{111\dots 1}_{p \text{ cyfr}}.$$

Zadanie 4. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej p zachodzi

$$p|[\underbrace{111\dots 1}_p \underbrace{222\dots 2}_p \dots \underbrace{999\dots 9}_p - 123456789].$$

Zadanie 5. Niech a i b będą liczbami naturalnymi, p liczbą pierwszą. Udowodnij, że jeśli $a^p - b^p$ dzieli się przez p , to dzieli się także przez p^2 .

Zadanie 6. Udowodnij, że

$$21|[2^{4^n} + 5], \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zadanie 7. Wyznacz wszystkie wartości naturalne n , dla których $2^n - 1$ jest liczbą podzielną przez 7. Udowodnij, że dla żadnej wartości naturalnej n liczba $2^n + 1$ nie jest podzielna przez 7.

Zadanie 8. Wyznacz wszystkie takie liczby pierwsze p , że $4p^2 + 1$ oraz $6p^2 + 1$ są również liczbami pierwszymi.

Zadanie 9. Znaleźć największą liczbę naturalną k , przez którą podzielna jest każda z liczb $n^{16} - n^4$, gdzie $n = 1, 2, \dots$

Zadanie 10. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania

$$a^{13} + b^{13} + c^{13} + \dots + y^{13} = z^{13}$$

w liczbach całkowitych nieujemnych

$$\underbrace{a, b, c, \dots, y, z}_{26 \text{ niewiadomych}} \leq 100.$$

Chińskie Twierdzenie o Resztach

Zadanie 1. Liczby $m_1, m_2, \dots, m_n$ są parami względnie pierwsze. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb $a \in \mathbb{N}$ takich, że każda z liczb $a + 1, a + 2, \dots, a + n$ jest złożona oraz $m_i | a + i$ dla $i = 1, \dots, n$.

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie liczby kwadratowe (tzn. będące kwadratami liczb naturalnych) kończące się cyframi 2001.

Zadanie 3. Wyznaczyć resztę z dzielenia przez $9!$ liczby

$$9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^2}}}}}.$$

Zadanie 4. Dla danej liczby $m \in \mathbb{N}$ wyznaczyć wszystkie $n > m$ takie, że w ciągu

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{m}$$

każdy wyraz jest dzielnikiem wszystkich wyrazów po nim następujących.

Zadanie 5. Pokazać, że jeśli liczby $a, b \in \mathbb{N}$ spełniają dla każdego $n \in \mathbb{N}$ warunek $a^n + n | b^n + n$, to $a = b$.

Zadanie 6. Niech P będzie wielomianem stopnia $m \geq 1$ o całkowitych współczynnikach. Pokazać, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że liczba $P(n)$ ma więcej niż k dzielników.

Zadanie 7. Pokazać, że istnieją dowolnie długie ciągi kolejnych liczb całkowitych, z których każda jest podzielna przez kwadrat innej liczby całkowitej.

Zadanie 8. Dla jakich dodatnich liczb całkowitych n istnieje taka dodatnia liczba całkowita N , że żadna z liczb $1 + N, 2 + N, 3 + N, \dots, n + N$ nie jest kwadratem liczby pierwszej?

Zadanie 9. Dowieść, że istnieje taka całkowita liczba dodatnia n , że liczba $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ ma co najmniej 2018 różnych dzielników pierwszych.

Część całkowita liczby rzeczywistej

Wykaż, że

- (1) $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor, \quad \text{dla } x \geq 0;$
- (2) $\left\lfloor \frac{x+a}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + a}{n} \right\rfloor, \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N};$
- (3) $\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{km} \right\rfloor, \quad \text{dla } n, k, m \in \mathbb{N};$
- (4) $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{2^3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor + \dots = n, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N};$
- (5) $\lfloor \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N};$
- (6) $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor, \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N};$
- (7) $\lfloor \sqrt{9n-1} \rfloor = \lfloor \sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N};$
- (8) $\sum_{k=2}^n \lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor = \sum_{k=2}^n \lfloor \log_k n \rfloor, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$

Rozwiąż równania

- (9) $\lfloor x^2 - 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2 - 2\lfloor x \rfloor;$
- (10) $x^2 - 8\lfloor x \rfloor + 7 = 0;$
- (11) $x - \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 = 2007.$

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$(12) \quad \left\lfloor (5 + \sqrt{19})^n \right\rfloor$$

jest nieparzysta.

Symbol Newtona

Podaj interpretacje kombinatoryczne następujących tożsamości:

- a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ d) $\sum_{k=0}^m \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}$
- e) $\sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}$ f) $\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}^2 = n^2 \binom{2n-2}{n-1}$
- g) $m^n = \sum \binom{n}{t_1, t_2, \dots, t_m}$, gdzie sumowanie przebiega po wszystkich uporządkowanych podziałach liczby n na m nieujemnych składników $n = t_1 + t_2 + \dots + t_m$
- h) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$ i) $\sum_{k=1}^n k(n+1-k) \binom{n}{k} = \binom{n+2}{3}$ j) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (m-1)^{n-k} = m^n$
- k) $\left(\sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{(k!)^2 [(n-k)!]^2} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \cdot \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n}^2$
- l) $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$ m) $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} = 2^k \binom{n}{k}$ n) $\sum_{k=m}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{m}{r+1}$
- o) $\sum_{k=1}^n \binom{m+k-1}{k} = \sum_{k=1}^m \binom{n+k-1}{k}$ p) $\binom{n}{k} = \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{i}{k-1}$ r) $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$
- s) $\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$
- t) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n$
- u) $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$
- w) $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$
- z) $\binom{m}{n} \binom{n}{k} = \binom{m}{m-k} \binom{m-k}{n-k}$