

Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej

Analiza matematyczna

1. Dana jest liczba $x_1 > 0$. Ciąg (x_n) jest zdefiniowany wzorem: $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Udowodnić, że istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt[3]{n}}$ i obliczyć ją.

2. Znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą A taką, że dla każdego trójkianu kwadratowego $f(x)$ spełniającego warunek:

$$|f(x)| \leq 1$$

dla $0 \leq x \leq 1$ zachodzi nierówność $f'(0) \leq A$.

3. Funkcja $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i spełnia dla każdego x warunek $h(ax) = bh(x)$, gdzie a i b są pewnymi ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $0 \neq |a| \neq 1$. Ponadto $h'(0) \neq 0$ i funkcja h' jest ciągła w punkcie $x = 0$. Udowodnić, że $a = b$, oraz istnieje taka liczba rzeczywista c , że $h(x) = cx$.
4. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Wykaż, że jeśli dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taka liczba naturalna n , że $(f \circ f \circ \dots \circ f)(x) = 1$ to $f(1) = 1$.
5. Udowodnić, że istnieje funkcja f określona i różniczkowalna w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych, spełniająca warunek $|f'(x) - f'(y)| \leq 4|x - y|$.
6. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nierówna tożsamosciowo zeru spełniająca warunki:

$$2f(f(x)) = f(x) \geq 1$$

dla $x \in \mathbb{R}$.

7. Wyznaczyć te liczby całkowite nieujemne n , dla których istnieje taki wielomian f stopnia n o współczynnikach rzeczywistych, że $f(x) > f'(x)$ dla każdego rzeczywistego x .
8. Dowieść, że jeśli wielomian $x^3 + ax^2 + bx + c$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste, to wielomian $3x^2 + 2ax + b$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste.
9. Wykaż, że dla $x \in (0, +\infty)$ funkcja $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ przyjmuje wartości większe, bądź równe 3.
10. Wyznacz największą wartość funkcji $f(x) = x^{16} - x^{18}$.
11. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt[2014]{1-x}} + \frac{1}{\sqrt[2014]{1+x}}$ w przedziale $(-1, 1)$.