

Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej

Zestaw 1 (zadania rozgrzewkowe)

1. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC , przy czym

$$\angle DAB = \angle ABE = \angle ACB \quad \text{oraz} \quad AD + DE + EB = AC.$$

Wyznaczyć miarę kąta ACB .

Delta 10/2018, M1579.

2. Niech x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 będą różnymi pierwiastkami równania $x^5 + x^2 + 1$. Wyznaczyć wartość wyrażenia

$$(x_1^2 - 2)(x_2^2 - 2)(x_3^2 - 2)(x_4^2 - 2)(x_5^2 - 2).$$

Delta 10/2018, M1581.

3. Dodatnią liczbę całkowitą n nazywamy *podkwadratową*, jeżeli $n + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele ar liczb podkwadratowych o tej własności, że ich suma i iloczyn także są podkwadratowe.

Delta 8/2018, M1574.

4. Czy istnieje taki wielościan wypukły W , który można rozciąć płaszczyzną na dwa wielościany podobne do W ?

Delta 7/2018, M1570.

5. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej $n > 1$ liczba

$$n^n - n^2 + n - 1$$

jest podzielna przez $(n - 1)^2$.

Delta 6/2010, M1280.

6. Niech $S = \{x + \frac{1}{x} : x \in \mathbb{Q}^+\}$, gdzie $\mathbb{Q}^+$ oznacza zbiór liczb wymiernych dodatnich. Niech dodatkowo n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że n jest sumą dwóch liczb ze zbioru S wtedy i tylko wtedy, gdy n jest iloczynem dwóch elementów zbioru S .

Delta 6/2018, M1568.

7. Nieujemne liczby całkowite a, b i c spełniają nierówność

$$a + b + c \geq abc.$$

Udowodnić, że

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq abc.$$

Delta 4/2018, M1561.

8. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele par liczb całkowitych dodatnich (a, b) , dla których liczba

$$4^{a^2} + 4^{b^2} + 1$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Delta 1/2018, M1552.