Wybrane zagadnienia fizyki matematycznej

Zestaw 9 (Zadania związane z metodami wariacyjnymi)

Każde zadanie jest warte 2 pkt.

1. Niech $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ będzie przestrzenią unitarną. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \|x\|^2$.

2. Korzystając z równań Eulera-Lagrange'a obliczyć ekstremale funkcjonału

$$\Phi(x) = \int\limits_0^1 (x^2(t) + x'^2(t))dt$$

przy warunkach brzegowych $x(0) = a$ oraz $x(1) = b$.

3. Udowodnić, że funkcjonał

$$\Phi(x) = \int\limits_0^1 x^2(t)dt$$

nie ma ekstremów w zbiorze fubnkcji spełniających warunek brzegowy $x(0) = 0$ i $x(1) = 1$.

4. Niech S będzie powierzchnią o równaniu $z(x,y) = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $x \geqslant 0$, $y \in \mathbb{R}$. Ze wszystkich krzywych leżących na powierzchni S i przechodzących przez dane punkty A i B wybrać tę, która ma najmniejszą długość.
Wskazówka: Przyjąć, że krzywe są określone równaniami parametrycznymi $x = x(t)$, $y = t$, $z = \frac{2}{3}x^{3/2}(t)$. Następnie skorzystać ze wzoru na długość krzywej

$$d = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$$

oraz równania Eulera-Lagrange'a.