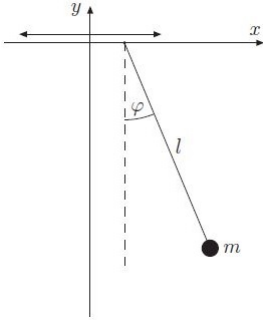


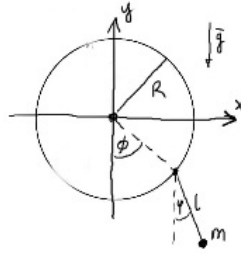
Wybrane zagadnienia fizyki matematycznej

Zestaw 8

Każde zadanie jest warte 2 pkt.



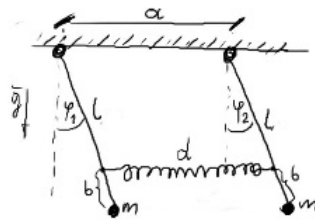
(a) Rys. 1



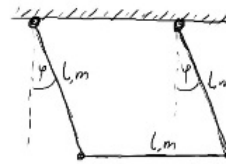
(b) Rys. 2



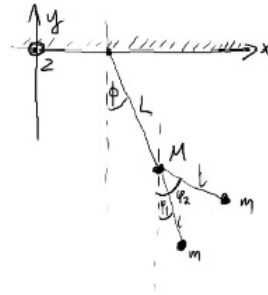
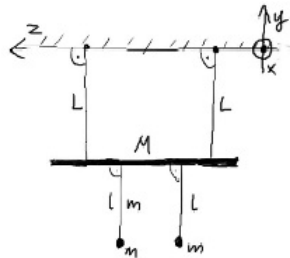
(c) Rys. 3



(d) Rys. 4



(e) Rys. 5



(f) Rys. 6

1. Punkt zawieszenia wahadła matematycznego wykonuje na osi x drgania harmoniczne postaci (patrz rysunek 1)

$$x(t) = A \sin \Omega t, \quad A, \Omega = \text{const.}$$

(a) Korzystając z równań Lagrange'a napisać równanie ruchu.

(b) Rozwiązać równanie ruchu dla małych wychyleń i warunków początkowych: $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$

2. Niech $F(x, y, z)$ będzie funkcją jednorodną rzędu n , tzn.

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n F(x, y, z).$$

Pokazać, że

$$x \frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z) + y \frac{\partial}{\partial y} F(x, y, z) + z \frac{\partial}{\partial z} F(x, y, z) = n F(x, y, z).$$

Pokazać, że jeśli T jest funkcją jednorodną rzędu 2, to

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T.$$

3. Jednorodny krążek o promieniu R i masie M może obracać się dookoła swojej osi. Do krążka przymocowano punkt materialny o masie m na nieważkim pręcie o długości l . Napisz różniczkowe równania ruchu (patrz rysunek 2).
4. Znaleźć przy pomocy równań Lagrange'a ruch pionowy dwóch punktów materialnych o masach m_1 i m_2 zawieszonych na sprężynach jeden nad drugim. Problem zbadać z i bez pola grawitacyjnego (patrz rysunek 3).
5. Zbudować funkcję Lagrange'a dla dwóch naładowanych coulombowsko cząstek. Wyrazić L przez współrzędne środka masy i odległość względną cząstek. Wyprowadź równania ruchu w tych współrzędnych.
6. Znaleźć przy pomocy równań Lagrange'a i przedyskutować ruch dwu płaskich wahadeł matematycznych o długości l (punktów materialnych o masie m zawieszonych na nieważkich prętach o długości l), połączonych ze sobą sprężyną, która nie jest napięta, gdy wahadła zwisają pionowo. Można przyjąć przybliżenie małych kątów (patrz rysunek 4).
7. Dany jest układ trzech sztywnych prętów o długości l i masie m każdy, połączonych w sposób podany na rysunku poniżej. Układ znajduje się w polu siły ciężkości. Wyznaczyć pełne równania ruchu (patrz rysunek 5).
8. Znaleźć przy pomocy równań Lagrange'a ruch dwóch płaskich wahadeł matematycznych o jednakowych długościach i masach (l, m) , zawieszonych na pręcie poziomym prostopadłym do ich płaszczyzny wahań, który z kolei jest zawieszony w ten sposób, iż może wahać się jak wahadło matematyczne w kierunku równoległym do płaszczyzny obu poprzednich wahadeł. Należy przyjąć przybliżenie małych kątów (patrz rysunek 6).