

Wybrane zagadnienia fizyki matematycznej

Zestaw 7 (Nawiasy Poissona)

Niech dane będą dwie funkcje różniczkowalne $f = f(q, p, t)$ oraz $g = g(q, p, t)$. Dla funkcji f i g definiujemy nawiasy Poissona wzorem

$$[f, g]_{q,p} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Indeksy p i q będziemy pomijali.

Udowodnij następujące własności nawiasów Poissona:

1. Liniowość ze względu na pierwszy argument

$$[c_1 f + c_2 g, h] = c_1 [f, h] + c_2 [g, h]$$

2. Antysymetria

$$[f, g] = -[g, f]$$

- 3.

$$[c, f] = 0.$$

- 4.

$$[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$$

5. Tożsamość Jacobiego

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0.$$

6. Nawiasy fundamentalne:

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

7. Liniowość ze względu na drugi argument

$$[f, c_1 g + c_2 h] = c_1 [f, g] + c_2 [f, h]$$

- 8.

$$[f, c] = 0.$$

- 9.

$$[f, gh] = g[f, h] + [f, g]h$$

Każdy podpunkt jest wart 1 pkt, poza ostatnim – wartym 3 pkt.