

Wybrane zagadnienia fizyki matematycznej

Zestaw 5 (Podstawy mechaniki)

Każde zadanie jest warte 2 pkt.

1. Cząstka o ładunku q i masie m porusza się w jednorodnym polu magnetycznym \vec{B} . W czasie $t_0 = 0$ cząstka znajduje się w punkcie $\vec{r}(t_0) = 0$ i ma prędkość początkową równą v_0 . Znaleźć tor cząstki, prędkość i przyspieszenie.

Wskazówka: Wygodnie jest wybrać układ odniesienia w taki sposób, że oś z jest równoległa do kierunku pola magnetycznego i prędkość początkowa leży w płaszczyźnie xz .

2. Biedronka porusza się po krzywej, która we współrzędnych kartezjańskich jest opisana następująco:

$$x(t) = v_0 t \cos(\omega t), \quad y(t) = v_0 t \sin(\omega t), \quad z(t) = 0, \quad v_0 > 0, \omega > 0.$$

- (a) Narysować krzywą, po której porusza się biedronka.
- (b) Obliczyć prędkość i przyspieszenie.
- (c) Znaleźć krzywiznę i skręcenie krzywej.
- (d) Zakładając, że biedronka porusza się od chwili $t = 0$ do chwili $t = T$ obliczyć długość przebytej w czasie T drogi.

3. Wyznaczyć krzywiznę i skręcenie krzywej danej parametrycznym równaniem $\vec{r} = \vec{r}(t)$ przez $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ oraz $\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}$, a także długości tych wektorów.

4. Znaleźć trajektorię ruchu cząstki o masie m i energii E w polu o potencjale:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^2}.$$

Założyć przypadek, kiedy energia całkowita $E < 0$ (stan związany).

5. Punkt materialny porusza się w polu siły o potencjale:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^6}.$$

Przy założeniu, że całkowita energia $E = 0$ określić trajektorię ruchu.

6. Punkt porusza się na płaszczyźnie po elipsie:

$$\left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{y}{b}\right) = 1$$

z przyspieszeniem równoległym do osi y . Znaleźć wartość przyspieszenia jako funkcję y

7. Punkt porusza się na płaszczyźnie po kardiodzie o równaniu we współrzędnych biegunowych:

$$r = 2a \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

ze stałą co do wartości prędkością. Znaleźć prędkość i przyspieszenie jako funkcję r .

8. Sprawdzić ortogonalność, wyznaczyć składowe predkości i przyśpieszenia we współrzędnych toroidalnych (r, ϕ, ψ)

$$x = (a + r \cos \phi) \cos \psi$$

$$y = (a + r \cos \phi) \sin \psi$$

$$z = r \sin \phi$$

gdzie $a = \text{const.}$ Narysować linie współrzędnych $r = \text{const.}$, $\phi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$

9. Sprawdzić ortogonalność, wyznaczyć składowe predkości i przyśpieszenia w spłaszczonych współrzędnych sferoidalnych (ψ, θ, λ)

$$x = c \cosh \psi \cos \theta \cos \lambda$$

$$y = c \cosh \psi \cos \theta \sin \lambda$$

$$z = r \sinh \phi \sin \theta$$

gdzie $c = \text{const.}$ Narysować linie współrzędnych $\psi = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$, $\lambda = \text{const.}$

10. Znaleźć trajektorie ortogonalne (rodziny linii ortogonalnych) do krzywych danej rodziny:

(a) Rodzina okręgów $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

(b) Rodzina parabol $(y - 2)^2 = 2px, p \neq 0$.

(c) Rodzina hiperbol równoosiowych $xy = k$.

(d) Rodzina lemniskat $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), a \neq 0$.