Wybrane zagadnienia fizyki matematycznej

Zestaw 4 (Podstawienia)

Uwaga: Zadania pochodzą z podręcznika Banaś, Wędrychowicz.

Każde zadanie jest warte 2 pkt.

1. Niech φ będzie funkcją różniczkowalną na $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja $z = y\varphi(x^2 - y^2)$ spełnia równanie różniczkowe
$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

2. Pokazać, że jeśli funkcja $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to funkcja $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ spełnia równanie
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -2x^2 - 2y^2.$$

3. Pokazać, że funkcja $z = \phi(x - at) + \psi(x + at)$, gdzie ϕ, ψ są dwukrotnie różniczkowalne oraz $a \in \mathbb{R}$, spełnia równanie
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

4. Wykazać, że równanie Laplace'a w $\mathbb{R}^2$ postaci
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
we współrzędnych biegunowych wyraża się wzorem
$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 0.$$

5. Pokazać, że podstawiając w równaniu
$$\frac{x^2 d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$
$x = e^t$, otrzymamy równanie postaci
$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = 0.$$

6. Przekształcić równanie
$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$
wprowadzając nowe zmienne: $x = t$, $y = \frac{t}{1+tu}$, $z = \frac{t}{1+tv}$.

7. Wykazać, że równanie Laplace'a
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
nie zmienia swojej postaci przy dowolnej zmianie zmiennych $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ takiej, że spełniony jest warunek
$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

8. Wykazać, że równanie
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$
przy przekształceniu względem nowych zmiennych $u = x$, $v = x + y$, $w = x + y + z$ jest postaci
$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left(\frac{v}{u} - 1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

9. Niech dane będzie równanie Schrödingera postaci

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -(A^2 + B^2 + C^2)\psi,$$

gdzie

$$A^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E_x, \qquad B^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E_y, \qquad C^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E_z,$$

przy czym m oznacza masę cząstki, h – stałą Plancka, natomiast E_x, E_y, E_z oznaczają energię cząstki względem osi $0x$, $0y$, $0z$. Przyjmijmy, że rozwiązanie powyższego równania ma postać

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z),$$

gdzie X, Y, Z są funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi. Pokazać, że równanie Schrödingera przyjmuje wtedy postać

$$\left(\frac{X''}{X} + A^2\right) + \left(\frac{Y''}{Y} + B^2\right) + \left(\frac{Z''}{Z} + C^2\right) = 0.$$

10. Potencjał V dwóch równoległych nieskończonych przewodników z ładunkiem o liniowych gęstościach λ i $-\lambda$ jest równy

$$V = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\right) \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

gdzie $r_1^2 = (x - x_0)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x + x_0)^2 + y^2$. Zakładamy, że przewodniki te są równoległe do osi $0z$ oraz przecinają płaszczyznę $x0y$ w punktach $(-x_0, 0)$, $(x_0, 0)$.

(a) Znaleźć gradient funkcji V.

(b) Sprawdzić, czy $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$.