Wybrane zagadnienia fizyki matematycznej

Zestaw 2

1. Ciało porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, przebywając kolejno dwa odcinki drogi $s = 15m$ w czasach $t_1 = 2s$ oraz $t_2 = 1s$. Znaleźć przyspieszenie ciała a i prędkość na początku pierwszego odcinka.

2. Z jakiej wysokości spadło ciało, jeżeli w ostatniej sekundzie padania przebyło drogę $s = 24,5m$.

3. Z jaką prędkością początkową v_0 należy rzucić ciało pionowo w dół z wysokości $h = 45m$, by spadło ono o $t = 1s$ wcześniej niż przy swobodnym spadaniu.

4. Określić prędkość początkową kuli armatniej wystrzelonej pod kątem $\alpha = 30^0$ do poziomu, jeżeli upadła ona na ziemię w odległości $s = 10,5km$ od miejsca wystrzału, a tarcie powietrza zmniejszyło długość lotu kuli 4 razy.

5. Udowodnic trzecie prawo Keplera, tzn. wykazac, ze kwadraty okresów obiegów dwu planet po róznych orbitach eliptycznych maja sie do siebie jak szesciany ich duzych półosi.

6. Zagadnienie Keplera. Wyznaczyc równanie toru dla punktu materialnego poruszajacego sie w polu centralnym o potencjale $U(r) = -\frac{k}{r}$.

7. Ruch punktu po krzywej opisuja równania:

$$x = abt, \qquad y = a \cosh bt$$

   Znaleźć:

   (a) tor ruchu punktu,
   (b) promień krzywizny toru,
   (c) prędkość punktu na krzywej.

8. Ruch ciała jest opisany nastepujacymi równaniami:

$$x = a \cos \omega t, \qquad y = b \sin \omega t$$

   Znaleźć:

   (a) składowa styczna przyspieszenia ciała,
   (b) składowa normalna przyspieszenia.

9. Określić punkty, w których hiperbola $xy = 1$ ma największą krzywiznę.

10. Obliczyć promień krzywizny spiralnej Archimedesa $r = a\varphi$, $a > 0$, w punkcie $\varphi = \varphi_0$.

11. Pewien przedmiot o masie m zsuwa się po torze w kształcie paraboli o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2$. W punkcie $A = (1, \frac{1}{2})$ prędkość przedmiotu wynosi v. Wyznaczyć siłę nacisku przedmiotu na tor w punkcie A wywołaną wyłącznie zmianą kierunku ruchu przedmiotu.

12. Znaleźć trajektorie ortogonalne (rodziny lini ortogonalnych) do krzywych danej rodziny:

   (a) Rodzina okręgów $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.
   (b) Rodzina parabol $(y - 2)^2 = 2px$, $p \neq 0$.
   (c) Rodzina hiperbol równoosiowych $xy = k$.
   (d) Rodzina lemniskat $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a \neq 0$.

13. Obliczyć przyspieszenie mas m_1 i m_2 zawieszonych na nieważkiej, nierozerwalnej nici przerzuconej przez blok obracający się bez tarcia. Blok ma moment bezwładności I oraz promień R. Nić nie ślizga się po bloku. Obliczyć naciąg T_1 i T_2 nici.

14. Pociąg o ciężarze $q = 600$ ton wyrusza ze stacji i w czasie $t = 5$ min przebywa drogę $s = 2,5$ km, uzyskując prędkość $v = 60$ km/h. Jaką średnią moc ma lokomotywa, jeżeli przyjąć, jeżeli przyjąć stały współczynnik tarcia $f = 0,3$.

15. Krążek, którego moment bezwładności wynosi $I = 8 \cdot 10^6 g \cdot cm^2$ osadzony jest na wale o promieniu $r = 30mm$. Na wał jest nawinięty sznur, za który ciągniemy siłą $F = 15kG$. Jaką prędkość kątową osiągnie koło po upływie czasu $t = 5s$? zaniedbać moment bezwładności wału oraz siłę tarcia.
Uwaga. W tym zadaniu użyte są jednostki inne niż układu SI, dotyczy to zwłaszcza siły F. Proszę najpierw przeliczyć wszystki jednostki na jednostki z układu SI, a dopiero potem rozwiązć zadanie.

16. Ruch punktu na płaszczyźnie dany jest w układzie kartezjańskim następującymi równaniami:

$$x = bt^2, \qquad b = const$$

$$y = ct^2, \qquad c = const$$

Znaleźć:

- ruch punktu w układzie biegunowym,
- tor punktu w obu układach,
- prędkość w układzie biegunowym,
- przyspieszenie w układzie biegunowym.

17. Narysowac krzywe fazowe dla podstawowego równania teorii drgań: $\ddot{x} = -x$.

18. Ciało spada na Ziemię z dużej wysokosci h. Zaniedbując opór powietrza znaleźć czas, po upływie którego osiagnie ono powierzchnię Ziemi i prędkość, jaką bedzie miało w tym momencie. Promień Ziemi wynosi R.

19. Przeanalizować jednowymiarowy ruch cząstki w polu siły o potencjale

    (a) $V(x) = A|x|, \qquad A > 0$
    (b) $V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$

    w zależności od energii całkowitej cząstki. Przyjąć warunki początkowe $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$.

20. Ciało o masie m spada w powietrzu bez prędkości początkowej. Zakładając, że opór powietrza jest proporcjonalny do kwadratu prędkości, obliczyć prędkość ciała i jego położenie w funkcji czasu. Do jakiej granicy dąży prędkość z upływem czasu.

21. Ciało porusza się w $\mathbb{R}^3$ po krzywej, której równanie zapisane w postaci parametrycznej ma postać $\vec{r} = \vec{r}(q)$. Dla wszystkich wartości parametru q zachodzi związek

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dq} = 0$$

Udowodnić, że:

- $|\vec{r}| = const$,
- jeśli dodatkowo dla wszystkich q zachodzi

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dq} = 0$$

  to wynika stąd, że $\vec{r} = const$.

22. Znaleźć tor, po jakim w płaszczyźnie pionowej XY leci samolotem ponaddzwiękowym pilot, który chce, aby jego koledzy stojący na lotnisku usłyszeli w tym samym momencie huk silnika z całego toru. Podać współrzędne końca toru. W chwili $t = 0$ samolot pilota znajdował się w odległosci r_0 od punktu, w którym stoją koledzy pilota, a wektor $\vec{r}_0$ tworzył kąt β z płaszczyzną poziomą. Wartość prędkosci samolotu jest stała i wynosi v_0.

23. Kolista tarcza o promieniu R wiruje wokół swojej osi ze stałą prędkością kątową ω. Ze środka tarczy wyrusza biedronka, która porusza się wzdłuż wybranego promienia ze stałą wartoscią prędkości v_0. W nieruchomym układzie odniesienia znaleźć:

    (a) równania ruchu i toru biedronki we współrzędnych kartezjańskich i biegunowych,
    (b) zależność od czasu wartości wektora prędkosci v oraz jego składowych radialnej v_r i transwersalnej v_φ,

(c) zależność od czasu wartości wektora przyspieszenia a oraz jego składowych: radialnej a_r, transwersalnej a_φ, normalnej a_n i stycznej a_t,

(d) zależność promienia krzywizny trajektorii od czasu,

(e) całkowitą długość drogi przebytej przez biedronkę.

24. Zderzają się dwie kule niesprężyste o masach $m = 4$ kg oraz $M = 5$ kg poruszające się z prędkościami $v_1 = 3$ m/s oraz $V_1 = 6$ m/s. Obliczyć prędkość v kulek po zderzeniu.

25. Dwie kule o masach $M = 8$ kg i $m = 4$ kgporuszające się po tej samej lini prostejb zatrzymają się w zderzniu centralnym. Określić prędkość większej kulki przed zderzeniem jheśli mniejsza kula poruszała się z prędkością $v = 3$ m/s.

26. Tramwaj o ciężarze $Q = 15$ ton porusza się po moście wypukłym o promieniu krzywizny $R = 70$ m. Określić prędkość tramwaju, jeżeli jego nacisk na most wynosi $P = 14,5$ tony.

27. Łyżwiarz porusza się po okręgu o promieniu $r = 12$ m z prędkością $v = 9$ m/s. Pod jakim kątem względem pionu jest on nachylony, aby zachować równowagę?

28. Pociąg o masie $m = 900$ ton rusza ze stacji i po czasie $t = 3$ min. nabywa prędkości $v = 90$ km/h. Obliczyć moc lokomatywy w KM.

29. Punkt materialny o masie m porusza się pod wpływem siły ciężkosci po okręgu o promieniu r. Płaszczyzna w której leży okrąg jest nachylona do pionu pod kątem α. Wyznaczyć ruch punktu i siłę reakcji więzów.

30. Obliczyć energię kinetyczną jednorodnego pręta o długości l, którego jeden koniec porusza się bez tarcia po osi pionowej, a drugi koniec porusza się bez tarcia po płaszczyźnie poziomej. Wyznaczyc moment pędu pręta względem osi pionowej.

31. Na gładkiej poziomej płaszczyźnie znajdują się dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2 połączone nierozciągliwą nicią o długości l. Wyznaczyć równania ruchu tych punktów jeśli nić przechodzi bez tarcia przez stały punkt A na płaszczyźnie ruchu. Obliczyć napięcie nici i siłę reakcji w punkcie A.

32. Masa m_1 podwieszona na pionowej sprężynie o współczynniku sprężystości k jest jednocześnie punktem zaczepienia wahadła matematycznego o masie m_2 i długości l. Rozwiązać równania ruchu.

33. Dwa punkty o masach m połączone są nieważkim prętem o długości l. Środek pręta może się poruszać po okręgu o promieniu a. Ruch układu jest ograniczony do płaszczyzny która zawiera okrąg. Napisać równania ruchu układu.

34. Znaleźć okres wahadła matematycznego w przypadku, gdy amplituda drgań jest dowolna.

35. Ciało o masie m spada w powietrzu bez prędkości początkowej. Zakładając, ze opór powietrza jest proporcjonalny do kwadratu prędkosci, obliczyć prędkość ciała i jego położenie w funkcji czasu. Do jakiej granicy dąży predkość z upływem czasu.

36. Ciało spada na Ziemię z duzej wysokości h. Zaniedbując opór powietrza znaleźć czas, po upływie którego osiagnie ono powierzchnię Ziemi i predkość, jaką będzie miało w tym momencie. Promien Ziemi wynosi R.

37. Ciało o masie m i prędkosci v_0 wlatuje do ośrodka, w którym działa na nie siła oporu $f = -kv^{n-1}\vec{v}$, gdzie $n \geqslant 0$. Przedyskutować zależność zasięgu i czasu trwania ruchu od wartości n.

38. Masa Księżyca jest 81 razy mniejsza od masy Ziemi, stosunek zaś promieni Księżyca i Ziemi wynosi $3/11$. Obliczyć przyspieszenie siły ciężkości g na powierzchni Księżyca.

39. Obliczyć I oraz II prędkość kosmiczną.

40. Średnia odległość wyrażona w promieniach orbity ziemskiej wynosi dla planety Wenus $a_W = 0,724$, dla Saturna $a_S = 9,539$. Obliczyć okresy obiegu tych planet dookoła Słońca.

41. Udowodnić, że środek masy trójkąta o niewielkiej grubości znajduje się w punkcie przecięcia się środkowych tego trójkąta.

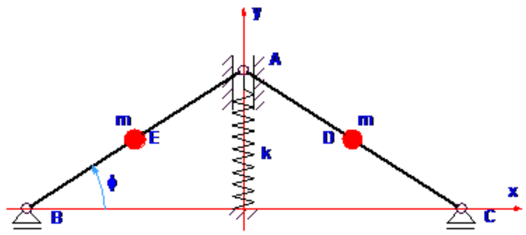
42. Znaleźć środek masy wycinka koła o promieniu $r = 18$ cm i kącie środkowym $2\alpha = 90^0$.

43. Wyznaczyć położenie środka masy stożka prostego o wysokości h.

44. Pręt żelazny o długości $l = 80$ cm i przekroju $q = 2$ cm^2 jest zakończony kulą żelazną o promieniu $r = 5$ cm. W jakiej odległości od wolnego końca pręta znajduje się środek ciężkości układu?

45. Punkt o masie m porusza się na płaszczyźnie po krzywej $y = x^3$, w polu sił ciężkości. Wyznacz równania różniczkowe ruchu punktu korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju lub z zasady d'Alamberta.

46. Dwa jednakowe nieważkie pręty o długości l połączone przegubem A (patrz rysunek). Końce prętów mogą poruszać się bez tarcia wzdłuż osi układu. Punkt A połączony jest z początkiem układu sprężyną o sztywności k. Długość nieodkształconej sprężyny wynosi l. W środku prętów umieszczono masy skupione m. Wyznacz równanie różniczkowe ruchu układu korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju.



47. Punkt o masie m porusza się po gładkiej płaszczyźnie danej równaniem $x + 2y + z - 4 = 0$ w polu sił ciężkości. W trakcie ruchu działa siła oporu $\vec{F} = -c \cdot \dot{\vec{r}}$. Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju wyznacz równanie różniczkowe ruchu punktu, a następnie rozwiąż je przy warunkach początkowych $\vec{r}(t = 0) = (1, 0, 3)$, $\dot{\vec{r}}(t = 0) = (0, 0, 0)$.

48. Pakowarka P wypycha produkty o masie na równię pochyłą. Wiedząc, że współczynnik tarcia między produktem a równią wynosi μ wyznaczyć minimalną wartość kata nachylenia równi do poziomu, by produkty zsuwały się na taśmę.

49. Okrągły pręt o promieniu r cięty jest na automacie na wałeczki, które po odcięciu staczają się po równi pochyłej do pojemnika. Jaki winien być kąt α nachylenia równi do poziomu, by wałeczki pod działaniem swojego ciężaru staczały się do pojemnika, jeżeli współczynnik tarcia tocznego wynosi f.

50. Chwytak elektromagnetyczny robota przemysłowego przenosi pomiędzy płaskimi stołami centrów obróbczych stalową płytę o wymiarach w podanych w centymetrach, jak na rysunku. W którym miejscu płyty powinien być przyłożony chwytak, by płyta podczas transportu znajdowała się w położeniu poziomym.

51. Ramię robota przemysłowego zamocowane w korpusie w przegubie składa się z ramienia dolnego AB o długości $a = 470mm$ i ramienia górnego BC o długości $b = 670$. Ramię dolne połączone jest z ramieniem górnym przegubem B i zakończone z drugiej strony przegubem C do montażu chwytaka. Maksymalny zasięg rienia wynosi $l = 886$. Określić w funkcji czasu prędkość przegubu C, jeżeli będzie on przemieszczany wzdłuż linii poziomej w stronę przegubu A, jeżeli ramię dolne będzie się obracało względem przegubu A z prędkością kątową $\omega = \frac{\pi}{4}$.

52. Sprawdzić ortogonalność, wyznaczyć składowe predkości i przyśpieszenia we współrzednych toroidalnych (r, ϕ, ψ)

$$x = (a + r\cos\phi)\cos\psi$$

$$y = (a + r\cos\phi)\sin\psi$$

$$z = r\sin\phi$$

gdzie $a = const$. Narysować linie współrzędnych $r = const.$, $\phi = const.$, $\psi = const.$

53. Sprawdzić ortogonalność, wyznaczyć składowe predkości i przyśpieszenia w spłaszczonych współrzednych sferoidalnych (ψ, θ, λ)

$$x = c\cosh\psi\cos\theta\cos\lambda$$

$$y = c\cosh\psi\cos\theta\sin\lambda$$

$$z = r\sinh\phi\sin\theta$$

gdzie $c = const$. Narysować linie współrzędnych $\psi = const.$, $\theta = const.$, $\lambda = const.$