Równania różniczkowe zwyczajne

1. Znaleźć równanie różniczkowe rodziny wszystkich okręgów na płaszczyźnie.

2. Naszkicować pole kierunków równania
$$y' = y^2 + 1 - x^2$$
wykorzystując izokliny. Wyznaczyć w ten sposób rozwiązanie szczególne istniejące w przedziale $I = \mathbb{R}$.
Izokliną równania $y' = f(x, y)$ nazywamy krzywą określoną równaniem $f(x, y) = const$.

3. Uzasadnić, że zagadnienie brzegowe
$$\begin{cases} u''(x) = 0, \quad x \in (a, b) \\ u(a) = \eta_1 \\ u(b) = \eta_2 \end{cases}$$
ma jedyne rozwiązanie dla każdych $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$. Z kolei zagadnienie
$$\begin{cases} u''(x) = 0, \quad x \in (a, b) \\ u'(a) = \eta_1 \\ u'(b) = \eta_2 \end{cases}$$
nie ma rozwiązania, gdy $\eta_1 \neq \eta_2$ oraz ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $\eta_1 = \eta_2$.

4. Pokazać, że gdy $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są ciągłe oraz $g(\eta) = 0$ to zagadnienie Cauchy'ego dla równania o zmiennych rozdzielonych ma dokładnie jedno rozwiązanie $y \equiv \eta$, jeśli w pewnym otoczeniu $(\eta - \gamma, \eta + \gamma)$ funkcja g nie ma innych zer oraz całki $\int\limits_{\eta}^{\eta+\gamma} \frac{ds}{g(s)} ds$, $\int\limits_{\eta-\gamma}^{\eta} \frac{ds}{g(s)} ds$ są zbieżne.

5. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania
$$y' = c^y \sin x$$
Naszkicować przykładowe krzywe całkowe. Podać przykłądy warunku początkowego $y(\xi) = \eta$, dla którego
   (a) rozwiązanie istnieje na całej prostej,
   (b) rozwiązanie istnieje w przedziale ograniczonym (a, b) oraz na końcach (a, b) ma nieskończone granice.

6. Znaleźć rozwiązania ogólne równania logistycznego
$$u' = u(b - cu)$$

7. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania
$$y' = (x + y)^2$$

8. Rozwiąż zagadnienie początkowe
$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

9. Rozwiązać równanie:
$$y' = \frac{y+1}{x+2} - e^{\frac{y+1}{x+2}}$$

10. Znaleźć rozwiązanie ogólne
$$y' + y \sin x = \sin^3 x$$

11. Znaleźć rozwiązania ogólne równania
$$y' + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^4 = 0$$
Wyznaczyć rozwiązanie szczególne przechodzące przez punkt $(0, -1)$.

12. Rozwiąż równania:
   (a) $y' - y^2 - 2xy = 2$,
   (b) $y' = y^2 + 1 - x^2$.

13. Rozwiąż równanie

$$y' = f(x) \cdot y$$

Znaleźć warunek konieczny i wystarczający dla funkcji f, aby:

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = 0$

(b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{y(x)}{x} = 0$

14. Sformułować warunki dla funkcji $f, g\colon (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ tak, by dla równania $g(x,y) + h(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$ istniał czynnik całkujący M oraz

(a) $M = M(x)$

(b) $M = M(y)$

15. Znajdź czynnik całkujący i rozwiąż równania:

(a) $(2x^2 + 2xy^2 + 2)y + (3y^2 + x)y' = 0$

(b) $(xy^2 - y^3) + (1 - xy^2)y' = 0$

16. Znaleźć warunek dla α oraz β, przy którym podstawienie $z = y^n$ sprowadza równanie

$$y = ax^\alpha + by^\beta$$

do równania jednorodnego.

17. Sprowadzić równanie

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$$

do równania jednorodnego oraz znaleźć rozwiązania ogólne.

18. Znaleźć rodziny krzywych:

(a) ortogonalnych do rodziny półprostych $y = cx$,

(b) izogonalnych do rodziny półprostych $y = cx$ pod kątem $\frac{\pi}{4}$

Uwaga: $\mathcal{F}$ jest izogonalna do rodziny $\mathcal{G}$, gdy w każdym swoim punkcie krzywe rodziny $\mathcal{F}$ przecinają krzywe rodziny $\mathcal{G}$ pod tym samym kątem.

19. Rozwiąż równania:

(a) $y = xy' + e^{y'}$ (równanie Clairouta)

(b) $y = x\left(y' + \frac{1}{y'}\right) + (y')^4$ (równanie d'Alemberta)

(c) $y = x + y' - \ln y'$ (równanie d'Alemberta)

(d) $y = x(y')^2 + (y')^2$ (równanie d'Alemberta)

(e) $y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$ (równanie d'Alemberta)

20. Znaleźć układ fundamentalny rozwiązań układy ($x = x(p)$, $y = y(p)$)

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = -4x + y \end{cases}$$

Wyznaczyć macierz fundamentalną $Z(p)$ taką, że $Z(0) = I$

21. Znaleźć układ fundamentalny rozwiązań układu oraz znaleźć dowolną macierz fundamentalną

$$\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

22. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$$

23. Dla układu

$$\begin{cases} u' = -u - 2v + 2e^x \\ v' = u + v \end{cases}$$

znajdź macierz fundamentalną $Z(x)$ odpowiadającego mu układu jednorodnego taką, że $Z(\pi) = I$. Przy pomocy macierzy Z wyrazić wzorem rozwiązanie spełniające warunki początkowe

$$\begin{aligned} u(\pi) &= -1 \\ v(\pi) &= e^\pi \end{aligned}$$

a następnie wyznacz jego postać.

24. Rozwiąż równania

    (a) $y'' + y' - 2y = 0$

    (b) $y^{(5)} - 2y^{(4)} - 16y' + 32y = 0$

25. Znajdź układ fundamentalny rozwiązań równania $u^{(5)} + 4u^{(4)} + 2u^{(3)} - 4u'' + 8u' + 16u = 0$

26. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(2) = 1 \\ y'(2) = -2 \end{cases}$$

27. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

28. Rozwiązać zagadnienie brzegowe

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

29. Rozwiązać równania:

    (a) $y'' - 6y' + 9y = 4e^t - 16e^{3t}$

    (b) $y'' - 2y' + 2y = 2\cos(4t) - \cos(2t) + 3$

    (c) $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$