Równania różniczkowe zwyczajne

1. Sprawdzić, czy funkcja $f(x,y)$ spełnia warunek Lipschitza względem zmiennej y w P, gdy:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} x + y\ln y, & \text{dla } x \in \mathbb{R}, |y| \leqslant b, y \neq 0, \\ x, & \text{dla } x \in \mathbb{R}, y = 0. \end{cases}$ w $P = \{(x,y)\colon |y| \leqslant b\}$,

   (b) $f(x,y) = y^2 \sin x + e^x$ w $P = \{(x,y)\colon |y| \leqslant b\}$,

   (c) $f(x,y) = x^2 \sin y$, w $P = [0,2] \times \mathbb{R}$,

   (d) $f(x,y) = x^3 + \sqrt{y}$ w $P = \mathbb{R} \times [0,2]$.

2. Sprawdzić założenia twierdzenia Picarda. Metodą kolejnych przybliżeń znaleźć przybliżenia y_0, y_1, y_2, y_3 rozwiązania zadania Cauchy'ego:

   (a) $\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ w kwadracie $[-1,1] \times [-1,1]$,

   (b) $\begin{cases} y' = xy, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ w kwadracie $[-1,1] \times [0,2]$,

   (c) $\begin{cases} y' = 2x + 3y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ w kwadracie $[-1,1] \times [0,2]$.

   Określić przedział istnienia rozwiązania.

3. Sprawdzić założenia twierdzenia Peano. Wyznaczyć łamaną Eulera – przybliżenie rozwiązania zadania:

   (a) $\begin{cases} y' = 2xy, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

   w przedziale $[0,1]$ stosując długość kroku $h = 0,2$. Obliczyć $y_5(1)$.

4. Sprawdzić założenia twierdzenia Cauchy'ego i wyznaczyć przybliżenie y_4 (wielomian stopnia 4) rozwiązania analitycznego

   (a) $\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} y' = e^{xy}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} y''(x) - 4y(x) = 0, \\ y'(0) = 2, \\ y(0) = 1 \end{cases}$