

Równania różniczkowe zwyczajne

1. Rozwiąż równania o zmiennych rozdzielonych:

(a) $2x^2 \frac{dy}{dx} = y,$

(b) $x - y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} = 0,$

(c) $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \frac{dy}{dx} = 0,$

(d) $x \frac{dy}{dx} + 1 = x^3 - \frac{dy}{dx},$

(e) $(1+x^2) \frac{dy}{dx} - \sqrt{1-y^2} = 0,$

(f) $\sin x \sin y \frac{dy}{dx} = \cos x \cos y,$

(g) $e^{-1/x} y^3 + x^2 y^2 \frac{dy}{dx} = 0,$

(h) $e^y(1+x^2) \frac{dy}{dx} - 2x(1+e^y) = 0,$

(i) $(1-x^2) \frac{dy}{dx} + 1 - y^2 = 0,$

(j) $(1+y^2)(e^{2x} - e^y \frac{dy}{dx}) - (1+y) \frac{dy}{dx} = 0,$

(k) $y^2 = x \frac{dy}{dx} + y,$

(l) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+y^2},$

(m) $e^y \left(\frac{dy}{dx} + 1 \right) = 1,$

(n) $1 - xy \frac{dy}{dx} - x^2 = 0.$

2. Rozwiąż równania metodą podstawienia:

(a) $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = 4,$

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x+y} + 2x + y - 2,$

(c) $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{(x+y)^2},$

(d) $\frac{dy}{dx} = 3x - 2y + 1,$

(e) $\frac{dy}{dx} = (x-y)^2 + 1,$

(f) $\frac{dy}{dx} = x + y + 3.$

3. Rozwiąż równania jednorodne:

(a) $x \frac{dy}{dx} = x + y,$

(b) $x + y + x \frac{dy}{dx} = 0,$

(c) $x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2},$

(d) $x^2 = y^2 = 2xy \frac{dy}{dx},$

(e) $(y-2x) \frac{dy}{dx} = 2y + x,$

(f) $x \frac{dy}{dx} = y \ln \frac{y}{x},$

(g) $(x+y) \frac{dy}{dx} = 2y,$

(h) $x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{y^2 - x^2}.$

4. Rozwiąż równania różniczkowe:

(a) $2(x-2y+1) + (5x-y-4) \frac{dy}{dx} = 0,$

(b) $3y-7x+7 + (7y-3x-4) \frac{dy}{dx} = 0,$

(c) $x-3y+2 + (3x-y-2) \frac{dy}{dx} = 0,$

(d) $(2y-x+1) \frac{dy}{dx} = y-2x-1.$

5. Rozwiąż równania różniczkowe liniowe:

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{x^2} y,$

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2-4} y,$

(c) $\frac{dy}{dx} - 3y = 2,$

(d) $\frac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-x^2},$

(e) $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3,$

(f) $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1-x^2} = \frac{3x}{1-x^2},$

(g) $x \frac{dy}{dx} - 2y = x + 1,$

(h) $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3,$

(i) $2x \frac{dy}{dx} - y = \frac{3}{2} x^2,$

(j) $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$

(k) $\frac{dy}{dx} \cos x - y \sin x = \cos^2 x.$

6. Rozwiąż równania różniczkowe liniowe (metodą przewidywań):

(a) $\frac{dy}{dx} - y = 2e^x$,

(b) $\frac{dy}{dx} + 2y = -2e^{6x}$,

(c) $\frac{dy}{dx} - 2y = 3e^{2x}$,

(d) $\frac{dy}{dx} + 2y = 4x$,

(e) $\frac{dy}{dx} + y = 2x^2 - 2x + 1$,

(f) $\frac{dy}{dx} - 2y = x^4$,

(g) $\frac{dy}{dx} - y = \sin x$,

(h) $\frac{dy}{dx} - y = 5 \cos 2x$,

(i) $\frac{dy}{dx} + 2y = 4 \sin x + 2 \cos x$.

7. Rozwiąż równania różniczkowe Bernoulliego:

(a) $\frac{dy}{dx} + xy = xy^3$,

(b) $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$,

(c) $x\frac{dy}{dx} - y = y^2$,

(d) $x\frac{dy}{dx} + y = xy^2 \ln x$,

(e) $2xy\frac{dy}{dx} + x = y^2$,

(f) $\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = -x^3y^2$.

8. Rozwiąż równania różniczkowe Riccatiego:

(a) $\frac{dy}{dx} = y^2 - xy - x$,

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2}$,

(c) $\frac{dy}{dx} = -(y-x)^2 - \frac{2(y-x)}{x} + 1$.

9. Rozwiąż równania różniczkowe zupełne:

(a) $x - y + (2y - x)\frac{dy}{dx} = 0$,

(b) $x + y + (x - y)\frac{dy}{dx} = 0$,

(c) $3x^2 - 2y + (3y^2 - 2x)\frac{dy}{dx} = 0$,

(d) $2xy + 3y^2 + (x^2 + 6xy - 3y^2)\frac{dy}{dx} = 0$,

(e) $e^y - (2y - xe^y)\frac{dy}{dx} = 0$,

(f) $\frac{1}{y} + x - \frac{x}{y^2}\frac{dy}{dx} = 0$,

(g) $\frac{x}{x^2+y^2} + y + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + x\right)\frac{dy}{dx} = 0$,

(h) $xy^2 + (2y^3 + 3y^2 - 8y + x^2y - 9)\frac{dy}{dx} = 0$.

10. Rozwiąż równania różniczkowe zwyczajne znajdując czynnik całkujący:

(a) $x^2 + y - x\frac{dy}{dx} = 0$,

(b) $x^2 - 3y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$,

(c) $e^{2x} - y^2 + y\frac{dy}{dx} = 0$,

(d) $y^2 + (xy - 1)\frac{dy}{dx} = 0$.