Wniosek 1. *Rozpatrzmy układ równań postaci:*

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + \ldots + a_{2n}(x)y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n \end{cases} \tag{1}$$

o współczynnikach ciągłych w przedziale J.

1. *Rozwiązanie zeruje się w pewnym punkcie przedziału J wtedy i tylko wtedy, gdy zeruje się w każdym punkcie przedziału J.*

2. *Kombinacja liniowa rozwiązań zeruje się w pewnym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy zeruje się w każdym punkcie.*

3. *Dla każdej liczby $k > n$ ($k \in \mathbb{N}$) dowolnych k–rozwiązań powyższego układu tworzy układ liniowo zależny. Istnieje n liniowo niezależnych rozwiązań.*

4. *Jeżeli $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ tworzą ukłąd fundamentalny, to każde rozwiązanie daje się przedstawić w postaci kombinacji liniwej*

$$c_1\vec{y}_2 + \ldots + c_n\vec{y}_n$$

Definicja 1. *Dowolny n liniowo niezależnych rozwiązań układu* (1) *nazywamy układem fundamentalnym rozwiązań (układ fundamentalny to dowolna baza E).*

Układy liniowe niejednorodne równań różniczkowych pierwszego rzędu

Stwierdzenie 1 (rozwiązanie ogólne ukłądu niejednorodnego jest sumą rozwiązania układu jednorodnego i pewnego rozwiązania szczególnego)**.**
Niech $\vec{y}_s$ *będzie pewnym ustalonym rozwiązaniem ukłądu liniowego niejednorodnego równań różniczkowych pierwszego rzędu:*

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x). \end{cases} \tag{2}$$

Wówczas, jeśli $\vec{y}_{jed}$ *jest rozwiązaniem układu jednorodnego odpowiadającego temu układowi:*

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n, \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + \ldots + a_{2n}(x)y_n, \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n, \end{cases} \tag{3}$$

to

$$\vec{y}_{jed} + \vec{y}_s$$

jest rozwiązaniem układu niejednorodnego; w ten sposób otrzymuje się wszystkie rozwiązania układu niejednorodnego.

Twierdzenie 1 (o istnieniu, jednoznaczności, postaci układu liniowego równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu)**.**
Niech $a_{jk}, b_j \colon J \to \mathbb{R}$ *dla* $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ *są funkcjami ciągłymi w przedziale* $J \subseteq \mathbb{R}$ *oraz* $\xi \in J$, $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathbb{R}$. *Wówczas zagadnienie Cauchy'ego postaci:*

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n, \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + \ldots + a_{2n}(x)y_n, \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n, \\ y_1(\xi) = \eta_1, \\ y_2(\xi) = \eta_2, \\ \vdots \\ y_n(\xi) = \eta_n \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale J. *Ujmuje je wzór:*

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix} = Z(x) \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} + Z(x) \int_{\xi}^{x} [Z(s)]^{-1} \begin{bmatrix} b_1(s) \\ \vdots \\ b_n(s) \end{bmatrix} ds$$

dla każdego $x \in J$, *gdzie* $Z(x)$ *jest macierzą fundamentalną rozwiązań ukłądu jednorodnego odpowiadającego rozważanemu układowi taką, że* $Z(\xi) = I$.

Układy liniowe jednorodne o stałych współczynnikach

Twierdzenie 2. *Niech $A = [a_{jk}]$, gdzie $j, k \in \{1, \dots, n\}$, $a_{jk} \in \mathbb{C}$. Wówczas:*

1. *Jeśli λ jest wartością własną ($\lambda \in \mathbb{C}$) macierzy A, a $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ jest wektorem własnym odpowiadającym tej wartości własnej, to wzór*
$$\vec{c} \cdot e^{\lambda x}$$
opisuje nietrywialne rozwiązanie układu $\vec{y}' = A\vec{y}$.

2. *Jeśli $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ są wartościami własnymi macierzy A, a $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_p$ są wektorami własnymi odpowiadającymi tym wartością własnym, to funkcje*
$$\vec{c}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}, \dots, \vec{c}_p \cdot e^{\lambda_p x}$$
są rozwiązaniami
$$\vec{y}' = A\vec{y}$$
przy tym są one liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_p$ są liniowo niezależne.

3. *Jeśli $\lambda_1, \dots, \lambda_n in \mathbb{C}$ są wartościami własnymi macierzy A, a $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$ są liniowo niezależnymi wektorami włąsnymi odpowiadającymi tym wartością własnym, to*
$$\vec{c}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}, \dots \vec{c}_n \cdot e^{\lambda_n x}$$
tworzą układ fundamentalny rozwiązań układu jednorodnego liniowego
$$\vec{y}' = A\vec{y}.$$
Zachodzi to także w szczeggólnym przypadku, gdy $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są parami różnymi wartościami własnymi A.

Twierdzenie 3 (przypadek rzeczywisty)**.**
Załóżmy, że $A = [a_{ij}]$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Wówczas:

1. *Jeśli $\lambda = \mu i + \nu$ jest wartością własną macierzy A o niezerowej części urojonej, a $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}i$ jest wektorem własnym odpowiadającym tej wartości włąsnej, to wzory*
$$u(x) = Re(\vec{c}e^{\lambda x}) = Re\left((\vec{a} + \vec{b}i)e^{\mu x}(\cos(\nu x) + i\sin(\nu x))\right) = e^{\mu x}(\vec{a}\cos(\nu x) - \vec{b}\sin(\nu x))$$
$$v(x) = Im(\vec{c}e^{\lambda x}) = Im\left((\vec{a} + \vec{b}i)e^{\mu x}(\cos(\nu x) + i\sin(\nu x))\right) = e^{\mu x}(\vec{a}\sin(\nu x) + \vec{b}\cos(\nu x))$$
opisują parę rozwiązań liniowo niezależnych, rzeczywistych równania $\vec{y}' = A\vec{y}$.

2. *Jeśli danych jest $2p$ różnych wartości własnych $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1} = \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_{2p} = \bar{\lambda}_p)$ macierzy A oraz q różnych rzeczywistych wartości własnych $(\lambda_{2p+1}, \dots, \lambda_{2p+q})$, a $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_{2p+q}$ są odpowiadającymi im wektorami własnymi, to wzory*
$$\begin{aligned} u_j(x) &= Re(\vec{c}_j e^{\lambda_j x}), \qquad j \in \{1, \dots, p\} \\ v_j(x) &= Im(\vec{c}_j e^{\lambda_j x}), \qquad j \in \{1, \dots, p\} \\ w_j(x) &= \vec{c}_j e^{\lambda_j x}, \qquad j \in \{2p+1, \dots, 2p+q\} \end{aligned}$$
ujmują $2p+q$ liniowo niezależnych rozwiązań rzeczywistych układu $\vec{y}' = A\vec{y}$, które gdy $2p+q = n$ tworzą układ fundamentalny rozwiązań.

3. *Rozwiązania wymienione w punkcie 2 tworzą układ fundamentalny także, gdy wartości własne nie są różne, ale wektory wektory własne* $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_{2p+q} = \vec{c}_n$ *są liniowo niezależne.*

Twierdzenie 4 (wielokrotne wartości własne)**.**
Załóżmy, że $A = [a_{jk}]$*,* $j, k \in \{1, \ldots, n\}$*, gdzie* $a_{jk} \in \mathbb{C}$ *oraz* λ *jest* k*–krotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy* A *(jest* k*–krotną wartością własną* A*). Wówczas istnieje* k *liniowo niezależnych rozwiązań równania* $\vec{y}' = A\vec{y}$ *postaci*

$$\begin{aligned} &\vec{y}_0(x) = \vec{p}_0(x)e^{\lambda x}, \\ &\vdots \\ &\vec{y}_{k-1}(x) = \vec{p}_{k-1}(x)e^{\lambda x}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\vec{p}_j(x) = \begin{bmatrix} p_{1(j)}(x) \\ \vdots \\ p_{n(j)}(x) \end{bmatrix}$$

oraz $p_{1(j)}, \ldots, p_{n(j)}$ *są wielomianami stopnia nie większego od* j *dla* $j \in \{0, \ldots, k-1\}$.
Ponadto:
jeśli dodatkowo wyrazy macierzy A *są liczbami rzeczywistymi, to wzory*

$$\begin{aligned} u_j(x) &= Re(\vec{p}_j(x)e^{\lambda x}) \\ v_j(x) &= Im(\vec{p}_j(x)e^{\lambda x}) \end{aligned}$$

dla $j \in \{0, \ldots, k-1\}$ *opisują* $2k$ *rozwiązań rzeczywistych układu* $\vec{y}' = A\vec{y}$.

Równanie rzędu n i rónoważny układ rzędu 1

Niech $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie daną funkcją i rozważmy równanie

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)). \tag{4}$$

Podstawmy:

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \\ &\vdots \\ y_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{5}$$

Stwierdzenie 2.

1. *Jeżeli funkcja $J \ni x \longmapsto y(x) \in \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem równania (4) rzędu n w przedziale $J \subseteq \mathbb{R}$, to funkcja*

   $$J \ni x \longmapsto (y_1(x), \ldots, y_n(x)) = (y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \in \mathbb{R}^n$$

   jest rozwiązaniem układu równań (5) w przedziale J.

2. *Jeśli funkcja $J \ni x \longmapsto (y_1(x), \ldots, y_n(x)) \in \mathbb{R}^n$ jest rozwiązaniem układu równań (5) w przedziale J, to funkcja*

   $$J \ni x \longmapsto y(x) = y_1(x) \in \mathbb{R}$$

   jest rozwiązaniem równania (4) w przedziale J