Zadanie: Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Układ możemy zapisać w formie:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

gdzie macierz A jest postaci:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Na początku szukamy wartości własnych macierzy A:

$$det \begin{bmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1$$

Zatem wartościami własnymi są:

$$\lambda_1 = i \qquad \lambda_2 = -i$$

Poszukujemy teraz wartości własnych odpowiadających wartością własnym:

- dla $\lambda_1 = i$:

$$\begin{bmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a + (1-i)b = 0$$

$$a = (-1+i)b$$

  Zatem jako wektor własny możemy wziąć:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \end{bmatrix}$$

- dla $\lambda_1 = -i$:

$$\begin{bmatrix} -1+i & -2 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a + (1+i)b = 0$$

$$a = (-1-i)b$$

  Zatem jako wektor własny możemy wziąć:

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Korzystając z odpowiedniego twierdzenia o istnieniu i postaci rozwiązania liniowego układu równań różniczkowych o stałych współczynnikach dostajemy, że układem fundamentalnym rozwiązań jest:

$$\left(v_1 e^{\lambda_1 t}, v_2 e^{\lambda_2 t}\right)$$

czyli:

$$\left(\begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{it}, \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-it}\right)$$

Zatem dowolne rozwiązanie układu równań jest postaci:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c \cdot v_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + d \cdot v_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

czyli:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{it} + d \cdot \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-it}$$

Znaleźliśmy na razie rozwiązania zespolone, a chcielibyśmy znaleźć rozwiązania rzeczywiste. W celu ich znalezienia znaljdźmy część rzeczywistą oraz część urojoną rozwiązania zespolonego:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= c \cdot \begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{it} + d \cdot \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-it} = \\
&= c \cdot \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \cdot (\cos t + i \sin t) + d \cdot \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \cdot (\cos t - i \sin t) = \\
&= c \cdot \cos t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + ic \sin t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + ic \cos t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - c \sin t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + d \cos t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - id \sin t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + id \cos t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \sin t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \left(\cos t \cdot \begin{bmatrix} -c-d \\ c+d \end{bmatrix} + \sin t \cdot \begin{bmatrix} -c-d \\ 0 \end{bmatrix} \right) + i \left(\sin t \cdot \begin{bmatrix} -c+d \\ c-d \end{bmatrix} + \cos t \cdot \begin{bmatrix} c-d \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\
&= (-c-d) \cdot \begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} + i(-c+d) \cdot \begin{bmatrix} \sin t - \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Używając odpowiednich twierdzeń, które mówią, że jeżeli pewna funkcja jest rozwiązaniem, to jej część rzeczywista oraz część urojona też są rozwiązaniami, dostajemy, że:

$$\left(\begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin t - \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} \right)$$

jest układem fundamentalnym złożonym z funkcji rzeczywistych. A każda funkcja postaci:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} \sin t - \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

jest rozwiązaniem rzeczywistym układu.