Twierdzenie 1 (Twierdzenie Banacha o punkcie stałym)**.**
Niech (S, d) będzie zupełną przesrzenią matryczną, $T\colon S \to S$ jest kontrakcją (odwzorowaniem zwężającym), tzn.:

$$\exists_{\theta\in[0,1)}\ \forall_{s_1,s_2\in S}\ d(T(s_1), T(s_2)) \leqslant \theta \cdot d(s_1, s_2).$$

Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt $a \in S$ taki, że

$$T(a) = a.$$

Ponadto, dla $s \in S$ ciąg $(T^n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do a oraz

$$d(T^n(s), a) \leqslant \theta^n \cdot d(s, a).$$

Dowód. Niech $s \in S$.
Pokażemy, że ciąg $(T^n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Pokażemy najpierw, że dla $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$d(T^{n+1}(s), T^n(s)) \leqslant \theta^n d(T(s), s)$$

Dowód powyższej nieówności przeprowadzimy indukcyjnie:

- dla $n = 0$ mamy: $d(T^1(s), T^0(s)) = d(T(s), s)$,
- dla $n = 1$ mamy: $d(T^2(s), T^1(s)) = d(T(T(s)), T(s)) \leqslant \theta d(T(s), s)$,
- krok indukcyjny:
  Załóżmy, że: $d(T^{k+1}(s), T^k(s)) \leqslant \theta^k d(T(s), s)$.
  Pokażemy, że $d(T^{k+2}(s), T^{k+1}(s)) \leqslant \theta^{k+1} d(T(s), s)$.
  Mamy:

$$\begin{aligned}d(T^{k+2}(s), T^{k+1}(s)) = d(T(T^{k+1}(s)), T(T^k(s))) &\leqslant \theta d(T^{k+1}(s), T^k(s)) \leqslant \\ &\leqslant \theta \cdot \theta^k d(T(s), s) = \theta^{k+1} d(T(s), s).\end{aligned}$$

Następnie wykażemy, że dla $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ mamy:

$$d(T^m(s), T^n(s)) \leqslant C\theta^n.$$

Istotnie, ustalmy $m > n$. Wtedy:

$$\begin{aligned}d(T^m(s), T^n(s)) &\leqslant d(T^m(s), T^{m-1}(s)) + d(T^{m-1}(s), T^{m-2}(s)) + \ldots + d(T^{n+1}(s), T^n(s)) \leqslant \\ &\leqslant \theta^{m-1} d(T(s), s) + \theta^{m-2} d(T(s), s) + \ldots + \theta^n d(T(s), s) = \\ &= (\theta^{m-1} + \theta^{m-2} + \ldots + \theta^n) \cdot d(T(s), s) \leqslant \\ &\leqslant d(T(s), s) \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \theta^k = \theta^n \frac{d(T(s), s)}{1-\theta} = C \cdot \theta^n\end{aligned}$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $C \cdot \theta^{n_0} < \varepsilon$. Biorąc dowolne $n, m \geqslant n_0$ mamy:

$$d(T^m(s), T^n(s)) \leqslant C \cdot \theta^{\min(n,m)} \leqslant C \cdot \theta^{n_0} < \varepsilon.$$

To pokazuje, że ciąg $(T^n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego, a zatem (ponieważ przestrzeń S jest zupełna) jest zbieżny. Niech

$$a = \lim_{n\to\infty} T^n(s).$$

Wtedy (na podstawie ciągłości T – odwzorowanie T spełnia warunek Lipschitza, zatem jest ciągłe):

$$T(a) = T(\lim_{n\to\infty} T^n(s)) = \lim_{n\to\infty} T(T^n(s)) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(s) = a.$$

Dodatkowo: pokażemy indukcyjnie, że $d(T^n(s), a) \leqslant \theta^n d(s, a)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $s \in S$.

- dla $n = 0$: $d(T^0(s), a) = d(s, a) = \theta^0 d(s, a)$,

- krok indukcyjny:
  Załóżmy, że $d(T^k(s), a) \leqslant \theta^k d(s, a)$.
  Pokażemy, że $d(T^{k+1}(s), a) \leqslant \theta^{k+1} d(s, a)$.
  Istotnie:
  $$d(T^{k+1}(s), a) = d(T(T^k(s)), T(a)) \leqslant \theta d(T^k(s), a) \leqslant \theta \cdot \theta^k \cdot d(s, a) = \theta^{k+1} d(s, a).$$

Na koniec pokażemy, że punkt stały a jest jedyny. Niech $b \in S$ będzie punktem stałym odwzorowania T. Wtedy:

$$d(a, b) = d(T(a), T(b)) \leqslant \theta d(a, b).$$

Zatem:

$$d(a, b) \cdot (1 - \theta) \leqslant 0$$

Ale $\theta < 1$, co implikuje, że $d(a, b) \leqslant 0$, czyli $d(a, b) = 0$, a zatem $a = b$.

$\square$