Uniwersytet Śląski w Katowicach
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii
Projekt zespołowy

Zbiór zadań przygotowawczych do konkursów matematycznych

Geometria analityczna i planimetria

Autor:

31 maja 2018

Spis treści

1 Zadania

ZADANIE 1 (67 Olimpiada Matematyczna - etap I - Zadanie 2)
W trójkącie ΔABC punkt D leży na boku BC a punkt E na boku AB, przy czym $|BD| = |AC|$, $|AD| = |AE|$, $|AB|^2 = |AC| \cdot |BC|$. Wykazać, że $\angle BAD = \angle CEA$.

ZADANIE 2 (49 Olimpiada Matematyczna - etap III - Zadanie 5)
Punkty D i E leżą na boku AB trójkąta ΔABC oraz

$$\frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|AC|^2}{|CB|^2}.$$

Wykazać, że $\angle ACD = \angle BCE$.

ZADANIE 3 (19 Olimpiada Matematyczna - etap I - Zadanie 2)
W kwadracie $ABCD$ o boku długości 1, punkt E leży na boku BC a punkt F na boku CD, miary kątów $\angle EAB = 20°$, $\angle EAF = 45°$. Obliczyć wysokość trójkąta ΔAEF poprowadzoną z wierzchołka A.

ZADANIE 4 (2 Olimpiada Matematyczna - etap II - Zadanie 5)
Wykazać, że jeśli między bokami ($a = |BC|, b = |AC|$) i przeciwległymi kątami $\alpha = \angle BAC$ i $\beta = \angle ABC$ trójkąta ΔABC zachodzi równość

$$(a^2 + b^2)\sin(\alpha - \beta) = (a^2 - b^2)\sin(\alpha + \beta),$$

to trójkąt ten jest prostokątny lub równoramienny.

ZADANIE 5 (48 Olimpiada Matematyczna - etap II - Zadanie 5)
Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, $|DC| = |DE|$, $\angle DCB = \angle DEA = 90°$. Punkt F leży na boku AB i spełniony jest warunek

$$\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|AE|}{|BC|}.$$

Wykazać, że $\angle FCE = \angle ADE$.

ZADANIE 6 (69 Olimpiada Matematyczna - etap I - Zadanie 2)
Dany jest trójkąt ΔABC, w którym $3|AC| = |AB| + |BC|$. Okrąg dopisany do trójkąta ΔABC jest styczny do boku $|AB|$ w punkcie P, zaś do prostej przechodzącej przez bok AC w punkcie Q. Wykazać, że kąt $\angle CPQ$ jest kątem prostym.

ZADANIE 7 (53 Olimpiada Matematyczna - etap II - Zadanie 5)
Trójkąt ΔABC, w którym $\angle BCA = 90°$, jest podstawą ostrosłupa $ABCD$. Ponadto zachodzą równości $|AD| = |BD|$ oraz $|AB| = |CD|$. Udowodnić, że $\angle ACD \geqslant 30°$.

ZADANIE 8 (48 Olimpiada Matematyczna - etap II - Zadanie 2)
Punkt P leży wewnątrz trójkąta ΔABC oraz

$$\alpha = \angle PBA = \angle PCA = \frac{1}{3}(\angle ABC + \angle ACB).$$

Wykazać, że

$$\frac{|AC|}{|AB| + |PC|} = \frac{|AB|}{|AC| + |PB|}.$$

ZADANIE 9 (54 Olimpiada Matematyczna - etap I - Zadanie 3)
Trzy punkty leżą na okręgu O. Proste styczne do okręgu O w punktach A oraz B przecinają się w punkcie P. Prosta styczna do okręgu O w punkcie C przecina prostą przechodzącą przez punkty A, B w punkcie Q. Wykazać, że

$$|PQ|^2 = |PB|^2 + |QC|^2.$$

ZADANIE 10 (Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów - etap II - zadanie 5)
W trójkącie ΔABC punkt D jest środkiem boku AB, a punkt E jest środkiem odcinka CD. Wykazać, że jeśli $\angle CAE = \angle BCD$, to $|AC| = |CD|$.

ZADANIE 11 (65 Olimpiada matematyczna - etap I - Zadanie 4)
Na bokach BC, CA, AB trójkąta ostrokątnego ΔABC leżą odpowiednio punkty D, E, F, przy czym $|FA| = |FE|$, oraz $|FB| = |FD|$. Udowodnić, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ΔABC leży na okręgu przechodzącym przez punkty C, D, E.

ZADANIE 12 (Olimpiada matematyczna - etap 3 - Zadanie 3)
Dany jest czworokąt $ABCD$, na którym można opisać okrąg. Odcinki $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$ oraz $|DA|$ są średnicami odpowiednio okręgów o_1, o_2, o_3 oraz o_4. Dowieść, że istnieje okrąg styczny do tych czterech okręgów.

ZADANIE 13 (Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów - etap 1 - Zadanie 2)
Dany jest trójkąt ΔABC, $|AC| = |BC|$. Punkt D leży na odcinku AB, $|BD| = 2|AD|$, $\angle BCD = 90°$. Jaką miarę ma kąt $\angle BAC$?

ZADANIE 14 (Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów - etap III - Zadanie 2)
Punkt D leży na boku AB trójkąta ΔABC. Punkt E leży na odcinku CD. Wykaż, że jeśli suma pól trójkątów ΔACE oraz ΔBDE jest równa połowie pola trójkąta ΔABC, to punkt D jest środkiem odcinka AB lub E jest środkiem odcinka CD.
ZADANIE 15 (Olimpiada Matematyczna- etap II - Zadanie 4)
Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Okrąg o średnicy BC jest styczny do boku AD. Wykazać, że okrąg o średnicy AD jest styczny do boku BC.
ZADANIE 16 (68 Olimpiada Matematyczna- etap I - Zadanie 3)
Odcinki AD, BE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ΔABC. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Punkty P, Q są obrazami punktu M przez symetrię względem odpowiednio prostych AD oraz BE. Wykaż, że środek odcinka DE leży na prostej przechodzącej przez punkty P, Q.
ZADANIE 17 (60 Olimpiada matematyczna - etap I - Zadanie 3)
Okrąg wpisany w trójkąt ΔABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E oraz F. Punkty M, G oraz J są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ΔAEF, ΔBDF, ΔDEF. Wykazać, że punkty F oraz J są symetryczne względem prostej MG.
ZADANIE 18 (45 Olimpiada Matematyczna - Etap I - Zadanie 1)
Trójkąt o obwodzie $2p$ jest wpisany w okrąg o promieniu R i opisany na okręgu o promieniu r. Wykazać, że $p < 2(R + r)$.
ZADANIE 19 (45 Olimpiada Matematyczna - etap II - Zadanie 5)
Okrąg wpisany w trójkąt ΔABC jest styczny do boków AB, BC odpowiednio w punktach P, Q. Prosta PQ przecina dwusieczną kąta $\angle BCA$ w punkcie S. Udowodnić, że ta dwusieczna jest

prostopadła do prostej SC.

ZADANIE 20 (Olimpiada Matematyczna - Etap I - Zadanie 9)

Punkty $A_1, \dots A_n$, $n \geqslant 4$ są kolejno wierzchołkami pewnego wielokąta foremnego, przy czym zachodzi związek

$$\frac{1}{|A_1A_2|} = \frac{1}{|A_1A_3|} + \frac{1}{|A_1A_4|}.$$

Ile boków ma ten wielokąt?

ZADANIE 21 (7 Olimpiada Matematyczna - Etap I - Zadanie 4)

Udowodnić, że środek odicnka łączącego środek okręgu wpisanego w trójkąt z środkiem okręgu dopisanego do trójkąta leży na okręgu opisanym na tym trójkącie.

ZADANIE 22 (67 Olimpiada Matematyczna, etap 3 - Zadanie 2)

Okrąg o środku I wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$ jest styczny do boku AB w punkcie M, a do boku CD - w punkcie N, przy czym $\angle BAD + \angle ADC < 180°$. Na prostej MN wybrano taki punkt $K \neq M$, że $AK = AM$. Dowieść, że prosta ID przechodzi przez środek odcinka KN.

ZADANIE 23 (10 Olimpiada Matematyna Gimnazjalistów - etap II - Zadanie 2)

Dany jest ΔABC $|AC| < |BC|$. Punkty D, E leżą odpowiednio na bokach BC oraz AC, przy czym $|AE| = |BD|$. Wykazać, że symetralne odcinków AB i DE przecinają sie na okręgu opisanym na trójkącie ΔABC.

ZADANIE 24 (8 Olimpiada Matematyczna - Etap I - Zadanie 3)

W trójkącie opisanym na okręgu o promieniu r między każdymi dwoma wysokościami h_1, h_2 zachodzi związek

$$\frac{1}{2r} < \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} < \frac{1}{r}.$$

ZADANIE 25 (9 Olimpiada Matematyczna - Etap I - Zadanie 3)

W trójkącie ΔABC odcięto trzy trójkąty narożne prostymi równoległymi do boków tego trójkąta i stycznymi do okręgu wpisanego w ten trójkąt. Udowodnić, że suma promieni okręgów wpisanych w trójkąty narożne jest równa promieniowi okręgu wpisanego w trójkąt ΔABC.

ZADANIE 26 (11 Olimpiada Matematyczna - etap I - Zadanie 11)

Jeśli czworokąt jest opisany na okręgu, to można na nim opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy cięciwy łączące punkty styczności przeciwległych boków są prostopadłe.

ZADANIE 27 (15 Olimpiada Matematyczna - Etap I - Zadanie 11)

W trójkącie ΔABC kąt przy wierzchołku A jest równy $20°$, ponadto $|AB| = |AC|$. Na bokach AB, AC obrano odpowiednio punkty D, E w taki sposób, że $\angle DCB = 60°$ oraz $\angle EBC = 50°$. Wyznaczyć miarę kąta $\angle EDC$.

ZADANIE 28 (20 Olimpiada Matematyczna - etap 2 - Zadanie 3)

Dany jest czoworkąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Obrazami punktów A, C przez symetrię względem prostej BD są punkty A', C' , a obrazami B, D przez symetrię względem prostej AC są punkty B', D'. Dowieść, że punkty A', B', C', D' leżą na jednym okręgu.

ZADANIE 29 (21 Olimpiada Matematyczna - etap I - Zadanie 4)

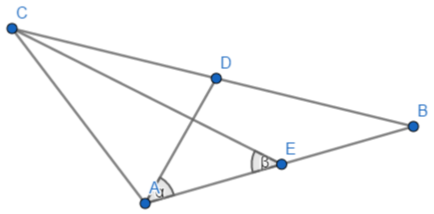
W kwadracie $ABCD$ o boku długości 1 leży czworokąt wypukły o polu większym od $\frac{1}{2}$. Udowodnić, że w czworokącie tym leży odcinek długości $\frac{1}{2}$, który jest równoległy do boku AB.

ZADANIE 30 (30 Olimpiada Matematyczna - etap 3 - Zadanie 5)

Dowieść, że iloczyn długości boków czworokąta wypukłego wpisanego w okrąg o promieniu 1 jest nie większy od 4.

2 Rozwiązania

Zadanie 1



Zauważmy, że

$$|AB|^2 = |AC| \cdot |BC| = |BD| \cdot |BC|,$$

stąd

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BD|}{|AB|}.$$

Ponadto z rysunku widać, że $\angle ABC = \angle DBA$. Z cechy "bok-kąt-bok" przystawania trójkątów dostajemy podobieństwo trójkątów $\Delta ABC, \Delta DBA$. W szczególności

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|DA|}{|DB|} = \frac{|AD|}{|BD|}.$$

Z założeń zadania

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AE|}{|AC|},$$

z powyższych równości

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|}.$$

Ponieważ

$$\angle CAB = \angle CAE,$$

to trójkąty $\Delta CAB, \Delta EAC$ są podobne, stąd

$$\angle CEA = \angle BCA.$$

Ponieważ trójkąty $\Delta ABC, \Delta DBA$ są podobne, to

$$\angle BCA = \angle BAD.$$

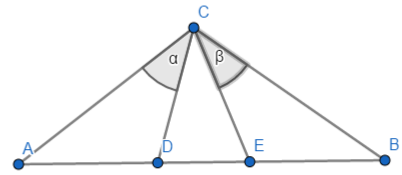
Ostatecznie

$$\angle CEA = \angle BAD$$

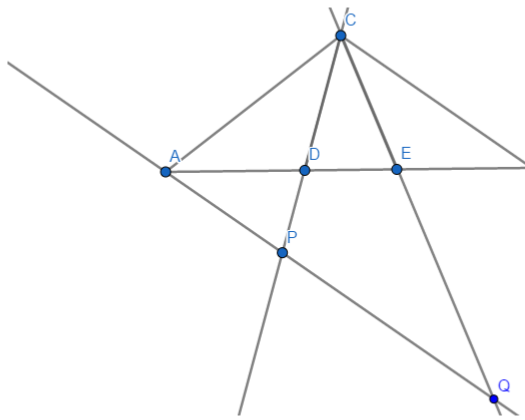
.

Zadanie 2

Zgodnie z treścią zadania i poniższego rysunku pytamy, czy $\alpha = \beta$?



Przez punkt A poprowadźmy prostą równoległą do prostej przechodzącej przez punkty B, C. Przez P, Q oznaczmy punkty przecięcia przedłużeń odcinków odpowiednio CD oraz CE z powyższą prostą tak jak na rysunku poniżej.



Ponieważ kąty $\angle ADP$, $\angle BDC$ są sobie równe jako kąty wierzchołkowe oraz odcinki AP, CB są równoległe, to z twierdzenia Talesa trójkąty ΔAPD, ΔBDC są podobne. Zatem

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AP|}{|CB|}.$$

Z tych samych powodów trójkąty ΔAQE, ΔBCE są podobne. Stąd

$$\frac{|AE|}{|EB|} \cdot \frac{|AQ|}{|CB|}.$$

Stosując powyższe równości do założenia zadania, mamy

$$\frac{|AC|^2}{|CB|^2} = \frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|AP|}{|CB|} \cdot \frac{|AQ|}{|CB|}.$$

Mnożąc powyższą równość przez $|CB|^2$, otrzymujemy

$$|AC|^2 = |AP| \cdot |AQ|,$$

zatem

$$\frac{|AP|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AQ|}.$$

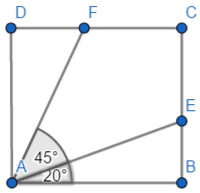
Z powyższej równości i faktu, że $\angle QAC = \angle CAP$ otrzymujemy, że trójkąty ΔAQC, ΔACP są podobne. Mamy

$$\angle ACP = \angle AQC,$$

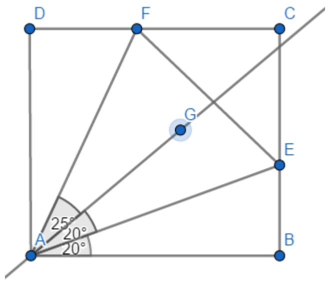
jednak $\angle ACP = \angle ACD$, a z podobieństwa trójkątów ΔAQE, ΔBCE wynika, że $\angle AQC = \angle BCE$. Łącząc powyższe równości otrzymujemy ostatecznie

$$\angle ACD = \angle BCE.$$

Zadanie 3



Z punktu A prowadzimy prostą i odkładamy na niej punkt G. Prostą prowadzimy w ten sposób by $|AG| = 1$ oraz $\angle EAG = 20°$, $\angle GAF = 25°$ tak jak na rysunku poniżej.



Ponieważ $|AG| = |AB| = 1$ oraz $\angle EAB = \angle EAG = 20°$ to trójkąty ΔAGE oraz ΔABE są przystające. Stąd również

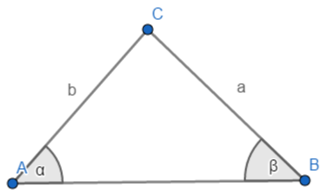
$$\angle AGE = 90°.$$

Podobie trójkąty ΔDAF oraz ΔFAG są przystające ponieważ $\angle FAD = 90 - \angle EAF - \angle BAE = 25°$, stąd

$$\angle AGF = 90°.$$

Zatem punkt G musi leżeć na prostej EF. A skoro $\angle AGE = 90°$, to $|AG| = 1$ jest wysokością trójkąta ΔAEF wychodzącą z wierzchołka A.

Zadanie 4



Z twierdzenia sinusów
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$
Z założenia zadania i tożsamości trygonometrycznych mamy

$$(a^2+b^2)\cdot(\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)) = (a^2-b^2)\cdot(\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)),$$

stąd
$$a^2\sin(\alpha)\cos(\beta)-a^2\cos(\alpha)\sin(\beta)+b^2\sin(\alpha)\cos(\beta)-b^2\cos(\alpha)\sin(\beta) =$$
$$= a^2\sin(\alpha)\cos(\beta)+a^2\cos(\alpha)\sin(\beta)-b^2\sin(\alpha)\cos(\beta)-b^2\cos(\alpha)\sin(\beta).$$
Redukując wyrazy podobne otrzymujemy

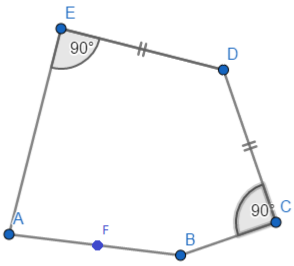
$$2a^2\cos(\alpha)\sin(\beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta),$$

zatem
$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\sin(\beta)}.$$
Stąd i z pierwszej równości otrzymujemy

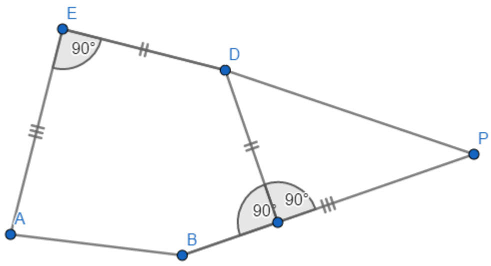
$$\frac{\sin^2(\alpha)}{\sin^2(\beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\sin(\beta)},$$

wynika stąd
$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{cos(\beta)}{\cos(\alpha)}.$$
Zatem
$$\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(\beta)cos(\beta),$$
z tożsamości trygonometrycznych,
$$\sin(2\alpha) = \sin(2\beta).$$
Z powyższej równości, mamy $2\alpha = 2\beta$ lub $2\alpha = 180^\circ - 2\beta$. Z pierwszego przypadku $\alpha = \beta$, zatem ΔABC jest trójkątem równoramiennym. Z drugiego przypadku $\alpha + \beta = 90^\circ$, zatem ΔABC jest trójkątem prostokątnym.

Zadanie 5

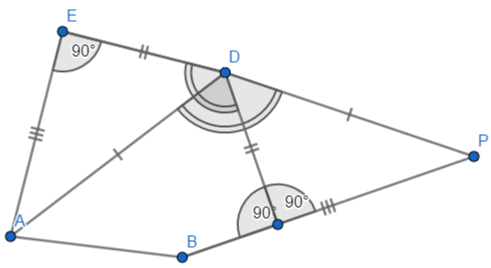


Przedłużamy odcinek BC do odcinka BP o długości AE jak na rysunku poniżej.

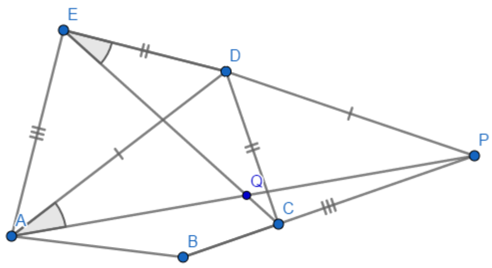


Z cechy przystawania trójkątów "bok-kąt-bok", trójkąty ΔADE oraz ΔPDC są przystające, w szczególności $|AD| = |DP|$ oraz $\angle ADE = \angle PDC$. Ponadto

$$\angle EDC = \angle ADE + \angle ADC = \angle PDC + \angle ADC = \angle ADP.$$



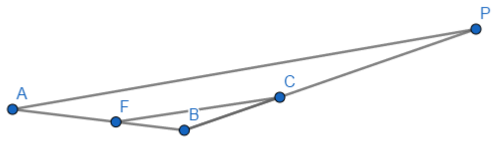
Trójkąty ΔEDC oraz ΔADP są równoramienne i mają ten sam kąt rozwarcia, zatem są to trójkąty podobne. W szczególności $\angle PAD = \angle CED$. Oznaczmy przez Q punkt przecięcia odcinka AP z odcinkiem EC.



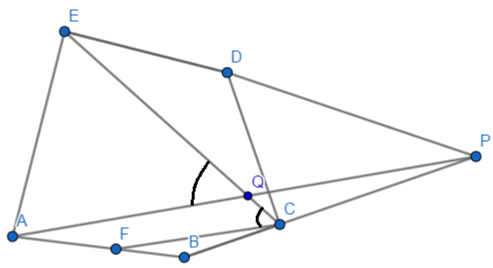
Na czworokącie $AQDE$ można opisać okrąg, zatem $\angle AQE = \angle ADE$.
Z założenia zadania mamy

$$\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|AE|}{|BC|} = \frac{|PC|}{|BC|}.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa odcinki AP, FC są równoległe.

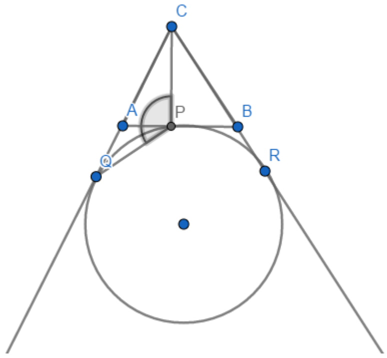


Zatem $\angle AQE = \angle FCE$.



Wiemy, że $\angle AQE = \angle ADE$. Zatem $\angle FCE = \angle ADE$.

Zadanie 6



Rysunek przedstawia naszą sytuację, został na nim dopisany punkt R będący punktem styczności zadanego okręgu z prostą przechodzącą przez bok BC. Z twierdzenia o stycznych otrzymujemy

$$|AP| = |AQ|,$$

$$|CQ| = |CR|$$

oraz

$$|BP| = |BR|.$$

Z założeń zadania i rysunku mamy

$$3|AC| = |AB| + |BC| = |AP| + |PB| + |BC| = |AP| + |BR| + |BC| =$$

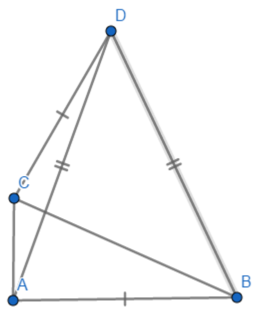
$$= |AP| + |CR| = |AP| + |CQ| = |AP| + |AQ| + |AC| = 2|AP| + |AC|,$$

stąd

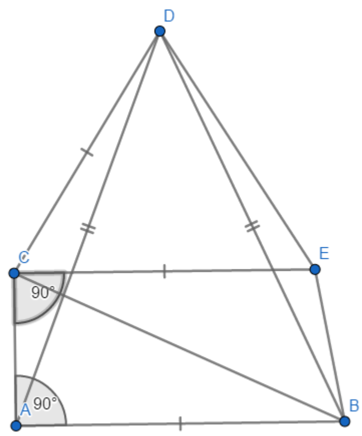
$$|AC| = |AQ| = |AP|$$

Wynika stąd, że okrąg opisany na trójkącie ΔQPC ma promień $|AP|$, a odcinek QC jest jego średnicą. Zatem trójkąt ΔQPC jest trójkątem prostokątnym oraz $\angle CPQ = 90°$.

Zadanie 7



Trójkąt ΔABC uzupełniamy do prostokąta $ABEC$ tak jak na rysunku poniżej.



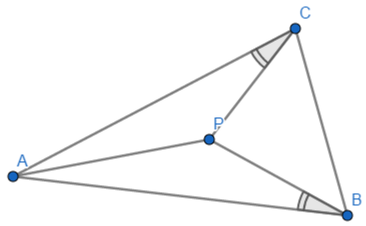
Ponieważ $|AD| = |BD|$, to $|CD| = |DE|$. Ponadto $|AB| = |CD|$, zatem trójkąt ΔCED jest równoboczny. Z twierdzenia o kącie trójściennym

$$\angle ACD + \angle DCE \geqslant \angle ACE,$$

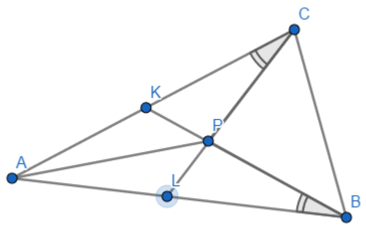
stąd

$$\angle ACD \geqslant \angle ACE - \angle DCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Zadanie 8



Przedłużamy odcinki BP, CP do odcinków odpowiednio BK oraz CL tak jak na rysunku poniżej.



Ponieważ $\angle KPC$, $\angle CPB$ to kąty przyległe, to

$$\angle KPC = 180° - \angle BPC.$$

Ponieważ suma kątów w trójkącie to $180°$, to

$$\angle BPC = 180° - (\angle PBC + \angle PCB).$$

Z powyższych równości otrzymujemy

$$\angle KPC = \angle PBC + \angle PCB = (*).$$

Z rysunku

$$\angle PBC = \angle ABC - \angle ABP = \angle ABC - \alpha$$

oraz

$$\angle PCB = \angle ACB - \angle ACP = \angle ACB - \alpha,$$

zatem

$$(*) = \angle ABC + \angle ACB - 2\alpha = 3\alpha - 2\alpha = \alpha.$$

Zatem $\angle KPC = \angle PCK = \alpha$, stąd ΔKPC jest trójkątem równoramiennym oraz $|KP| = |KC|$. Postępując w analogiczny sposób pokazujemy, że $\angle LPB = \angle PBL = \alpha$, zatem trójkąt ΔLPB jest trójkątem równoramiennym oraz $|LP| = |LB|$. Z cechy podobieństwa "kąt-kąt-kąt" trójkąty ΔABK, ΔALC są podobne, gdyż $\angle LCA = \angle KBA$ oraz $\angle KAB = \angle LAC$. Z powyższego podobieństwa

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AK| + |KB|}{|AL| + |LC|},$$

przekształcając

$$\frac{|AK|+|KB|}{|AL|+|LC|}=\frac{|AC|-|KC|+|KB|}{|AB|-|LB|+|LC|}=\frac{|AC|-|KP|+|KB|}{|AB|-|LP|+|LC|}=$$

$$=\frac{|AC|-|KP|+|KP|+|PB|}{|AB|-|LP|+|LP|+|PC|}=\frac{|AC|+|PB|}{|AB|+|PC|}.$$

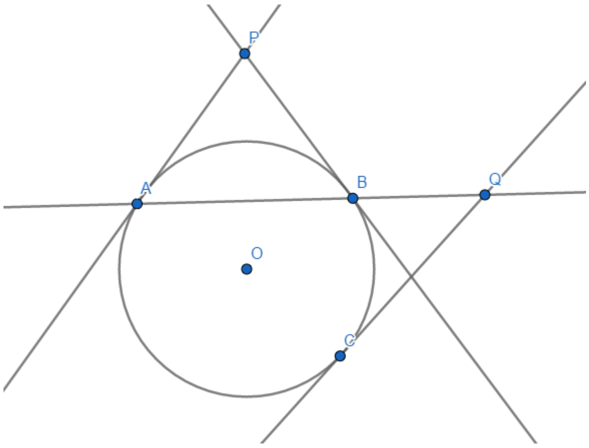
Zatem

$$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|AC|+|PB|}{|AB|+|PC|},$$

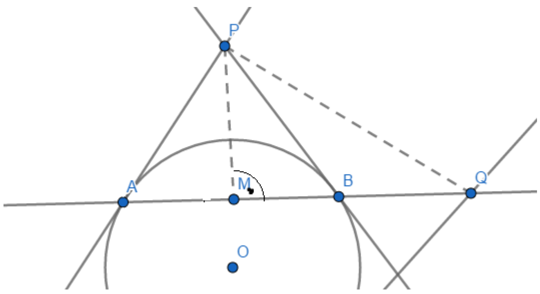
stąd

$$\frac{|AC|}{|AB|+|PC|}=\frac{|AB|}{|AC|+|PB|}.$$

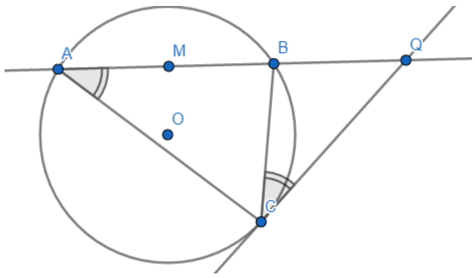
Zadanie 9



Oznaczmy, przez M środek odcinka AB. Z twierdzenia o stycznych $|AP|=|PB|$, zatem M jest spodkiem wysokości, stąd trójkąt ΔPQM jest trójkątem prostokątnym.



Z twierdzenia o stycznej i cięciwie $\angle QAC=\angle CQB$.



Zatem trójkąty ΔAQC oraz ΔCQB są podobne, stąd

$$\frac{|QC|}{|AQ|} = \frac{|QB|}{|QC|},$$

czyli

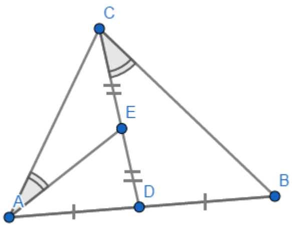
$$|QC|^2 = |AQ||QB|.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ΔPQM oraz ΔPMB mamy

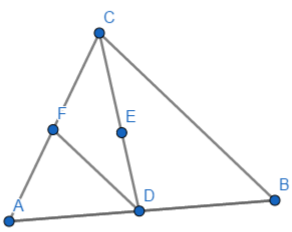
$$|PQ|^2 = |PM|^2 + |QM|^2 = |PB|^2 - |MB|^2 + |QM|^2 = |PB|^2 + (|QM| - |MB|)(|QM| + |MB|) =$$

$$|PB|^2 + |BQ||AQ| = |PB|^2 + |QC|^2.$$

Zadanie 10



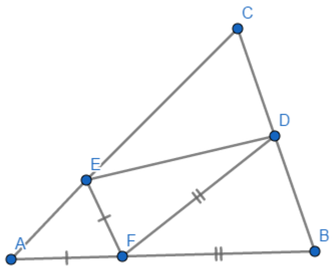
Oznaczmy przez F środek odcinka AC.



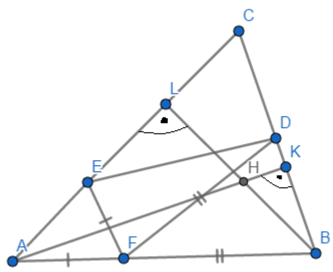
Wówczas trójkąty ΔABC oraz ΔADF są podobne z cechy podobieństwa "bok-kąt-bok". Zatem odcinki FD oraz CD są równoległe.

Zadanie 11

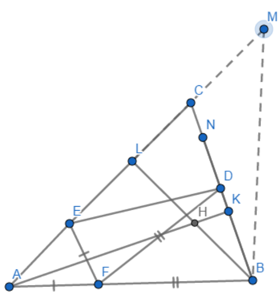
Z treści zadania mamy



Niech K, L będą spodkami wysokości na bokach BC oraz AC. Ponieważ wysokości w trójkącie przeciają się w jedym punkcie, to wystarczy rozpatrywać punkt H będący punktem przecięcia odcinków AK, BL.



Odbijamy symetrycznie punkt A względym punktu L (oznaczamy M) natomiast B względem punktu B względem K (oznaczamy N).



Wówczas

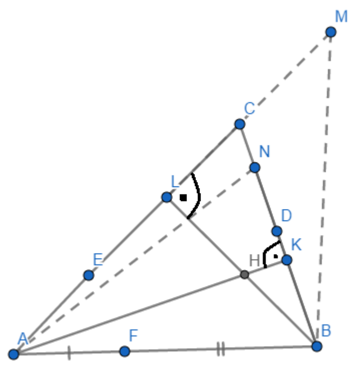
$$|AL| = |LM|$$

oraz

$$|BK| = |KN|.$$

Wówczas prosta przechodząca przez odcinek AK jest symetralną odcinka BN, a prosta przechodząca przez odcinek BL jest symetralną odcinka AM. Zatem trójkąty ΔAMB oraz ΔBNA są równoramienne. Ponadto trójkąt ΔAEF jest równoramienny oraz $\angle EAF = \angle MAB$, zatem trójkąty ΔAMB oraz ΔAEF są podobne. Podobnie trójkąt ΔBDF jest równoramienny oraz $\angle FBD = \angle ABN$, zatem trójkąty ΔBNA oraz ΔBDF są podobne. Z powyższego dostajemy równości

$$(1) \quad \frac{|AE|}{|EM|} = \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|ND|}{|DB|}.$$



Zauważmy, że punkt H leży na symetralnych docinków AM, BN, stąd trójkąty ΔAHM, ΔNHB są równoramienne. Ponadto

$$\angle HAM = \angle KAC = 90° - \angle KCA = 90° - \angle BCA =$$

$$= 90° - \angle BCL = \angle LBC = \angle HBN,$$

zatem trójkąty ΔAHM, ΔNHB są podobne. Z (1) wynika, że punktowi E w trójkącie ΔAHM odpowiada punkt D w trójkącie ΔBHN. Mamy

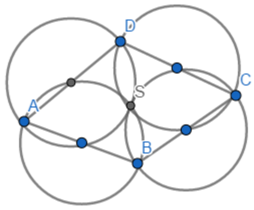
$$\angle CEH = \angle HEM = \angle HDB = 180° - \angle HDC,$$

stąd

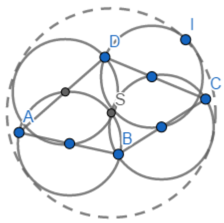
$$\angle CEH + \angle HDC = 180°.$$

Ostatecznie na czworokącie $EHDC$ można opiąć okrąg.

Zadanie 12
Załóżmy najpierw, że czworokąt $ABCD$ jest rombem.



Rozważmy trójkąt $\angle ABS$. Kąt $\angle ASB = 90°$. Okrąg opisany na tym trójkącie ma średnicę AB, jest to trójkąt z treści zadania. Wynika stąd, że każdy z okręgów opisanych w treści zadania przechodzi przez punkt S. Biorąc $r = |AB|$ otrzmujemy żądany okrąg.

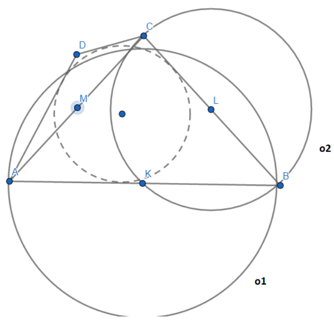


Załóżmy, że czworokąt $ABCD$ nie jest rombem. Załóżmy bez straty ogólności, że $|BC| < |AB|$. Ponieważ na czworokącie tym można opisać okrąg, to

$$|AB| + |DC| = |BC| + |AD|,$$

zatem

$$0 < |AB| - |BC| = |AD| - |DC|.$$



Jak widać, na rysunku przez K, L oraz M oznaczyliśmy środki odpowiednio AB, BC oraz AC.

Niech $r = \frac{1}{2}(|AB| - |BC|)$. Wówczas

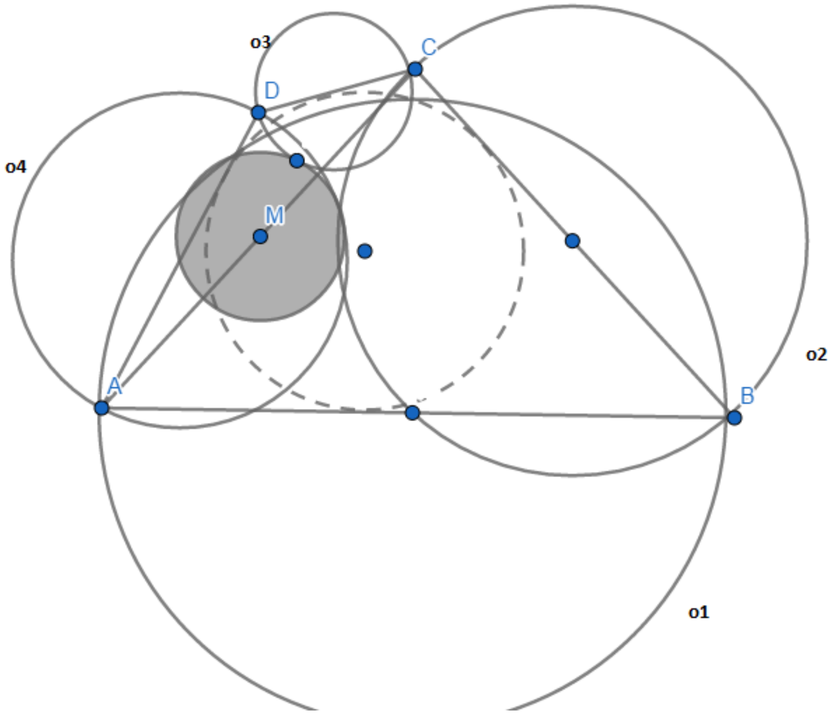
$$r + \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}|AB|,$$

a ponieważ trójkąt ΔABC jest podobny do trójkąta ΔMLC w skali $\frac{1}{2}$, to $\frac{1}{2}|AB| = |ML|$. Ponieważ $\frac{1}{2}|BC|$ to promień okręgu o_2, to okrąg o środku M i promieniu r jest styczny zewnętrznie do o_2. Ponadto

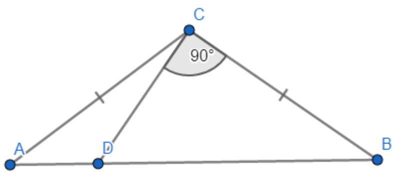
$$\frac{1}{2}|AB| - r = \frac{1}{2}|BC|,$$

a ponieważ trójkąt ΔABC jest podobny do trójkąta ΔAKM w skali $\frac{1}{2}$, to $\frac{1}{2}|BC| = |KM|$. Ponieważ $\frac{1}{2}|AB|$ to promień okręgu o_1, to okrąg o środku M i promieniu r jest styczny wewnętrznie do o_1.

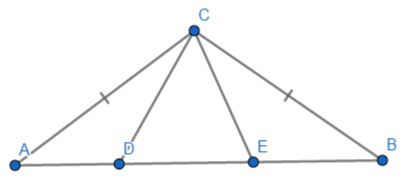
Zauważmy, że $r = \frac{1}{2}(|AD| - |DC|)$, Zatem powyższe rozumowanie dotyczy również okręgów o_3 i o_4. To znaczy okrąg o środku w punkcie M jest styczny wewnętrznie do okręgu o_4, a zwenętrznie do o_3.



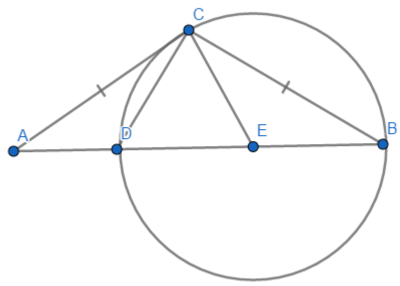
Zadanie 13



Niech E będzie środkiem odcinka DB. Wówczas z założenia zadania $|AD| = |DE| = |EB|$.

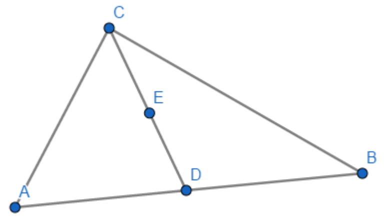


Ponieważ $\angle DCB = 90°$, to odcinek DB jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ΔDCB, a punkt E jest jego środkiem.



Wynika stąd, że $|DE| = |EC|$, a ponieważ trójkąt ΔABC jest równoramienny oraz punkty D, E są swoimi obrazami poprzez symetrię wyznaczoną przez jego wysokość, to $|DC| = |EC|$. Zatem trójkąt ΔDEC jest trójkątem równobocznym. Wynika stąd, że $\angle BDC = 60°$. Stąd $\angle BAC = \angle ABC = 180° - 90° - \angle BDC = 30°$.

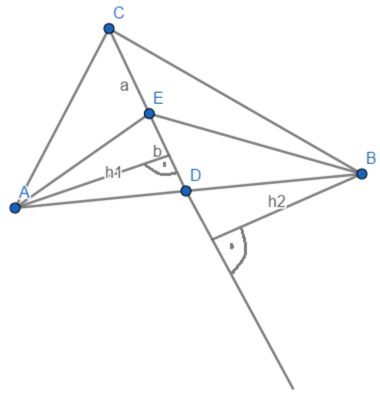
Zadanie 14



Z założenia mamy

$$P_{\Delta}ACE + P_{\Delta}DBE = P_{\Delta}ADE + P_{\Delta}EBC.$$

Bez straty ogólności załóżmy, że kąt $\angle ADC$ jest ostry, wówczas $\angle BDC$ jest kątem rozwartym. Oznaczmy przez h_1 wysokość trójkątów ΔEAC oraz ΔDAE wychodzącą z wierzchołka A. Podobnie przez h_2 wysokość trójkątów ΔDBE oraz ΔEBC.



Przez a oznaczyliśmy długość odcinka CE, a przez b długość odcinka ED. Z równości pól mamy

$$\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}bh_2 = \frac{1}{2}bh_1 + \frac{1}{2}ah_2,$$

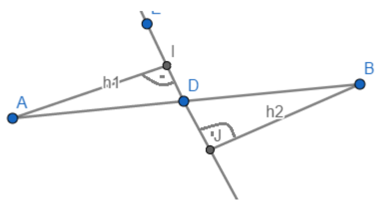
stąd

$$0 = h_1(b-a) + h_2(a-b),$$

zatem

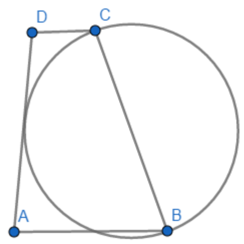
$$0 = (h_1 - h_2)(b-a).$$

Wynika stąd, że $h_1 = h_2$ lub $a = b$. Jeśli $a = b$, to punkt E jest środkiem odcinka CD. Jeśli $h_1 = h_2$, to trójkąty na poniższym rysunku ΔDAI oraz ΔDBJ są przystające.

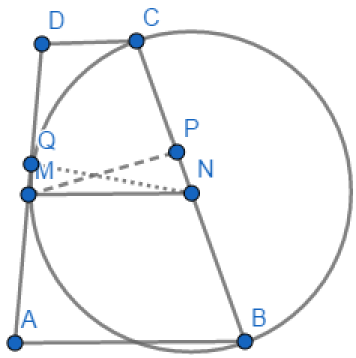


Zatem $|AD| = |DB|$, co kończy dowód.

Zadanie 15



Oznaczmy przez M, N środki odpowiednio boków AD , BC. Przez Q oznaczmy punkt styczności okręgu o średnicy BC do boku AD, natomiast przez P oznaczmy rzut prostopadły punktu M na bok BC.



Ponieważ M oraz N są środkami boków trapezu $ABCD$ to prosta MN jest równoległa do DC. Wówczas wysokość trójkąta ΔMND jest taka sama jak wysokość trójkąta ΔMNC, zatem pola tych trójkątów są sobie równe, tzn.

$$P_{\Delta}MND = P_{\Delta}MNC,$$

stąd

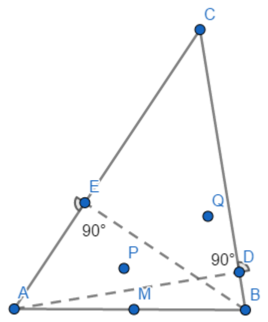
$$\frac{1}{2}|MD||QN| = \frac{1}{2}|NC||PM|.$$

Ponieważ $|NC| = |NQ|$, gdyż jest to promień okręgu o średnicy BC, to

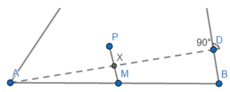
$$|MD| = |MP|,$$

zatem okrąg o średnicy AD jest styczny do boku BC.

Zadanie 16

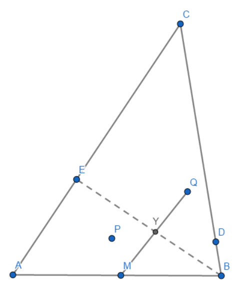


Skoro P jest obrazem M przez symetrię względem AD, to odcinek AD jest prostopadły do odcinka MP. Niech X będzie punktem ich przecięcia.



Wówczas ΔAMX jest trójkątem podobnym do trójkąta ΔABD w skali $\frac{1}{2}$, tj. $|AX| = |XD|$. W szczególności czworokąt $AMDP$ jest rombem. Stąd $|MB| = |AM| = |PD|$ oraz odcinki AM, MB, PD są równoległe.

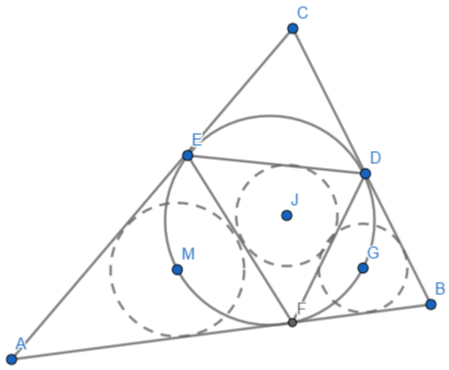
Podobnie z faktu, że Q jest obrazem M przez symetrię względem BE, to odcinek BE jest prostopadły do MQ. Niech Y będzie punktem ich przecięcia.



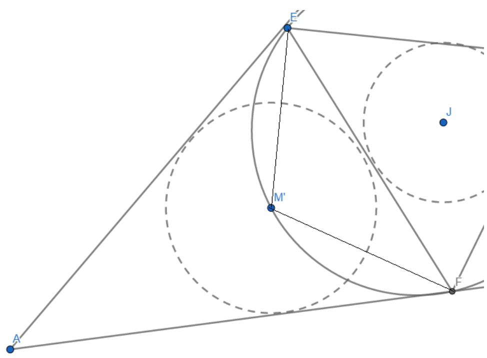
Wówczas trójkąty ΔBMY oraz ΔBAE są podobne w skali $\frac{1}{2}$, tj. $|BY| = |YB|$. W szczególności czworokąt $|EQ| = |MB|$ oraz odcinki EQ, MB są równoległe.

Jeśli punkty E, Q, D oraz P leżą na jednej prostej to teza jest spełniona. Jeśli tak nie jest to z faktu, że $|EQ| = |PD|$ oraz odcinek EQ jest równoległy do odcinka PD wnioskujemy, że czworokąt $PDQE$ jest równoległobokiem, a odcinki ED oraz PQ to jego przekątne, które przecinają sie w środkach.

Zadanie 17



Wykażemy, że M jest środkiem łuku EF. Załóżmy, że punkt M' nim jest.



Skoro M' jest środkiem łuku EF, to kąty $\angle EAM'$ oraz $\angle M'AE$ są sobie równe, zatem AM jest dwusieczną kąta $\angle FAE$. Ponieważ M' jest środkiem łuku FE to trójkąt $\Delta FM'E$ jest równoramienny zatem

$$\angle EFM' = \angle FEM',$$

a z twierdzenia o stycznej i cięciwie

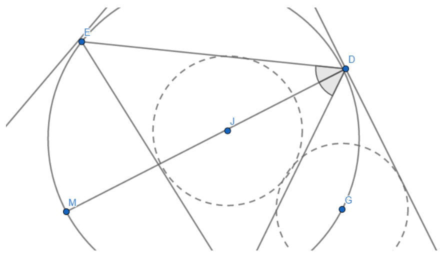
$$\angle M'EA = \angle M'FE.$$

W konsekwencji $\angle M'EA = \angle FEM'$, czyli EM' jest dwusieczną kąta $\angle AEF$. Stąd M' to środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ΔAFE. Analogicznie rozumując otrzymujemy, że punkt G jest środkiem łuku FD.

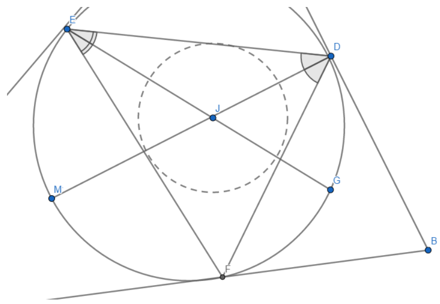
Okrąg wpisany w trójkąt ΔABC jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ΔFDE. Ponieważ kąty $\angle MDE$, $\angle MDF$ są oparte na łukach tej samej długości, to maja równe miary

$$\angle MDE = \angle MDF.$$

Zatem punkt M leży na dwusiecznej kąta $\angle FDE$ na której leży punkt J.



Analogicznie $\angle GEF = \angle GED$ oraz punkt G leży na dwusiecznej kąta $\angle FED$ na której leży punkt J.

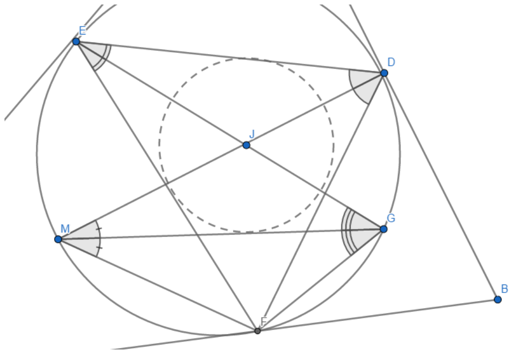


Aby wykazać, że punkty JF są symetryczne pokażemy, że trójkąty ΔFGM oraz ΔJGM są przystające. Zauważmy, że

$$\angle JMG = \angle DMG = \angle FMG,$$

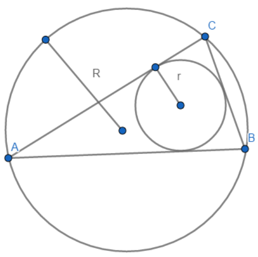
ostatnia równość wynika z faktu, że kąty $\angle FMG$ oraz $\angle GMD$ są oparte na łukach tej samej długości.

Analogicznie $\angle MGJ = \angle MGF$.

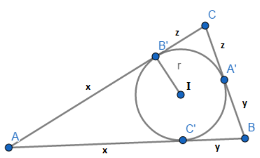


Ostatecznie trójkąty ΔFGM oraz ΔJGM są przystające, co kończy dowód.

Zadanie 18



Załóżmy bez straty ogólności, że kąt $\angle ACB$ jest największy. Oznaczmy przez a, b, c długości odpowiednio odcinków BC, CA, AB. Niech ponadto A', B',C' będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ΔABC leżącymi na bokach BC, CA, AB, I środkiem tego okręgu i niech $x = |AB'|$, $y = |BC'|$ oraz $z = |CA'|$ tak jak na rysunku poniżej.



Z twierdzenia o stycznych $x = |AC'|$, $y = |BA'|$ oraz $z = |CB'|$. Zachodzą również równości $|AB| = x + y, \quad |BC| = y + z \quad \text{oraz} \quad |CA| = x + z$. Prosta CI jest dwusieczną kąta $\angle ACB$, a trójkąt $\Delta ICB'$ jest prostokątny, stąd

$$\mathrm{ctg}(\angle ICB') = \frac{z}{r},$$

zatem

$$z = r \operatorname{ctg}(\angle ICB').$$

Ponieważ $\angle ICB'$ jest największym kątem, to jest on większy lub równy $60°$. Ponieważ ctg jest funkcją malejącą to

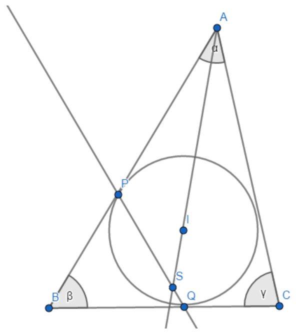
$$z = r \operatorname{ctg} \angle ICB' \leqslant r \operatorname{ctg}(30°) = \sqrt{3}r < 2r.$$

Ponieważ $2R$ jest największą cięciwą okręgu opisanego na trójkącie ΔABC, to $|AB| \leqslant 2R$. Ostateczenie

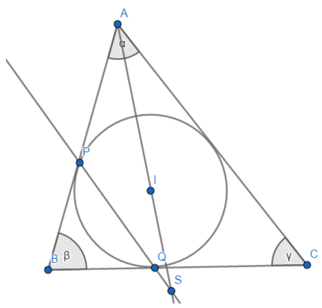
$$p = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CA|) = x + y + z = |AB| + z < 2R + 2r = 2(r + R).$$

Zadanie 19

Niech $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$ oraz $\gamma = \angle BCA$. Gdy $\gamma = \beta$, to trójkąt ΔABC jest równoramienny, $S = Q$, a AQ jest jego wysokością i teza jest spełniona. Pozostały dwa przypadki: $\beta < \gamma$



oraz $\beta > \gamma$



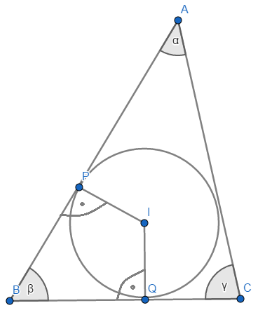
W pierwszym przypadku punkt S leży na prostej PQ, natomiast w drugim punkt Q leży na prostej PS. Zauważmy, że

$$\angle QIS = \angle AIP + \angle PIQ - 180°,$$

gdy $\beta < \gamma$ oraz

$$\angle QIS = 180° - \angle AIP - \angle PIQ,$$

gdy $\beta > \gamma$. Punkty P oraz Q to punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt, zatem $\angle IPB = \angle IQB = 90°$.



Wynika stąd, że na czworokącie $BQIP$ można opisać okrąg. Stąd

$$\angle PIQ + \angle PBQ = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle PIQ = 180^\circ - \beta.$$

Ponieważ trójkąt ΔPIQ jest równoramienny, to

$$\angle IQP = \angle IPQ = \frac{180^\circ - \angle PIQ}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \beta)}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Ponieważ AI jest dwusieczną kąta $\angle BAC$ oraz trójkąt ΔAIP jest prostokątny, to

$$\angle AIP = 90^\circ - \angle IAP = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Zatem jeśli $\beta < \gamma$, to

$$\angle QIS = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 180^\circ - \beta - 180^\circ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta =$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha - 2\beta) = \frac{1}{2}(\gamma - \beta),$$

oraz

$$\angle IQS = \angle IQP = \frac{\beta}{2}.$$

Natomiast, gdy $\beta > \gamma$, to

$$\angle QIS = \frac{1}{2}(\beta - \gamma),$$

oraz

$$\angle IQS = 180^\circ - \angle IQP = 180^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

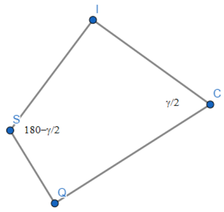
Ponieważ suma kątów w trójkącie $\angle IQS$ jest równa 180°, to

$$\angle ISO = 180^\circ - \angle QIS - \angle IQS = 180^\circ - \frac{1}{2}(\gamma - \beta) - \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

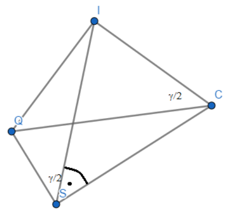
gdy $\beta < \gamma$. W drugim przypadku

$$\angle ISQ = 180^\circ - \angle QIS - \angle IQS = 180^\circ = 180^\circ - \frac{1}{2}(\beta - \gamma) - (180^\circ - \frac{\beta}{2}) = \frac{\gamma}{2}.$$

Ponadto z faktu, że IC to dwusieczna kąta $\angle ACQ$, to $\angle ICQ = \frac{\gamma}{2}$. W pierwszym przypadku dostaliśmy



oraz

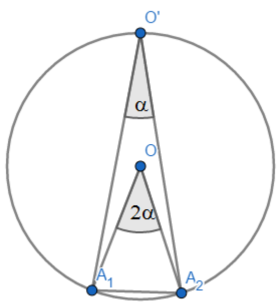


w drugim przypadku. Zatem na punktach $QSIC$ można opisać okrąg. Z twierdzenia o kątach opartych na tym samym łuku mamy

$$90^\circ = \angle IQC = ISC,$$

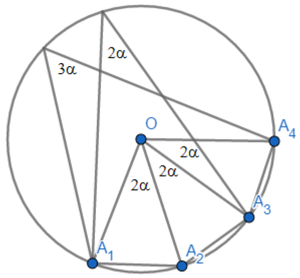
co kończy dowód.

Zadanie 20
Załóżmy, że $r > 0$ jest promieniem okręgu, w który wpisany jest nasz wielokąt, a O niech będzie jego środkiem. Niech 2α będzie kątem środkowym opartym na cięciwie A_1A_2.



Trójkąt $\Delta A_1A_2O'$ jest wpisany w nasz okrąg. Z twierdzenia sinusów

$$|A_1A_2| = 2r\sin(\alpha).$$



Analogicznie

$$|A_1A_3| = 2r\sin(2\alpha)$$

oraz

$$|A_1A_4| = 2r\sin(3\alpha).$$

Podstawiając do założenia zadania mamy

$$\frac{1}{2r\sin(\alpha)} = \frac{1}{2r\sin(2\alpha)} + \frac{1}{2r\sin(3\alpha)}.$$

Wynika stąd, że $\alpha \neq \pi k$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Pomnóżmy to równanie przez $\sin(\alpha)\sin(2\alpha)\sin(3\alpha)2r$, wówczas

$$\sin(2\alpha)\sin(3\alpha) - \sin(\alpha)\sin(3\alpha) - \sin(\alpha)\sin(2\alpha) = 0,$$

stąd

$$\sin(2\alpha)(\sin(3\alpha) - \sin(\alpha)) - \sin(\alpha)\sin(3\alpha) = 0.$$

Z tożsamości trygonometrycznej $\sin(x) - \sin(y) = 2\sin(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2})$, otrzymujemy

$$\sin(2\alpha)2\sin(\alpha)\cos(2\alpha) - \sin(\alpha)\sin(3\alpha) = 0.$$

Z tożsamości $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$, mamy

$$\sin(\alpha)\sin(4\alpha) - \sin(\alpha)\sin(3\alpha) = 0,$$

stąd

$$\sin(\alpha)(\sin(4\alpha) - \sin(3\alpha)) = 0.$$

Ponownie z pierwszej tożsamości trygonometrycznej

$$2\sin(\alpha)\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{7\alpha}{2}) = 0.$$

Gdy $\sin(\alpha) = 0$, to $\alpha \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, a ten przypadek wykluczyliśmy.
Jeśli natomiast $\sin(\frac{\alpha}{2}) = 0$, to $\alpha \in \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \subset \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, ta możliwość też jest już wykluczona.
Ostatni przypadek, to $\cos(\frac{7\alpha}{2}) = 0$, stąd $\frac{7\alpha}{2} \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, czyli $\alpha \in \{\frac{1+2k}{7}\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
Ponieważ $n \geqslant$, to $2\alpha \leqslant \frac{2\pi}{4}$, zatem $\alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$ i oczywiście $\alpha > 0$. Gdy $k = 0$, to

$$\alpha = \frac{1}{7}\pi < \frac{\pi}{4},$$

natomiast dla $k = 1$

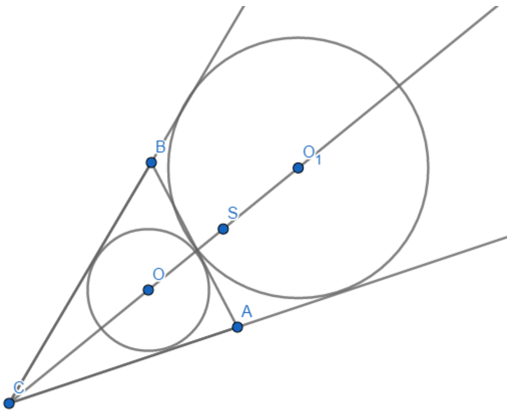
$$\alpha = \frac{3}{7}\pi > \frac{\pi}{4},$$

taka sama nierówność będzie zatem zachodziła również dla większych k. Ostatecznie $2\alpha = \frac{2}{7}\pi$, a stąd

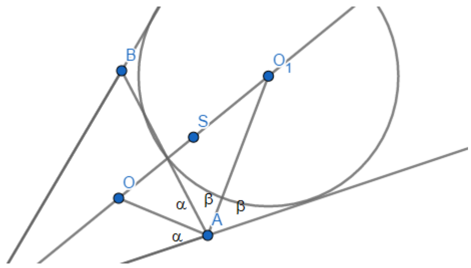
$$n = \frac{2\pi}{2\alpha} = 7.$$

Rozważany wielokąt foremny jest więc siedmiokątem.

Zadanie 21



Oznaczmy przez S środek odcinka łączącego środki okręgów jak w zadaniu. Oczywiście oba okręgi są wpisane w kąt $\angle ACB$ zatem O oraz O_1 leżą na dwusiecznej tego kąta. Ponieważ okrąg o środku O jest wpisany w trójkąt ΔABC, to również AO jest dwusieczną kąta $\angle BAC$. Okrąg o środku O_1 jest wpisany w kąt przyległy do kąta $\angle BAC$, zatem AO_1 jest jego dwusieczną. Niech $\alpha = \angle CAO$, a $\beta = \angle BAO_1$ tak jak na rysunku poniżej.



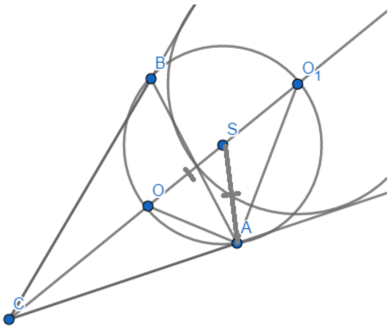
Wówczas

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ,$$

zatem

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Wynika stąd, że ΔO_1AO jest trójkątem prostokątnym, a S jest środkiem boku przeciwległego do kąta prostego, zatem środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



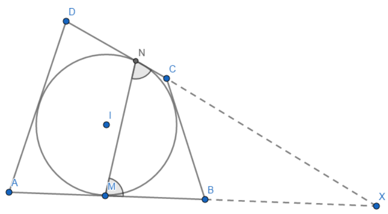
Zatem $|SA| = |SO|$ i trójkąt ΔOSA jest równoramienny, stąd $\angle AOS = \angle SAO$. Pokażemy, że $\angle ASC = \angle ABC$ z czego wynikać będzie, że na czworokącie $CASB$ można opisać okrąg i to zakończy dowód. Mianowice

$$\angle ASC = \angle ASO = 180° - (\angle SAO + \angle AOS) = 180° - 2\angle SOA$$

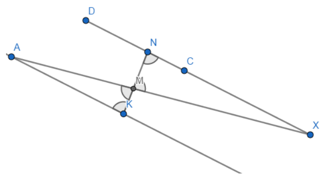
$$= 180° - 2(180° - \angle COA) = 180° - 2(\angle OCA + \angle OAC) = 180° - \angle BCA - \angle BAC = \angle ABC.$$

Zadanie 22

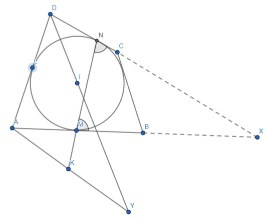
Skoro $\angle BAD + \angle ADC < 180°$, to proste AB i CD przecinają się. Oznaczmy ten punkt przez X. Zauważmy, że punkt X leży po tej samej stronie prostej MN co punkty B i C. Kąt $\angle XMN$ jest kątem ostrym ponieważ leży przy podstawie trójkąta równoramiennego ΔXNM, a stąd kąt $\angle NMA$ jest rozwarty.



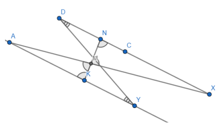
Zatem punkt M leży pomiędzy punktami K i N. Ponadto, z równoramienności trójkątów ΔAMK i ΔXMN wynika, że $\angle MKA = \angle AMK = \angle XMN = \angle MNX$, a stąd prosta AK jest równoległa do prostej CD.



Niech Y będzie punktem przecięcia prostych AK i DI, zaś L - punktem styczności okręgu I i odcinka AD.



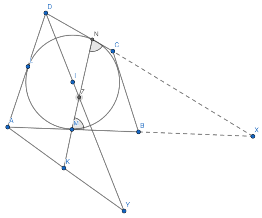
Punkty K i Y leżą na prostej AK po tej samej stronie punktu A, bo dwusieczna DI i półprosta AK leżą po tej samej stronie odcinka AD. Wtedy $\angle ADY = \angle YDC = \angle DYA$, ponieważ DI jest dwusieczną kąta $\angle ADX$ oraz $AK||CD$.



Wobec tego $AY = AD = AL + LD > AL = AM = AK$, więc K leży między A i Y. Wtedy $AL = AM$ oraz $DL = DN$. Stąd zachodzą równości:

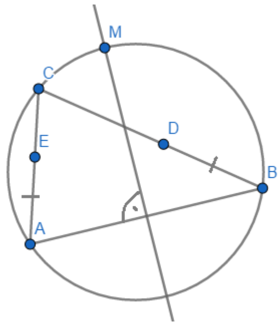
$$DN = DL = AD - AL = AY - AM = AY - AK = KY.$$

Oznaczmy punkt przecięcia prostych MN i DI przez Z.

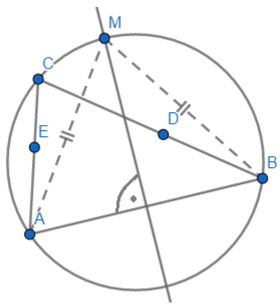


Trójkąty ΔDNZ i ΔYKZ są podobne, bo mają takie same kąty ($\angle KZY = \angle NZD$ oraz $\angle ZDN = \angle ZYK$). Jednakże $DN = KY$, więc trójkąty te są przystające. Zatem $NZ = ZK$, co oznacza, że DI przechodzi przez środek KN.

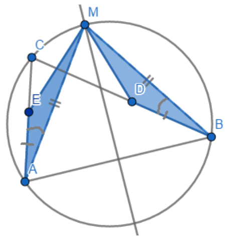
Zadanie 23



Oznaczyliśmy przez M punkt przecięcia symetralnej odcinka AB z okręgiem opisanym na ΔABC. Wówczas trójkąt ΔAMB jest trójkątem równoramiennym.

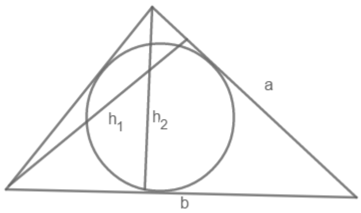


Zauważmy, że $\angle CAM = \angle CBM$ gdyż są to kąty oparte na tym samym łuku.



Wynika stąd, że na mocy cechy podobieństwa "bok-kąt-bok" trójkąty ΔAEM, ΔBDM są przystające, w szczególności $|EM| = |DM|$. Zatem trójkąt ΔEDM jest trójkątem równoramiennym, stąd M jest punktem przecięcia symetralnej odcinka ED, co należało dowieść.

Zadanie 24



Przyjmijmy, że h_1 jest wysokością padającą na bok a, natomiast h_2 wysokością padającą na bok b oraz okrąg wpisany w ten trójkąt ma promień r. Przez p oznaczmy połowę obwodu trójkąta, a przez S jego pole. Wówczas

$$S = rp = \frac{ah_1}{2} = \frac{bh_2}{2}.$$

Nierówność z treści zadania przemnóżmy przez $2S$. Wówczas

$$\frac{2S}{2r} < \frac{2S}{h_1} + \frac{2S}{h_2} < \frac{2S}{r}.$$

Zauważmy, że

$$\frac{S}{r} = p = \frac{a+b+c}{2},$$

$$\frac{2S}{h_1} = a$$

natomiast

$$\frac{2S}{h_2} = b.$$

Zatem nierówność można równoważnie zapisać w postaci

$$\frac{a+b+c}{2} < a+b < a+b+c.$$

Druga nierówność jest oczywista, gdyż $c > 0$. Gdy pierwszą pomnożymy przez 2 otrzymamy

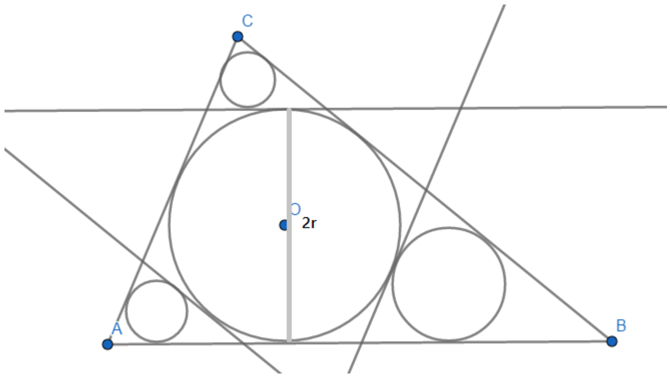
$$a+b+c < 2a+2b,$$

zatem

$$c < a + b,$$

co jest warunkiem koniecznym na powstanie trójkąta i kończy dowód.

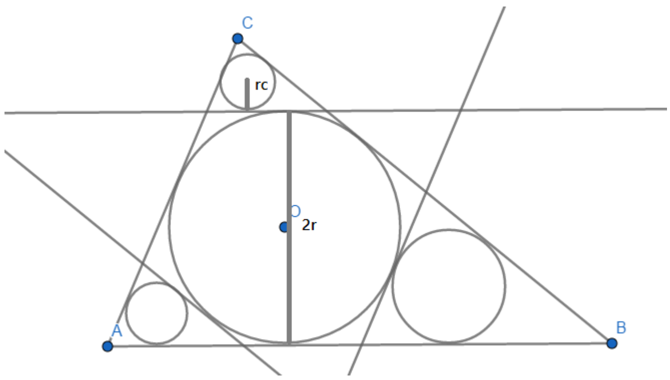
Zadanie 25



Zauważmy, że z równoległości prostych do boków i z twierdzenia Talesa wynika, że wszystkie cztery trójkąty są podobne. Rysunki będziemy prowadzić uwzględniając tylko trójkąt przy wierzchołku C gdyż reszta jest analogiczna. Oznaczmy przez P pole ΔABC. Wówczas

$$P = \frac{1}{2}(|AB| + |BA| + |CA|)r.$$

Przez $r_A, r_B, , r_C$ oznaczmy promienie okręgów wpisanych w trójkąty narożne przy odpowiednich wierzchołkach, a h_A, h_B, h_C wysokości trójkąta ΔABC wychodzące z odpowiednich wierzchołków.



Ponieważ trójkąty te są podobne to stosunki długości promieni są równe stosunkom długości wysokości. Zauważmy, że wysokość narożnego trójkąta przy wierzchołku C jest równa

$$h_C - 2r,$$

co wynika z równoległości prostych. Zatem

$$\frac{r_C}{r} = \frac{h_C - 2r}{h_C} = 1 - \frac{2r}{h_C},$$

a ponieważ $P = \frac{1}{2}|AB|h_c$, to

$$\frac{r_C}{r} = 1 - \frac{|AB|r}{P}.$$

W analogiczny sposób otrzymujemy

$$\frac{r_A}{r} = 1 - \frac{|BC|r}{P}$$

oraz

$$\frac{r_B}{r} = 1 - \frac{|CA|r}{P}.$$

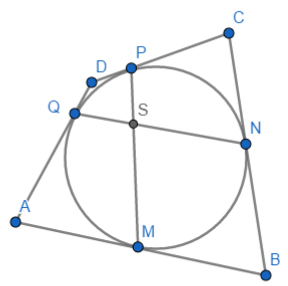
Otrzymujemy zatem

$$\frac{r_A + r_B + r_C}{r} = 1 - \frac{|AB|r}{P} + 1 - \frac{|BC|r}{P} + 1 - \frac{|CA|r}{P} = 3 - \frac{|AB| + |BC| + |CD|}{P} = 3 - \frac{2P}{P} = 1.$$

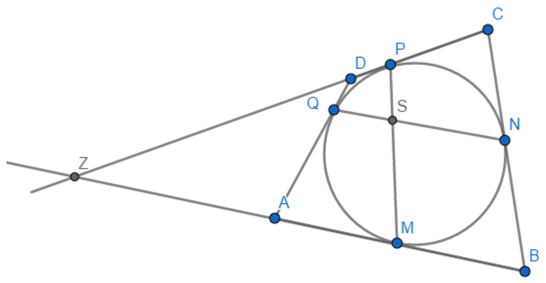
Ostatecznie

$$r = r_A + r_B + r_C.$$

Zadanie 26



Przyjmujemy oznaczenie takie jak na rysunku, tzn. $ABCD$ jest naszym czworokątem, punkty M, N, P, Q są punktami styczności boków czworokąta do okręgu wpisanego w niego, S jest punktem przecięcia cięciw PM, NQ. Jeśli proste AB, DC są równoległe, to $\angle AMS = \angle SPD = 90°$. Załóżmy, że tak nie jest i niech Z będzie punktem przecięcia prostych AB i DC.



Z twierdzenia o stycznych $|ZM| = |ZP|$, zatem trójkąt ΔMZP jest trójkątem rónoramiennym, w szczególności

$$\angle AMS = \angle SPD.$$

Analogiczne rozważania prowadzą nas to stwierdzenia, że

$$\angle SQD = \angle SNC.$$

W szczególności

$$\angle AQS = 180^\circ - \angle SQD = 180^\circ - \angle SNC = \angle SNB.$$

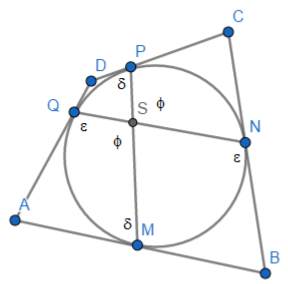
Przyjmijmy oznaczenia

$$\delta = \angle AMS = \angle SPD,$$

$$\epsilon = \angle AQS = \angle SNB$$

oraz

$$\phi = \angle MSQ = \angle NSP.$$



Wówczas w czworokącie $AMSQ$ zachodzi związek

$$\angle QAM = 360^\circ - \phi - \delta - \epsilon.$$

Natomiast w czworokącie $CNSP$ wykorzystując fakt, że $\angle SPC = 180^\circ - \delta$ oraz $\angle SNC = 180^\circ - \epsilon$, mamy

$$\angle PCN = 360^\circ - (180^\circ - \delta) - (180^\circ - \epsilon) - \phi = \delta + \epsilon - \phi.$$

Stąd

$$\angle DAM + \angle DCB = \angle QAM + \angle PCN = 360^\circ - 2\phi.$$

Na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy kiedy suma przeciwległych kątów tworzy kąt półpełny, tzn.

$$\angle DAM + \angle DCB = 180^\circ,$$

to zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

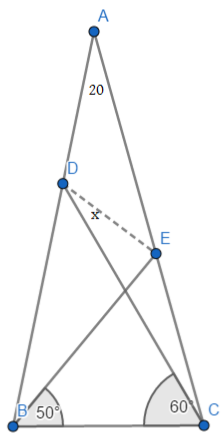
$$360^\circ - 2\phi = 180^\circ,$$

wtedy i tylko wtedy gdy

$$\phi = 90^\circ,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 27



Oznaczmy przez $x = \angle EDC$. Ponieważ trójkąt ΔABC jest trójkątem równoramiennym oraz kąt rozwarcia to 20°, to

$$\angle ACB = \angle ABC = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ.$$

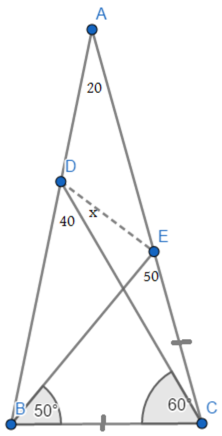
Ponieważ suma kątów w trójkącie $\angle DCB$ jest równa 180°, to

$$\angle CDB = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ.$$

Podobnie w trójkącie ΔCEB

$$\angle CEB = 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ = \angle EBC,$$

zatem trójkąt ΔEBC jest trójkątem równoramiennym, stąd $|BC| = |CE|$.



W trójkątach ΔDCE, ΔDCB zachodzą następujące stosunki

$$\frac{DC}{CE} = \frac{DC}{CB},$$

co przekłada się na sinusy przeciwległych kątów w następujący sposób

$$\frac{\sin(\angle DEC)}{\sin(\angle CDE)} = \frac{\sin(\angle DBC)}{\sin(\angle CDB)}.$$

Zauważmy, że $\angle DEC = 180^\circ - x - 20^\circ$ oraz $\angle CDE = x$, stąd

$$\frac{\sin(180^\circ - x - 20^\circ)}{\sin(x)} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ},$$

zatem

$$\frac{\sin(x + 20^\circ)}{\sin(x)} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}.$$

Zauważmy, że z tożsamości $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$, mamy

$$\frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{\cos 40^\circ}{\frac{1}{2}} = \frac{\cos 40^\circ}{\sin 30^\circ} =$$

$$= \frac{\sin(90^\circ - 40^\circ)}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ}.$$

Otrzymujemy, że

$$\frac{\sin(x + 20^\circ)}{\sin(x)} = \frac{\sin(50^\circ)}{\sin 30^\circ},$$

zatem

$$\sin(x + 20^\circ)\sin 30^\circ = \sin 50^\circ \sin(x).$$

Korzystając z tożsamości $\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$, mamy

$$\frac{\cos(x - 10^\circ) + \cos(x + 50^\circ)}{2} = \frac{\cos(50^\circ - x) + \cos(x + 50^\circ)}{2},$$

stąd

$$\cos(x - 10^\circ) = \cos(50^\circ - x).$$

Wynika stąd

$$x - 10^\circ = 2k\pi + 50^\circ - x, \quad k \in \mathbb{Z},$$

czyli

$$x = k\pi + 30^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ponieważ $0 < x < 180^\circ$, to $x = 30^\circ$.

ZADANIE 28

Przed przystąpieniem do rozwiązania udowodnimy następujące twierdzenie (znane jako twierdzenie o cięciwach).

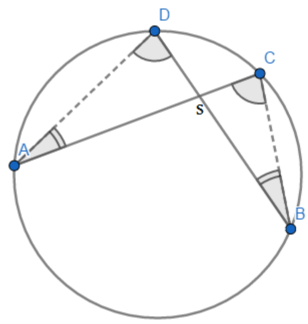
Twierdzenie

Jeśli w okręgu cięciwy AC oraz BD przecinają się w punkcie S, to

$$|AS| \cdot |SC| = |BS| \cdot |SD|.$$

Odwrotnie, jeśli dwa odcinki AC, BD przecinają się w punkcie S i spełniają powyższą zależność, to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Dowód. Załóżmy, że punkty AC, BD są cięciwami w okręgu i przecinają się w punkcie S.



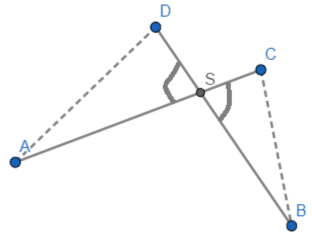
Kąty $\angle BSC$ oraz $\angle ASD$ są kątami wierzchołkowymi, zatem są sobie równe. Kąty $\angle DBC$ oraz $\angle CAD$ są kątami opartymi na tym samym łuku, zatem są sobie równe. Również $\angle ADB$ oraz $\angle ACB$, to kąty oparte na tym samym łuku, zatem równe sobie. W konsekwencji trójkąty ΔASD, ΔBSC są trójkątami podobnymi, stąd

$$\frac{|BS|}{|SC|} = \frac{|AS|}{|SD|}.$$

Ostatecznie

$$|AS| \cdot |SC| = |BS| \cdot |SD|.$$

Załóżmy teraz, że odcinki AC, BD przecinają się w punkcie S i powyższa zależność jest spełniona.



Kąty $\angle BSC$ oraz $\angle ASD$ jako wierzchołkowe są sobie równe. A ponieważ

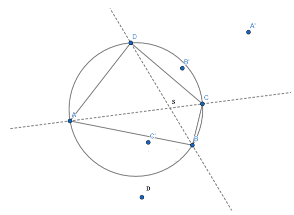
$$|AS| \cdot |SC| = |BS| \cdot |SD|,$$

czyli

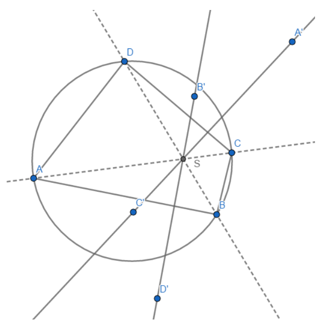
$$\frac{|BS|}{|SC|} = \frac{|AS|}{|SD|},$$

to trójkąty ΔBSC oraz ΔASD są podobne ("bok-kąt-bok"). Ostatecznie $\angle ACB = \angle SCB = \angle ADS = \angle ADB$, zatem na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Rozwiązanie zadania.



Ponieważ $A'C'$ jest obrazem poprzez symetrię AC względem BD, a proste te przecinają sie w punkcie S, to punkt ten leży na odcinku $A'C'$. Podobnie, ponieważ $B'D'$ jest obrazem poprzez symetrię AC względem BD, a proste te przecinają sie w punkcie S, to punkt ten leży na odcinku $B'D'$. W konsekwencji odcinki $A'C'$ oraz B', D' przecinają sie w punkcie S.



Z twierdzenia o cięciwach dla czworokąta $ABCD$ mamy

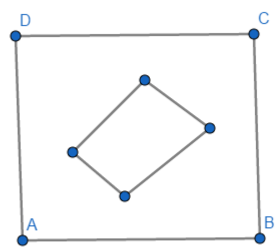
$$|AS| \cdot |SC| = |BS| \cdot |SD|.$$

Jesnak A' jest obrazem A przez symetrię, a jej środek to punkt S zatem $A'S = AS$, podobnie $B'S = BS$, $C'S = CS$ oraz $D'S = DS$. W konsekwencji

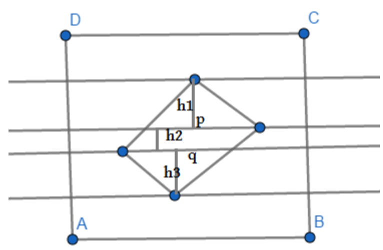
$$|A'S| \cdot |SC'| = |B'S| \cdot |SD'|.$$

Z twierdzenia o cięciwach mamy, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Zadanie 29
Rozpatrzmy przypadek na rysunku poniżej, a potem sprowadzimy go do ogólnego.



Przez każdy wierzchołek czworokąta wypukłego prowadzimy proste równoległe do odcinka AB.



Nasz czworokąt wypukły został podzielony na trzy figury - dwa trójkąty odpowiednio o podstawach p, q i wysokościach h_1, h_3 oraz trapez o wysokości h_2 i podstawach p, q. Z faktu, że pole naszej figury jest niemniejsze niż $\frac{1}{2}$ otrzymujemy

$$\frac{1}{2}h_1 p + \frac{1}{2}h_3 q + \frac{1}{2}h_2(p+q) \geqslant \frac{1}{2},$$

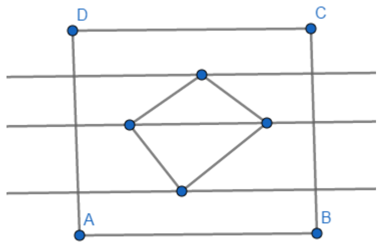
stąd

$$p(h_1 + h_2) + q(h_2 + h_3) \geqslant 1.$$

Suma dwóch wysokości jest nie większa od boku kwadratu, który ma długość 1 zatem

$$1 \leqslant p(h_1 + h_2) + q(h_2 + h_3) \leqslant p + q.$$

Zatem $1 \leqslant p + q$, skąd wynika, że $p \geqslant \frac{1}{2}$ lub $q \geqslant \frac{1}{2}$. Kolejny przypadek jest przedstawiony na rysunku poniżej



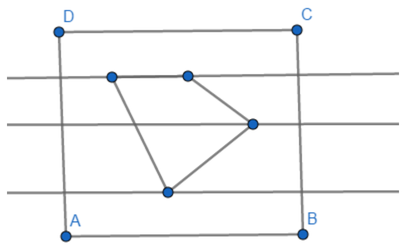
Wówczas $p = q$ oraz $h_2 = 0$. Wstawiając do naszej nierówności otrzymujemy

$$\frac{1}{2}h_1 p + \frac{1}{2}h_3 p \geqslant \frac{1}{2},$$

zatem

$$(h_1 + h_2)p \geqslant 1,$$

ponieważ $h_1 + h_2 \leqslant 1$, stąd $1 \leqslant p$, czyli $p = 1$, zatem teza jest spełniona. Kolejny przypadek to



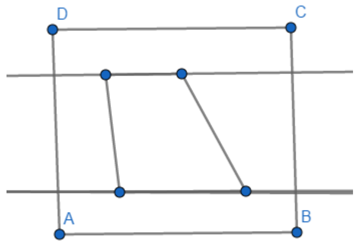
Tym razem $h_1 = 0$, wstawiając do naszej nierówności

$$\frac{1}{2}h_3 q + \frac{1}{2}h_2(p + q) \geqslant \frac{1}{2},$$

zatem

$$1 \leqslant (h_2 + h_3)q + h_2 p \leqslant p + q,$$

stąd $p \geqslant \frac{1}{2}$ lub $q \geqslant \frac{1}{2}$. Ostatni przypadek (gdyż, reszta jest symetryczna), to



Wówczas $h_1 = 0 = h_3$, zatem

$$\frac{1}{2}(p+q)h_2 \geqslant \frac{1}{2},$$

czyli

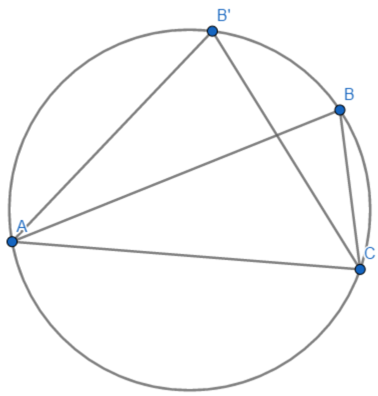
$$1 \leqslant (p+q)h_2 \leqslant p+q,$$

wynika stąd, że $p \geqslant \frac{1}{2}$ lub $p \geqslant \frac{1}{2}$.

Zadanie 30
Przed rozwiązaniem zadania udowodnimy następujące twierdzenie:
Twierdzenie
Jeśli ΔABC jest trójkątem wpisanym w okrąg, a B' jest środkiem łuku AC zawierającym punkt B, to

$$|AB| \cdot |BC| \leqslant |AB'| \cdot |B'C|.$$

Dowód.



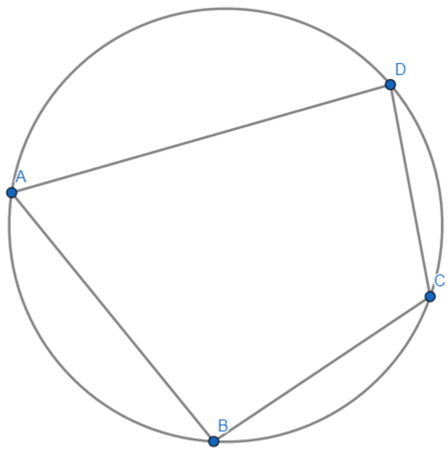
Zauważmy, że punkt B' jest punktem najbardziej oddalonym od odcinka AC na łuku AC. Wynika stąd, że pole trójkąta ΔABC jest nie większe od pola trójkąta $\Delta AB'C$. Zauważmy ponadto, że kąty $\angle ABC$ oraz $\angle AB'C$ są sobie równe jako kąty oparte na tym samym łuku, oznaczmy ich miarę przez α. Wówczas

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sin\alpha|AB| \cdot |BC| \leqslant \frac{1}{2}\sin\alpha|AB'| \cdot |B'C| = P_{\Delta AB'C},$$

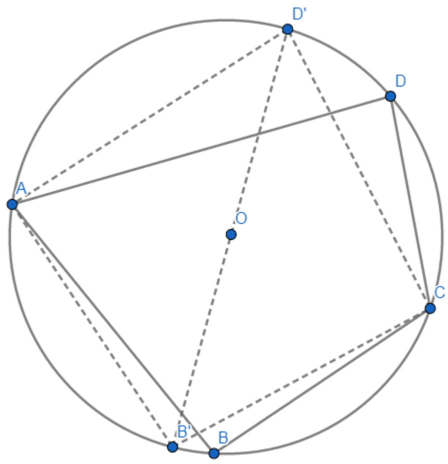
ostatecznie

$$|AB| \cdot |BC| \leqslant |AB'| \cdot |B'C|.$$

Rozwiązanie zadania.
Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym wpisanym w okrąg o promieniu 1.



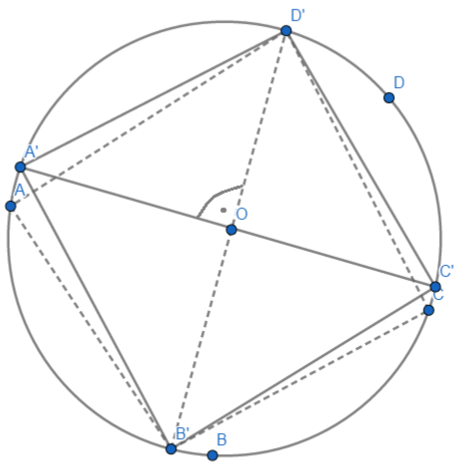
Niech D' będzie środkiem łuku AC zawierającego punkt D, natomiast B' środkiem łuku AC zawierającego punkt B. Wówczas odcinek $D'B'$ jest średnicą naszego okręgu.



Wykorzystując twierdzenie wstępne otrzymujemy

$$|AB| \cdot |BC| \cdot |AD| \cdot |DC| \leqslant |AB'| \cdot |B'C| \cdot |AD'| \cdot |D'C|.$$

Niech teraz A' będzie środkiem łuku $D'B'$ zawierającego punkt A, natomiast C' środek łuku $D'B'$ zawierającego punkt C.



Wówczas czworokąt $A'B'C'D'$ jest kwadratem, gdyż jego boki to cięciwy oparte na łukach tej samej długości, a z doboru A', C' przekątne przecinają sie pod kątem prostym. Z wstępnego twierdzenia

$$|AB'| \cdot |B'C| \cdot |AD'| \cdot |D'C| \leqslant |A'B'| \cdot |B'C'| \cdot |A'D'| \cdot |D'C'|.$$

Ponieważ nasz okrąg ma promień 1, to przekątna kwadratu ma długość 2, wynika stąd, że

$$|A'B'| = |B'C'| = |A'D'| = |D'C'| = \sqrt{2}.$$

Ostatecznie

$$|AB| \cdot |BC| \cdot |AD| \cdot |DC| \leqslant |AB'| \cdot |B'C| \cdot |AD'| \cdot |D'C|$$

$$\leqslant |AB'| \cdot |B'C| \cdot |AD'| \cdot |D'C| \leqslant |A'B'| \cdot |B'C'| \cdot |A'D'| \cdot |D'C'| = (\sqrt{2})^4 = 4,$$

co kończy dowód.