ZBIÓR WYBRANYCH ZADAŃ OLIMPIJSKICH
DZIAŁ: KOMBINATORYKA I LOGIKA

Spis treści

Wstęp

W tym zbiorze zadań studenci drugiego roku matematyki studiów drugiego stopnia postanowili zaproponować 30 wybranych zadań olimpijskich z zakresu kombinatoryki i logiki. Większość z nich pochodzi z różnych etapów olimpiad matematycznych (ozn. OM). Część została zapożyczona z olimpiad matematycznych juniorów (ozn. OMJ), ale również z zawodów matematycznych szkół ponadgimnazjalnych (ozn. ZM).

Poziomy zaproponowanych zadań przebiegają od tych „najłatwiejszych" poprzez „średnio - trudne", aż w końcu dobiegają do tych „bardzo trudnych". Metody ich rozwiązywania są różnorodne i często wymagają większego skupienia, ale zostały opisane szczegółowo, aby każdy potencjalny Czytelnik mógł sobie z nimi swobodnie poradzić.

1 Zadania z rozwiązaniami

Zadanie 1 (11 OM etap III, zadanie 5)**.**
Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ utworzono wszystkie możliwe liczby 4 cyfrowe o różnych cyfrach. Jaka jest suma tych liczb?

Rozwiązanie 1.
Na początku zauważmy, że wszystkich liczb 4 cyfrowych o różnych cyfrach mamy

$$\underline{9} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024.$$

Dla każdej liczby $a \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$ znajdziemy liczbę $b \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$, której cyfry dopełniają odpowiednie cyfry liczby a do dziesięciu, np. $a = 1234$ i $b = 9876$. Wszystkie liczby z powyższego zbioru cyfr można zatem połączyć w pary, zaliczając do tej samej pary takie dwie liczby,których odpowiednie cyfry dają w sumie 10. Wszystkich takich par mamy $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1512$.

Policzymy przykładowo sumę liczb jednej takiej pary. Wynosi ona

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 111} \\ 1234 \\ +\ 9876, \\ \hline 11110 \end{array}$$

czyli innymi słowy $1000 \cdot 10 + 100 \cdot 10 + 10 \cdot 10 = 11110$.

Stąd suma wszystkich liczb utworzonych z rozważanego przez nas zbioru jest równa

$$\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 11110 = 16798320.$$

Zadanie 2 (66 OM etap III, zadanie 3)**.**
Znaleźć największą liczbę naturalną m o takiej własności, że wśród 500 elementowych podzbiorów zbioru $\{1, ..., 1000\}$ istnieją dwa zbiory, których część wspólna liczy co najmniej m elementów.

Rozwiązanie 2.
Wybieramy $A_1, A_2, ..., A_5$ takie, że

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i \in A_j \\ 0, & \text{gdy } i \neq A_j \end{cases},$$

dla $i \in \{1, ..., 1000\}$, $j \in \{1, ..., 5\}$.
Ponieważ zbiory są 500 elementowe, to mamy

$$a_{1j} + a_{2j} + ... + a_{1000j} = 500 \quad \text{dla } j \in \{1, ..., 5\}.$$

Zdefiniujmy S_i następująco

$$S_i := a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{i5} \quad \text{dla } i \in \{1, ..., 1000\}. \tag{1}$$

Stąd

$$S_1 + ... + S_{1000} = 2500,$$

gdyż każdy ma 500 elementów.
Ponadto

$$\begin{aligned} S_i^2 &= a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + ... + a_{i5}^2 + 2(a_{i1}a_{i2} + a_{i1}a_{i3} + ... + a_{i4}a_{i5}) = \\ &= a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{i5} + 2(a_{i1}a_{i2} + a_{i1}a_{i3} + ... + a_{i4}a_{i5}) = \\ &= S_i + 2(a_{i1}a_{i2} + a_{i1}a_{i3} + ... + a_{i4}a_{i5}). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$S_i^2 - S_i = 2(a_{i1}a_{i2} + a_{i1}a_{i3} + ... + a_{i4}a_{i5}) \tag{2}$$

oraz

$$a_{ij}a_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i \in A_j \cap A_k \\ 0, & \text{gdy } i \neq A_j \cap A_k \end{cases}.$$

Zatem

$$|A_j \cap A_k| = a_{1j}a_{1k} + a_{2j}a_{2k} + ... + a_{1000j}a_{1000k}.$$

A stąd

$$\begin{aligned} |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + ... + |A_4 \cap A_5| &\overset{(2)}{=} \frac{1}{2}(S_1^2 - S_1 + S_2^2 - S_2 + ... + S_{1000}^2 - S_{1000}) = \\ &= \frac{1}{2}((S_1 - 2)(S_1 - 3) + (S_2 - 2)(S_2 - 3) + ... + \\ &+ (S_{1000} - 2)(S_{1000} - 3)) + \frac{1}{2}(4S_1 - 6 + 4S_2 - \\ &- 6 + ... + 4S_{1000} - 6) = \\ &= \frac{1}{2}((S_1 - 2)(S_1 - 3) + (S_2 - 2)(S_2 - 3) + ... + \\ &+ (S_{1000} - 2)(S_{1000} - 3)) + \\ &+ \frac{1}{2}(4 \cdot \underbrace{(S_1 + S_2 + ... + S_{1000})}_{=2500} - 6 \cdot 1000) \overset{(1)}{=} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}((S_1 - 2)(S_1 - 3) + (S_2 - 2)(S_2 - 3) + ... + (S_{1000} - 2)(S_{1000} - 3))}_{\geq 0, \text{ bo } S_i \in \{0,...,5\}} + \\ &+ 2000 \geq 2000. \end{aligned}$$

Zauważmy, że wyżej otrzymamy równość wtedy i tylko wtedy, gdy $S_i = 2$ lub $S_i = 3$ dla $i \in \{1, ..., 1000\}$.

Ponadto takich przekrojów mamy $\binom{5}{2} = 10$, więc co najmniej jeden przekrój ma $\left\lfloor \frac{2000}{10} \right\rfloor = 200$ elementów, czyli $m \geq 200$.

Pokażemy teraz, że można zdefiniować takie $A_1, ..., A_5$, że $|A_j \cap A_k| = 200$. Przede wszystkim muszą zostać spełnione następujące warunki

i) $a_{1j} + ... + a_{100j} = 500$ dla $j \in \{1, ..., 5\}$

ii) $a_{1j}a_{1k} + a_{2j}a_{2k} + ... + a_{1000j}a_{1000k} = 200$ dla $\{j, k\} \subset \{1, ..., 5\}$.

W związku z powyższym elementy te definiujemy następująco

a_{ij}	1	2	3	4	5
1	1	1	1	0	0
2	0	1	1	1	0
3	0	0	1	1	1
4	1	0	0	1	1
5	1	1	0	0	0
6	1	0	1	0	0
7	0	1	0	1	0
8	0	0	1	0	1
9	1	0	0	1	0
10	0	1	0	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dla 10 wierszy zapisanych wyżej suma każdej kolumny będzie równa 5, a suma iloczynu dowolnych dwóch kolumn będzie równa 2. Na przykład iloczyn kolumn

$$\text{I kolumna} \times \text{II kolumna} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pozostałe wyrazy macierzy definiujemy w następujący sposób

$$a_{10+i,j} = a_{i,j} \text{ dla } i \in \{1, ..., 990\}.$$

Zatem w miejscu kropek jeszcze 100 razy napiszemy 10 tych samych wierszy. Da nam to sumę wierszy $5 \cdot 100$ oraz sumy iloczynów kolumn $2 \cdot 100$. Tak więc spełnione są wyżej postawione warunki, czyli znaleźliśmy 5 zbiorów mających po 200 elementów w każdym z ich przekrojów. Zakodowane w ten sposób zbiory odczytujemy w następujący sposób

$$A_1 = \{1, 4, 5, 6, 9, 11, 14, ...\}, A_2 = \{1, 2, 5, 7, 10, 11, 12, \dots\}, \dots, \text{ itd.}$$

Pokazuje to, że dla $m > 200$ własność z treści zadania nie jest spełniona.

Zadanie 3 (54 OM etap I, zadanie 10)**.**
Mamy talię 52 kart. Tasowaniem będziemy nazywać wykonanie następujących czynności: dowolny podział talii na część górną i dolną, a następnie dowolne zmieszanie kart z zachowaniem porządku w obrębie każdej części. Mówiąc formalnie, tasowaniem jest dowolne przemieszanie kart, w którym i-ta karta od wierzchu przechodzi na pozycję p_i, przy czym istnieje takie $m \in \{1, 2, 3, ..., 51\}$, że $p_i < p_{i+1}$ dla $i < m$ oraz dla $i > m$. Rozstrzygnąć, czy rozpoczynając od ustalonego początkowego uporządkowania kart, można uzyskać każde inne uporządkowanie wykonując pięć tasowań.

Rozwiązanie 3.
Istnieje $m \in \mathbb{N}$ w zbiorze

$$1, 2, 3, \underset{\substack{\downarrow \\ m}}{\cdots}, 52.$$

Dzielimy 52 karty na dwie szufladki (dolną i górną) względem m

$$\underline{1, 2, 3, \cdots, m} \quad \underline{m+1, m+2, \cdots, 52}.$$

Zamieniamy je ze sobą oraz na mocy zasady szufladkowej Dirichleta wnosimy, że do jednej z szufladek trafi co najmniej $\left\lfloor \frac{52}{2} \right\rfloor$ 26 kart w niezmienionej pozycji, tzn.

$$\underbrace{m+1, m+2, \cdots, 51, 51}_{\text{pozostałe}} \qquad \underbrace{1, 2, \cdots, m-1, m}_{\text{co najmniej 26 w niezmienionej pozycji}} \qquad .$$

Prowadząc analogiczne rozumowanie otrzymamy, że podczas

- drugiego losowania co najmniej 13 kart pozostaje w niezmienionej pozycji;
- trzeciego losowania co najmniej 7 kart pozostaje w niezmienionej pozycji;
- czwartego losowania co najmniej 4 karty pozostają w niezmienionej pozycji;
- piątego losowania co najmniej 2 karty pozostają w niezmienionej pozycji.

A zatem odpowiedź na pytanie brzmi nie.

Zadanie 4 (21 OM etap III, zadanie 5)**.**
Na ile sposobów zbiór złożony z dwunastu elementów można podzielić na sześć rozłączonych zbiorów dwuelementowych?

Rozwiązanie 4.
Oznaczmy jeden z elementów rozważanego zbioru przez a_1. Podzbiór dwuelementowy zawierający owy element możemy utworzyć na 11 sposobów. Mianowicie dokładając do elementu a_1 jeden z pozostałych jedenastu elementów.

W kolejnym kroku przez a_2 oznaczmy jeden z elementów zbioru 10-elementowego, który pozostał po utworzeniu zbioru dwuelementowego zawierającego element a_1. Podzbiór dwuelementowy zawierający element a_2 można teraz utworzyć na 9 sposobów, czyli dokładając jeden z pozostałych dziewięciu elementów do elementu a_2.

Prowadząc dalej analogiczne rozumowanie otrzymujemy, że szukana liczba wynosi

$$11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 10395.$$

Zadanie 5 (22 OM etap III, zadanie 5)**.**
Znaleźć największą liczbą całkowitą A taką, że dla każdej permutacji zbioru liczb naturalnych nie większych od 100 suma pewnych 10 kolejnych wyrazów jest co najmniej równa A.

Rozwiązanie 5.
Zacznijmy od tego, że suma wszystkich liczb naturalnych nie większych od 100 jest równa

$$1 + 2 + \ldots + 100 = \frac{(1 + 100)}{2} \cdot 100 = 5050.$$

Jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ jest pewną permutacją zbioru liczb naturalnych nie większych od 100 i suma każdych 10 wyrazów tej permutacji jest mniejsza od pewnej liczby B, to w szczególności

$$\begin{array}{lcl} a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} & < & B \\ a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{20} & < & B \\ \vdots & < & \vdots \\ a_{91} + a_{92} + \ldots + a_{100} & < & B \end{array}$$

Po dodaniu nierówności stronami mamy

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = 1 + 2 + \ldots + 100 < 10B,$$

czyli $505 < B$. Stąd liczba $A \geq 505$ spełnia nierówność.

Zajmijmy się teraz permutacją $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ zbioru liczb naturalnych nie większych od 100, która jest postaci

$$100, 1, 99, 2, 98, 3, 97, 4, \ldots, 51, 50.$$

Dla uproszczenia zadania zapiszmy ją za pomocą następujących wzorów

$$a_{2n+1} = 100 - n \;\text{ dla } 0 \leq n \leq 49$$

$$a_{2n} = n \;\text{ dla } 1 \leq n \leq 50.$$

Wystarczy pokazać, że suma dowolnych kolejnych 10 wyrazów tej permutacji jest nie większa od 505. Załóżmy, że pierwszy z rozważanych wyrazów ma numer parzysty $2k$. Wówczas

$$\begin{array}{rcl} s_1 & = & a_{2k} + a_{2k+1} + \ldots + a_{2k+9} = \\ & = & (a_{2k} + a_{2k+2} + \ldots + a_{2k+8}) + (a_{2k+1} + a_{2k+3} + \ldots + a_{2k+9}) = \\ & = & (k + (k+1) + \ldots + (k+4)) + [(100 - k) + \\ & + & (100 - (k+1)) + \ldots + (100 - (k+4))] = 500. \end{array}$$

W przeciwnym wypadku, gdy pierwszy z rozważanych wyrazów ma numer nieparzysty $2k + 1$, to

$$\begin{array}{rcl} s_2 & = & a_{2k+1} + a_{2k+2} + \ldots + a_{2k+10} = \\ & = & (a_{2k} + a_{2k+1} + \ldots + a_{2k+9}) + a_{2k+10} - a_{2k} = \\ & = & s_1 + (k+5) - k = s_1 + 5 = 505. \end{array}$$

Stąd suma dowolnych 10 kolejnych wyrazów tej permutacji jest nie większa od 505. Wobec tego liczba $A \leq 505$. Zatem ostatecznie otrzymaliśmy, że $A = 505$.

Zadanie 6 (65 OM etap I zadanie 3)**.**
Na tablicy zapisano słowo „adbc”. W jednym ruchu możemy dopisać lub usunąć (na początku w środku i na końcu) palindrom parzystej długości utworzony z liter „a,b,c,d”. Rozstrzygnij czy po skończonej ilości ruchów możemy uzyskać słowo „bacd”.
(palindrom (gr. palindromeo – biec z powrotem) – wyrażenie brzmiące tak samo czytane od lewej do prawej i od prawej do lewej strony, np. „abba”.)

Rozwiązanie 6.
Zauważmy, że wyrazy „adbc” oraz „bacd” różnią się parzystością miejsca, na którym występują literki „a,b,c”. Pokażemy, że podczas tworzenia nowych słów różnica pomiędzy liczbą pozycji parzystych i nieparzystych pewnej z wymienionych wyżej liter nie ulega zmianie. Rozważmy literę „a” i przyjmijmy następujące oznaczenia:

(i) $P(\omega)$ liczba pozycji parzystych, na których występuje litera „a” w wyrazie ω.

(ii) $N(\omega)$ liczba pozycji nieparzystych, na których występuje litera „a” w wyrazie ω.

(iii) $R(\omega) = P(\omega) - N(\omega)$.

Zauważmy, że
$$R(\text{„adbc”}) = 1 \neq -1 = R(\text{„bacd”}) = -1.$$

Niech „w” i „v” będą takimi słowami, że jedno z nich powstaje przez dopisanie lub usunięcie palindromu postaci $p_1, p_2, \dots, p_k, p_k, p_{k-1}, \dots, p_1$ na drugim z nich. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że „v” jest dłuższe od „w”. Wówczas będą następującej postaci

$$\mathrm{w} = w_1, w_2, \dots, w_{2n} \text{ dla } w_i \in \{ \text{ a,b,c,d } \} \text{ dla } i \in \{1, 2, \dots, 2n\};$$
$$\mathrm{v} = \begin{cases} p_1, p_2, \dots, p_k, p_k, p_{k-1}, \dots, p_1 \ \mathrm{w}, & \text{lub} \\ \mathrm{w}p_1, p_2, \dots, p_k, p_k, p_{k-1}, \dots, p_1, & \text{lub} \\ w_1, w_2, \dots, w_n, p_1, p_2, \dots, p_k, p_k, p_{k-1}, \dots, p_1, w_{n+1}, w_{n+2}, \dots, w_{2n} \end{cases}$$

gdzie $p_i \in \{ \text{ a,b,c,d } \}, i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Podczas wykonywania ruchu litery słowa „w” albo pozostają na swoim miejscu albo są przesunięte o $2k$ pozycji. Natomiast każda z liter palindromu raz występuje na pozycji parzystej a raz nieparzystej. Stąd wniosek, że
$$R(\mathrm{v}) = R(\mathrm{w}).$$

Tak więc nie można utworzyć słowa „bacd” ze słowa „adbc” w sposób wskazany w zadaniu.

Zadanie 7 (30 IO, zadanie 6)**.**
Permutacja zbioru $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ dla $n \in \mathbb{N}$ ma własność P, gdy $\|x_i - x_{i+1}\| = n$ dla co najmniej jednego $i \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje więcej permutacji z własnością P niż bez niej.

Rozwiązanie 7.
Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ istnieje **dokładnie jeden** element $l \in \{1, 2, \dots, 2n\} \setminus \{k\}$ taki, że
$$\|l - k\| = n. \tag{3}$$

Mianowicie
$$l = \begin{cases} k-n, & \text{dla } k > n \\ k+n, & \text{dla } k \leq n. \end{cases}$$
Ponadto wiemy, że $\|l-k\| = \|k-l\|$. Tak więc jeżeli dla pewnego $i \in \{2,3,\ldots,2n-1\}$ norma $\|x_i - x_{i+1}\| = n$, to
$$\|x_{i-1} - x_i\| \neq n \quad \text{oraz} \quad \|x_{i+1} - x_{i+2}\| \neq n. \tag{4}$$
Przypomnijmy, że permutację nazwiemy bardzo dobrą, gdy dla **dokładnie jednego** $i \in \{2,3,\ldots,2n-1\}$ spełniona jest własność
$$\|x_i - x_{i+1}\| = n.$$
Przyjmijmy oznaczenia

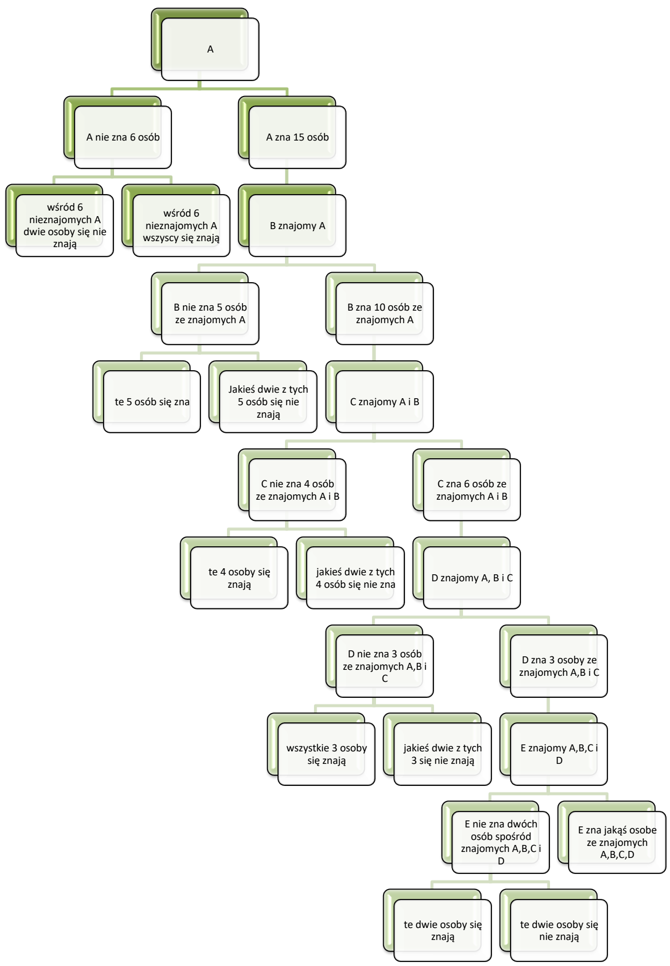
(i) A zbiór permutacji bez własności P;

(ii) B zbiór permutacji bardzo dobrych .

Wykażemy, że permutacji bardzo dobrych jest nie mniej niż permutacji bez własności P. Zauważmy najpierw, że zgodnie z własnością (3) dla permutacji $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ bez własności P istnieje dokładnie jeden element $m+1$ taki, że
$$\|x_1 - x_{m+1}\| = n.$$
Zdefiniujmy teraz funkcję $f : A \to B$ wzorem
$$f((x_1, x_2, \ldots, x_{2n})) = (y_1, y_2, \ldots, y_{2n}),$$
gdzie permutacja $(y_1, y_2, \ldots, y_{2n})$ jest postaci
$$y_i = \begin{cases} x_1 & \text{dla } i = m \\ x_{i+1} & \text{dla } i < m \\ x_i & \text{dla } i > m. \end{cases}$$
Sprawdźmy poprawność zdefiniowanej przez nas funkcji. Mianowicie, czy $f((x_1, x_2, \ldots, x_{2n})) \in B$ dla $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \in A$. Oczywiście nasza permutacja ma własność P. Pytanie brzmi, czy generuje ją dokładnie jeden element.
Istotnie, „sąsiadów" w naszej permutacji zmieniły tylko elementy wokół pozycji m, czyli $m-1, m+1$. Własność (4) gwarantuje nam, że w tych miejscach nie występuje druga para generująca własność P. Zatem $f((x_1, x_2, \ldots, x_{2n})) = (y_1, y_2, \ldots, y_{2n}) \in B$. Podsumowując nasza funkcja f przerzuca pierwszy element permutacji przed taki, z którym stworzy ona permutację bardzo dobrą.
Różnowartościowość funkcji f widać od razu. Udowodniliśmy więc, że $|A| \leq |B|$.
Aby wykazać, że nierówność jest silna wystarczy zauważyć, że dla $n = 1$ każde dwie permutacje mają własność P, natomiast dla $n > 1$ permutacja zawierająca ciąg (1324) jest permutacją z własnością P generowaną przynajmniej przez dwa elementy.

Zadanie 8.
Udowodnij, że wśród 21 osób istnieje grupa 6 osób taka, że wszystkie osoby w tej grupie znają wszystkie pozostałe osoby z tej grupy lub istnieje 3 osobowa grupa osób, w której wszystkie osoby się nie znają.

Rozwiązanie 8.
Ustalmy osobę A. Za dowód tezy zadania posłuży nam poniższy schemat, w którym rozgałęzienia interpretujemy jako spójnik logiczny „lub”.



Zadanie 9 (23 OM etap III, zadanie 5)**.**
Udowodnić, że wszystkie podzbiory zbioru skończonego można ustawić w ciąg, którego kolejne wyrazy różnią się jednym elementem.

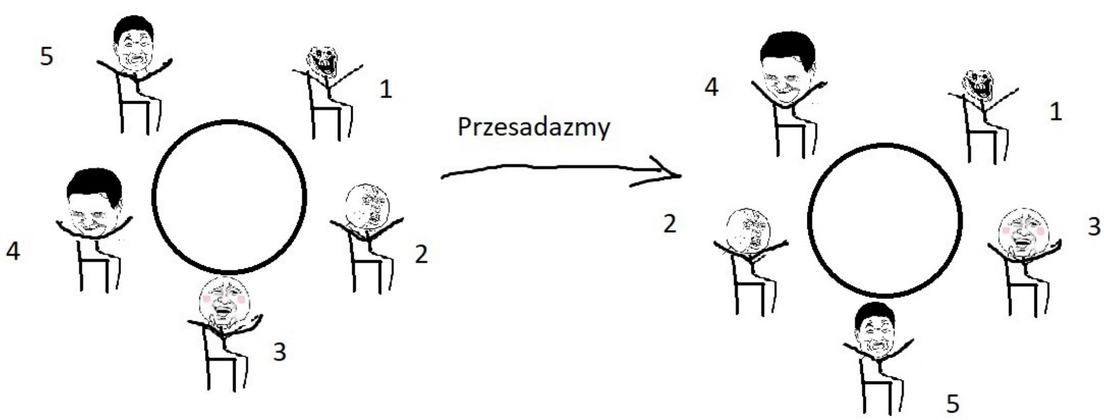
Rozwiązanie 9. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Dla $n = 1$ mamy $A_1 = \emptyset$.

Przypuśćmy, że teza zachodzi dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Ustalmy zbiór n - elementowy A i niech $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}$ będzie ciągiem podzbiorów zbioru A takim, że kolejne zbiory różnią się jednym elementem.

Dla zbioru $n+1$ elementowego postaci $A \cup \{x\}$ ciąg $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}, A_{2^n} \cup \{x\}, A_{2^n-1} \cup \{x\}, \ldots, A_1 \cup \{x\}$ jest ciągiem podzbiorów zbioru $A \cup \{x\}$, w którym dwa sąsiadujące zbiory różnią się jednym elementem.

Zadanie 10 (19 OM etap II, zadanie 3)**.**
Dowieść, że jeśli przy okrągłym stole siedzi co najmniej 5 osób, to można je przesadzić tak, że każda osoba będzie miała innych sąsiadów.

Rozwiązanie 10.
Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Fakt, że teza zachodzi dla 5 osób uzmysłowi nam poniższy rysunek. Zauważmy, że przy numerując kolejno miejsca od $1-5$, po przesadzeniu dostajemy nowy ciąg $1, 3, 5, 2, 4$.



Ciąg, w którym dwie kolejne osoby nie występują koło siebie będziemy nazywać ciągiem po przesadzeniu.

Załóżmy, że teza zachodzi dla $n \geq 5$. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będzie ciągiem po przesadzeniu. Wówczas dla $n + 1$ osób ciąg ten tworzymy w następujący sposób.
Jeżeli osoba 1 siedzi po przesadzeniu n osób na miejscu i, a osoba n na miejscu j, to $n+1$ osobę wrzucamy na pewne miejsce tak, aby nie siedziała obok osoby 1 i n tzn. dla osoby $n+1$ wybieramy dowolne miejsce z $\{1, 2, \ldots, n + 1\} \setminus \{i, j, i + 1, j + 1\}$. Natomiast osoby siedzące za tym miejscem przesuwamy o miejsce do przodu. Tak przesadzone osoby wciąż nie siedzą koło siebie.

Zadanie 11 (22 OM etap III, zadanie 6)**.**
Ktoś napisał sześć listów do sześciu osób i zaadresował do nich sześć kopert. Iloma sposobami można listy tak włożyć do kopert, żeby żaden list nie trafił do właściwej koperty?

Rozwiązanie 11.
Oznaczmy przez $F(n)$ ilość wszystkich sposobów wsadzenia n listów $L_1, L_2, \ldots, L_n$ do n kopert $K_1, K_2, \ldots, K_n$ tak, żeby żaden list L_i nie trafił do właściwej koperty K_i. Zatem musimy obliczyć $F(6)$.

Przypuśćmy, że wkładamy fałszywie wszystkie listy umieszczając list L_1 w kopercie K_i, gdzie $i \neq 1$. Możliwe są 2 przypadki:

a) List L_i trafił do koperty K_1. Pozostałe 4 listy należy wówczas włożyć fałszywie do pozostałych 4 kopert. Możemy to zrobić na $F(4)$ sposobów. Ponieważ K_i może być każdą z 5 kopert K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, więc przypadek a) może się zdarzyć $5 \cdot F(4)$ razy.

b) List L_i nie trafia do koperty K_1. Przypisując listowi L_i kopertę K_1 jako „niby - właściwą” możemy powiedzieć, że wtedy żaden z listów L_2, L_3, L_4, L_5, L_6 nie trafia do właściwej koperty. Taką sytuację możemy utworzyć na $F(5)$ sposobów. A ponieważ K_i może być każdą z 5 kopert, więc przypadek b) może się zdarzyć $5 \cdot F(5)$ razy.

Zauważmy, że przypadki a) i b) obejmują wszystkie możliwości. Stąd

$$F(6) = 5P(5) + 5P(4).$$

Postępując analogicznie otrzymamy

$$F(5) = 4F(4) + 4F(3)$$
$$F(4) = 3F(3) + 3F(2)$$
$$F(3) = 2F(2) + 2F(1).$$

Wiedząc jednak, że

$$F(1) = 0 \text{ oraz } F(2) = 1$$

z poprzednich równań kolejno mamy

$$F(3) = 2,\ F(4) = 9,\ F(5) = 44,\ F(6) = 265.$$

Zatem możemy tak zrobić na 265 sposobów.

Zadanie 12 (23 OM etap III, zadanie 4)**.**
Iloma sposobami można zbiór n przedmiotów podzielić na dwa zbiory?

Rozwiązanie 12.
Na samym początku umówmy się, że będziemy rozważać jedynie zbiory niepuste (gdybyśmy do rozważanych zbiorów zaliczyli również zbiór pusty, to ostateczny wynik byłby większy o 1).

Przez p oznaczmy liczbę wszystkich możliwych podziałów zbioru A posiadającego n elementów, na dwa zbiory. Wówczas $2p$ będzie liczbą wszystkich możliwych podzbiorów zbioru A, różnych od zbioru A. Znajdziemy ją dodając liczby podzbiorów o $1, 2, \ldots, (n-1)$ elementach.

Podzbiorów o k elementach jest tyle, ile jest kombinacji k elementowych ze zbioru n elementowego, czyli $\binom{n}{k}$. Zatem

$$2p = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1}.$$

Korzystając ze wzoru Newtona mamy

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Odejmując od siebie dwie powyższe równości i uwzględniając, że $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, otrzymujemy

$$2^n - 2p = 2.$$

Stąd wyliczamy, że

$$p = 2^{n-1} - 1.$$

Zadanie 13 (26 OM etap I, zadanie 4)**.**
Szkoła urządziła trzy wycieczki dla swych 300 uczniów. W każdej wycieczce wzięła udział ta sama liczba uczniów. Każdy uczeń pojechał przynajmniej na jedną wycieczkę, ale połowa uczestników pierwszej, trzecia część uczestników drugiej i czwarta część uczestników trzeciej wycieczki była tylko na jednej wycieczce. Ilu uczniów pojechało na każdą wycieczkę ? Ilu uczestników pierwszej wycieczki wzięło udział w drugiej a ilu z nich brało nadto udział w trzeciej wycieczce ?

Rozwiązanie 13.
Oznaczmy przez x liczbę uczestników każdej wycieczki. Niech ponadto y, z, u, w oznaczają odpowiednio liczby uczniów, którzy pojechali

a) tylko na pierwszą i drugą wycieczkę,

b) tylko na pierwszą i trzecią wycieczkę,

c) tylko na drugą i trzecią wycieczkę,

d) na wszystkie trzy wycieczki.

Zauważmy, że liczba wszystkich uczniów równa się sumie kilku wartości. Mianowicie

1) liczby uczestników tylko jednej wycieczki, tj. liczby $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{13}{12}x$,

2) liczby uczestników tylko dwóch wycieczek oraz

3) liczby uczestników wszystkich trzech wycieczek.

Zatem mamy następującą równość

$$\frac{13}{12}x + y + z + u + w = 300. \tag{5}$$

Ponadto liczba uczestników pierwszej wycieczki jest sumą liczb

1) uczniów, którzy pojechali tylko na pierwszą wycieczkę,

2) uczniów, którzy pojechali na pierwszą i drugą lub na pierwszą i trzecią wycieczkę oraz

3) uczniów, którzy pojechali na wszystkie wycieczki.

Stąd

$$\frac{x}{2} + y + z + w = x. \tag{6}$$

Postępując analogicznie dla liczby uczestników drugiej i trzeciej wycieczki otrzymujemy równania

$$\frac{x}{3} + y + u + w = x, \tag{7}$$

$$\frac{x}{4} + z + u + w = x. \tag{8}$$

Naszym celem jest znalezienie rozwiązań całkowitych nieujemnych układu równań (5) - (8). Przypuśćmy więc, że takim rozwiązaniem jest układ liczb x, y, z, u, w. Z równania (5) wynika, że $\frac{13}{12}x$ jest liczbą całkowitą, zatem x jest podzielne przez 12. Niech $x = 12t$. Wówczas równania (5) - (8) mają postać

$$13t + y + z + u + w = 300, \tag{9}$$

$$6t = y + z + w \tag{10}$$

$$8t = y + u + w, \tag{11}$$

$$9t = z + u + w. \tag{12}$$

Dodając stronami równania (9) i (12), otrzymujemy równanie

$$22t + y = 300. \tag{13}$$

Ponieważ $y \geq 0$, więc z (13) wynika, że $t \leq \frac{300}{22} = 13,6\ldots$. Stąd otrzymujemy, że

$$t \leq 13. \tag{14}$$

Teraz dodając stronami (10) i (11) i odejmując (12) mamy

$$5t = 2y + w. \tag{15}$$

Wiedząc, że $w \geq 0$, z równania (15) otrzymamy, że $y \leq \frac{5}{2}t$, wobec czego z równania (13) wnioskujemy, że

$$22t + \frac{5}{2}t \geq 300.$$

Zatem

$$t \geq \frac{600}{49} = 12,2\ldots$$

Skąd

$$t \geq 13. \tag{16}$$

Na mocy równań (14) i (15) wnioskujemy, że

$$t = 13, \text{ czyli } x = 156.$$

Ponadto z równań (13), (15), (10) i (11) otrzymujemy kolejno

$$y = 14, w = 37, z = 27, u = 53.$$

Łatwo sprawdzić, że znalezione liczby spełniają układ równań (5) - (8). Zatem stanowią jedyne rozwiązania naszego zadania.

Zadanie 14 (57 OM etap III, zadanie 4)**.**
Na trójce liczb wykonujemy następującą operację. Wybieramy dwie spośród tych liczb i zastępujemy je ich sumą oraz ich iloczynem, pozostała liczba nie ulega zmianie. Rozstrzygnąć, czy rozpoczynając od trójki $(3, 4, 5)$ i wykonując tę operację możemy ponownie uzyskać trójkę liczb będących długościami boków trójkąta prostokątnego.

Rozwiązanie 14.
Rozważmy najpierw liczby liczby 3 i 5. Wybierając je i postępując zgodnie z treścią zadania otrzymamy trójkę (4,8,15), w której dokładnie jedna liczba jest nieparzysta. Zauważmy, że biorąc z takiej trójki dwie liczby parzyste zamieniamy je na liczby parzyste, natomiast korzystając z jednej liczby parzystej, a drugiej nieparzystej dostajemy liczby różnych parzystości. Zatem z trójki, w której dokładnie jedna liczba jest nieparzysta, otrzymamy trójkę, która ma tę samą własność.

Zastanówmy się bardziej ogólnie nad liczbami naturalnymi a, b, c, wśród których dokładnie jedna jest nieparzysta. W takim przypadku równość $a^2 + b^2 = c^2$ nie może zachodzić, gdyż jedna ze stron tej równości jest nieparzysta, a druga parzysta. Czyli otrzymujemy sprzeczność. Tak więc nie ma możliwości byśmy uzyskali trójkę będącą długościami boków trójkąta prostokątnego.

Rozważmy teraz sytuację, w której w pierwszym kroku wybieramy liczby 3 i 4. W takim wypadku, postępując zgodnie z zasadami zadania, otrzymamy trójkę (5,7,12). Natomiast, gdy wybierzemy liczby 4 i 5 uzyskamy trójkę (3,9,20). Zauważmy, że w obu tych trójkach jest dokładnie jedna liczba parzysta i jest ona największą liczbą w trójce. Zatem wybierając z takiej trójki dwie liczby nieparzyste uzyskamy trójkę, w której dokładnie jedna liczba jest nieparzysta. Korzystając z rozważań na początku zadania wiemy, że z takiej trójki nie zbudujemy trójkąta prostokątnego.

Wybierając konsekwentnie liczby różnych parzystości w każdym kroku otrzymamy trójkę z dokładnie jedną liczbą parzystą. Korzystając z nierówności $xy > x+y$ (prawdziwej dla liczb $x, y > 2$) wnioskujemy, że ta liczba będzie największą liczbą w trójce. Teraz wystarczy zauważyć, że jeżeli liczby naturalne a, b są nieparzyste, a liczba c jest parzysta, to $a^2 + b^2 \equiv 1 + 1 (\mod 4)$, więc równość $a^2 + b^2 = c^2$ nie może być spełniona.

Reasumując wszystkie rozważone przypadki otrzymujemy odpowiedź, że nie jest możliwe uzyskanie takiej trójki, o jaką pytają w treści zadania.

Zadanie 15 (56 OM etap I, zadanie 8)**.**
Na okręgu jest umieszczonych n lampek (każda może być włączona albo wyłączona). Wykonujemy serię

ruchów. W każdym ruchu wybieramy k kolejnych lampek i zmieniamy ich stan: wyłączone włączamy, a włączone wyłączamy (liczba k nie zmienia się w trakcie tego postępowania). Na początku wszystkie lampki są wyłączone. Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $k \leq n$, dla których jest możliwe uzyskanie stanu z dokładnie jedną lampką włączoną.

Rozwiązanie 15.

1° Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie liczbą parzystą. Niech ponadto x_n oznacza liczbę zapalonych lampek po wykonaniu n-tego ruchu. Zauważmy, że wtedy $x_1 = k$.
Załóżmy, że x_{n-1} jest liczbą parzystą. Jeżeli wykonując n-ty ruch włączamy a lampek, a wyłączamy b, to $a + b = k$. Zatem

$$x_n = x_{n-1} + a - b = x_{n-1} + k - 2b.$$

Ponieważ x_{n-1} i k są liczbami parzystymi, to x_n także jest liczbą parzystą. A stąd wnioskujemy, że jeśli k jest liczbą parzystą, to nie jest możliwe uzyskanie stanu z dokładnie jedną włączoną lampką.

2° Załóżmy teraz, że liczby n i k mają wspólny dzielnik $d > 1$ i pomalujmy lampki cyklicznie używając d kolorów. Mianowicie ponumerujmy lampki kolejno liczbami od 1 do n poruszając się po okręgu w ustalonym kierunku, a następnie pomalujmy je używając d kolorów, przy czym jednakowym kolorem malujemy te lampki, których numery dają z dzielenia przez d taką samą resztę.
Przypuśćmy, że po wykonaniu pewnego ruchu świeci się dokładnie s_i lampek i-tego koloru ($i = 1, 2, \ldots, d$). W każdym ruchu zmieniamy stan dokładnie $l = k/d$ lampek i-tego koloru. Jeśli włączamy a_i lampek i-tego koloru, a b_i lampek i-tego koloru wyłączamy, to liczba s_i wzrasta o dokładnie $a_i - b_i = l - 2b_i$.
Skoro na początku żadna lampka nie jest włączona, to po każdym ruchu liczby $s_1, s_2, \ldots, s_d$ dają z dzielenia przez 2 taką samą resztę. Nie jest zatem możliwe uzyskanie dokładnie jednej lampki włączonej.

3° Ostatni przypadek, to taki, gdy k jest taką liczbą nieparzystą i względnie pierwszą z n. Zauważmy od razu, że taki warunek jest równoważny równości

$$NWD(k, 2n) = 1.$$

Korzystając z algorytmu Euklidesa dla liczb k i $2n$ otrzymamy, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia x oraz liczba całkowita nieujemna y, że

$$kx - (2n)y = 1. \tag{17}$$

Wybierzmy blok k kolejnych lampek i zmieńmy ich stan na przeciwny. Następnie wybierzmy blok złożony z k lampek przyległy do poprzedniego i zmieniamy stan tych lampek na przeciwny. Procedurę kontynuujemy poruszając się po danym okręgu w ustalonym kierunku i wykonując łącznie x ruchów.
Zauważmy,że z równości (17) wynika, że stan jednej lampki zmieni się dokładnie $2y+1$ razy, a stan każdej innej dokładnie $2y$ razy. W efekcie dokładnie jedna lampka będzie włączona, a pozostałe wyłączone.

Zadanie 16 (26 OM etap I, zadanie 1)**.**
Na balu były 42 osoby. Pani A_1 tańczyła z 7 panami, pani A_2 tańczyła z 8 panami, $\cdots$, pani A_n tańczyła, ze wszystkimi panami. Ilu panów było na balu?

Rozwiązanie 16.
Zauważmy najpierw, że liczba pań na balu jest równa n. A zatem liczba panów jest równa $42 - n$. Dalej z treści zadania możemy wywnioskować, że Pani o numerze k, gdzie $1 \leq k \leq n$, tańczyła z $k + 6$ panami. Stąd też pani o numerze n tańczyła z $n + 6$ panami. Ponieważ byli to wszyscy panowie znajdujący się na balu, to wystarczy rozwiązać bardzo prostą równość postaci

$$42 - n = n + 6.$$

Przenosząc wszystko na odpowiednie strony otrzymujemy, że $n = 18$. A więc liczba panów na balu jest równa $42 - 18 = 24$.

Zadanie 17 (53 OM etap I, zadanie 10)**.**
Dana jest szachownica 2000×2000. Na każdym polu leży kamień. Wykonujemy następujące ruchy: jeśli na pierwszym i trzecim z trzech kolejnych pól leżących w jednym wierszu lub kolumnie leży kamień, to możemy oba te kamienie przełożyć na drugie z tych pól (niezależnie od tego, czy jakiś kamień leży na środkowym polu, i czy ruch opróżni jakiekolwiek pole). Rozstrzygnąć, czy można wykonując takie ruchy przełożyć wszystkie kamienie na jedno pole.

Rozwiązanie 17.
Załóżmy, że każde pole szachownicy jest kwadratem o boku długości 1. Umieśćmy naszą szachownicę w układzie współrzędnych tak, aby środek każdego pola pokrywał się z pewnym punktem kratowym o współrzędnych ze zbioru $\{1, 2, ..., 2000\}$. Dzięki temu każdemu polu szachownicy przypisujemy parę współrzędnych ze zbioru $\{1, 2, ..., 2000\}$. Kamieniom leżącym odpowiednio na polach o współrzędnych $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{2000^2}, y_{2000^2})$ przypisujemy parę liczb

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{2000^2}}{2000^2}, \frac{y_1 + y_2 + ... + y_{2000^2}}{2000^2}\right),$$

która jest środkiem ciężkości zbioru wszystkich kamieni. Zauważmy, że wykonując ruchy zgodnie z treścią zadania nie zmienimy położenia punktu S. Stąd wniosek, że gdyby udało się przełożyć wszystkie kamienie na jedno pole, to pole to musiałoby pokrywać się z punktem S odpowiadającym kamieniom znajdującym się w położeniu wyjściowym. A więc o współrzędnych $(1000, 5; 1000, 5)$. Nie jest to możliwe, gdyż współrzędne środków wszystkich pól szachownicy są liczbami ze zbioru $\{1, 2, ..., 2000\}$. Zatem wykonując ruchy zaproponowane w zadaniu nie można przełożyć wszystkich kamieni na jedno pole.

Zadanie 18 (37 OM etap III, zadanie 5)**.**
W turnieju szachowym uczestniczy $2n$ $(n > 1)$ zawodników, przy czym każdych dwóch spośród nich rozgrywa między sobą co najwyżej jedną partię. Dowieść, że taki przebieg rozgrywek, w którym żadna trójka uczestników nie rozgrywa trzech partii między sobą jest możliwy wtedy i tylko wtedy, gdy liczba wszystkich partii rozegranych w turnieju nie przekracza n^2.

Rozwiązanie 18.
Wybierzmy gracza A, który rozegrał najwięcej gier. Niech k będzie liczbą gier rozegranych przez

gracza A i niech S będzie zbiorem graczy, z którymi gracz A grał. Niech ponadto T będzie zbiorem tych graczy, z którymi gracz A nie grał. Oczywiście zbiór T ma $2n-k-1$ elementów.
Zauważmy, że gracze ze zbioru S nie grali ze sobą. Gdyby bowiem gracze $B, C \in S$ grali ze sobą, to razem z graczem A tworzyliby trójkę graczy, którzy rozegrali ze sobą wszystkie trzy mecze. Zatem w każdym meczu musiał uczestniczyć gracz A lub któryś z graczy ze zbioru T. Każdy z tych graczy rozegrał jednak co najwyżej k gier. Stąd wniosek, że liczba wszystkich gier jest nie większa od $k+(2n-k-1)\cdot k$ i musimy udowodnić następującą nierówność

$$k+(2n-k-1)\cdot k \leq n^2.$$

Przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny

$$k+2nk-k^2-k \leq n^2$$

$$2nk-k^2 \leq n^2$$

$$0 \leq n^2-2nk+k^2$$

$$0 \leq (n-k)^2.$$

Ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, co kończy dowód prawdziwości zadania.

Zadanie 19 (43 OM etap I, zadanie 9)**.**
Dowieść, że wśród dowolnych $n+2$ liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.

Rozwiązanie 19.

Oznaczmy rozważane liczby przez $a_1, a_2, ..., a_{n+2}$ i niech r_i będzie resztą z dzielenia a_i przez $2n$. Jeżeli wśród tych reszt istnieją jakieś dwie równe reszty, np. $r_i = r_j$ dla pewnych i, j takich, że $i \neq j$, to wówczas różnica $a_i - a_j$ dzieli się przez $2n$ i kończy to nasze zadanie.
Załóżmy zatem, że reszty r_i są różnymi elementami zbioru $\{0, 1, 2, ..., 2n-1\}$. Co najmniej n spośród tych reszt jest różna od 0 i od n. Zmieniając w razie potrzeby numerację możemy przyjąć

$$\begin{aligned} r_1, r_2, ..., r_n \in \{0, 1, 2, ..., 2n-1\} \setminus \{0, n\} &= \{1, 2, ..., n-1\} \cup \{n+1, n+2, ..., 2n-1\} = \\ &= \{1, 2n-1\} \cup \{2, 2n-2\} \cup ... \cup \{n-1, n+1\} \end{aligned}$$

Mamy więc n różnych liczb r_i rozmieszczonych w sumie $n-1$ rozłącznych zbiorów $A_j = \{j, 2n-j\}$ ($j \in \{1, 2, ..., n-1\}$). Korzystając z zasady szufladkowej Dirichleta otrzymujemy, że co najmniej dwie z nich należą do tego samego zbioru A_j. Ich suma jest równa $2n$, czyli dzieli się przez $2n$.

Zadanie 20 (24 OM etap I, zadanie 12)**.**
W klasie, w której jest n uczniów, urządzono mikołajki. Każdy uczeń losuje nazwisko osoby, której ma kupić prezent, zatem uczeń A_1 kupuje prezent uczniowi A_2, A_2 kupuje prezent A_3, ..., A_k kupuje prezent A_1, gdzie $1 \leq k \leq n$. Zakładając, że wszystkie wyniki losowań są jednakowo prawdopodobne, obliczyć prawdopodobieństwo tego, że $k = n$.

Rozwiązanie 20.

Zauważmy najpierw, że w wyniku dowolnego losowania każdy uczeń wylosowuje pewnego ucznia tej samej klasy (może się również okazać, że siebie samego), a także różni uczniowie wylosowują rożnych uczniów. Stąd wynik każdego losowania określa pewne wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie (permutację) zbioru wszystkich uczniów tej klasy na siebie. Z drugiej strony możemy zinterpretować to tak, że każda permutacja jest wynikiem pewnego losowania. Wobec tego liczba zdarzeń elementarnych równa jest liczbie permutacji zbioru n-elementowego, czyli $n!$.

Zdarzenie uznamy za sprzyjające, gdy pewien uczeń U_1 wylosuje jednego z pozostałych $n-1$ uczniów, którego oznaczymy przez U_2 i dalej, gdy uczeń U_2 wylosuje jednego z $n-2$ uczniów różnych od U_1 oraz U_2, oznaczymy go przez U_3, ..., wreszcie, gdy uczeń U_{n-1} wylosuje ucznia U_n różnego od $U_1, U_2 \ldots, U_{n-1}$. Wiemy, że uczeń U_1 może wylosować ucznia różnego od siebie na $n-1$ sposobów, uczeń U_2 może wylosować ucznia różnego od U_1 i siebie na $n-2$ sposobów itd. Stąd ilość zdarzeń sprzyjających jest równa $(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = (n-1)!$. Zatem prawdopodobieństwo tego, że $k = n$, wynosi

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n\cdot(n-1)!} = \frac{1}{n}.$$

Zadanie 21 (ZM)**.**
Na pewnej wyspie żyje 17 kameleonów czerwonych, 15 zielonych i 13 niebieskich. Gdy spotkają się dwa kameleony różnie zabarwione, oba zmieniają kolor na ten trzeci. Czy może się zdarzyć, że po pewnym czasie wszystkie kameleony będą jednakowego koloru?

Rozwiązanie 21.
Przyjmijmy następujące oznaczenia
x - ilość spotkań kameleonów czerwonych z niebieskimi (zauważmy, że podczas takiego spotkania powstają 2 kameleony zielone);
y - ilość spotkań kameleonów czerwonych z niebieskimi (w takim układzie otrzymamy 2 kameleony niebieskie);
z - ilość spotkań kameleonów zielonych z niebieskimi (na tym spotkaniu powstają 2 kameleony czerwone).
Widzimy od razu, że zmienne $x, y, z \in \mathbb{N}$ oraz łączna ilość kameleonów jest równa $17 + 15 + 13 = 45$. Aby otrzymać rozwiązanie zadania musimy rozważyć układy równań

$$\begin{cases} 17 - x - y + 2z &= 45 \\ 15 - y - z + 2x &= 0 \\ 13 - x - z + 2y &= 0 \end{cases} \tag{18}$$

lub

$$\begin{cases} 17 - x - y + 2z &= 0 \\ 15 - y - z + 2x &= 45 \\ 13 - x - z + 2y &= 0 \end{cases} \tag{19}$$

lub

$$\begin{cases} 17 - x - y + 2z &= 0 \\ 15 - y - z + 2x &= 0 \\ 13 - x - z + 2y &= 45 \end{cases} \tag{20}$$

Po przeniesieniu w każdym z układów liczb na prawą stronę oraz jednakowym uporządkowaniu liter otrzymamy

$$\begin{cases} -x-y+2z &= 28 \\ 2x-y-z &= -15 \\ -x+2y-z &= -13 \end{cases} \tag{21}$$

lub

$$\begin{cases} -x-y+2z &= -17 \\ 2x-y-z &= 30 \\ -x+2y-z &= -13 \end{cases} \tag{22}$$

lub

$$\begin{cases} -x-y+2z &= -17 \\ 2x-y-z &= -15 \\ -x+2y-z &= 32 \end{cases} \tag{23}$$

Możemy zapisać to równoważnie w następującej postaci

x	y	z	rów. (21)	rów. (22)	rów. (23)
-1	-1	2	28	-17	-17
2	-1	-1	-15	30	-15
-1	2	-1	-13	-13	32

Dodając I i II wiersz do III mamy

x	y	z	rów. (21)	rów. (22)	rów. (23)
-1	-1	2	28	-17	-17
0	0	0	0	0	0
-1	2	-1	-13	-13	32

Następnie odejmując od I wiersza III otrzymamy

x	y	z	rów. (21)	rów. (22)	rów. (23)
0	-3	3	41	-4	-49
-1	2	-1	-13	-13	32

Dzieląc I wiersz przez 3, a potem dodając go do III uzyskamy

x	y	z	rów. (21)	rów. (22)	rów. (23)
0	-1	1	$\frac{41}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{49}{3}$
-1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{43}{3}$	$\frac{47}{3}$

Zatem z układu równań (21) mamy

$$\begin{cases} -y+z &= \frac{41}{3} \\ -x+y &= \frac{2}{3} \end{cases}$$

co daje nam sprzeczność z tym, że $x, y, z \in \mathbb{N}$. Z kolejnego układu równań otrzymamy

$$\begin{cases} -y+z &= -\frac{4}{3} \\ -x+y &= -\frac{43}{3} \end{cases}$$

Zatem znowu sprzeczność, gdyż $x, y, z \in \mathbb{N}$. Ostatnie równanie będzie postaci

$$\begin{cases} -y + z &= -\frac{49}{3} \\ -x + y &= \frac{47}{3} \end{cases}$$

Taka sama sprzeczność, co w poprzednich dwóch przypadkach. Podsumowując nasze rozważania stwierdzamy, że nie jest to możliwe by po pewnym czasie wszystkie kameleony były jednakowego koloru.

Zadanie 22 (9 OMJ zawody I stopnia, zadanie 7)**.**
Czy kwadrat o wymiarach 2013×2013 można podzielić na prostokąty o wymiarach 1×3 w taki sposób, aby liczba prostokątów ułożonych pionowo różniła się o 1 od liczby prostokątów ułożonych poziomo? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie 22.
Załóżmy, że kwadrat o wymiarach 2013×2013 można podzielić na prostokąty o wymiarach 1×3 w taki sposób, jak w treści zadania. Łączna ilość wszystkich takich prostokątów jest równa

$$\frac{2013 \cdot 2013}{3} = 1350723.$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że liczba prostokątów ułożonych pionowo jest większa i wynosi ona wówczas 675362.

Pomalujmy kolumny rozważanego przez nas kwadratu na przemian kolejno na czerwono, zielono i niebiesko. Ponieważ liczba 2013 jest podzielna przez 3, więc pól (kwadratów jednostkowych) każdego koloru jest tyle samo. Zauważmy, że każdy prostokąt ułożony poziomo pokrywa jedno pole czerwone, jedno zielone i jedno niebieskie. A zatem wszystkie poziome prostokąty pokrywają tyle samo pól każdego z trzech kolorów. Stąd wynika, że pionowe prostokąty również muszą pokryć tyle samo pól każdego koloru.

Skoro wiemy, że każdy prostokąt ułożony pionowo pokrywa trzy pola tego samego koloru, to możemy wszystkie pionowe prostokąty podzielić na trzy grupy: prostokąty czerwone, prostokąty zielone i prostokąty niebieskie. Ponieważ w sumie pokrywają one tyle samo pól każdego z tych kolorów, to grupy te mają po tyle samo elementów. Jednakże liczba 675362 nie dzieli się przez 3. Otrzymujemy więc sprzeczność i tym samym zakończenie zadania.

Przedstawimy teraz trzy zadania, w których będziemy korzystali z lematu Burnside'a. W związku z tym wprowadzimy na początku kilka pojęć potrzebnych do zrozumienia treści zadań oraz ich rozwiązań.

Definicja 1.1 (**Działanie grupy na zbiorze**)**.**
Odwzorowanie $\star$ takie, że $G \times X \ni (g, x) \mapsto g(x) \in X$ nazywamy działaniem grupy na zbiorze, gdy spełnia następujące warunki

1. $g(h(x)) = (g \star h)(x)$ dla każdych $g, h \in G, x \in X$;
2. $e(x) = x$ dla każdego $x \in X$.

Definicja 1.2 (**Orbita i zbiór punktów stałych**)**.**
Załóżmy, że grupa G działa na zbiorze X. Wówczas

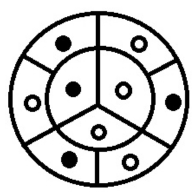
- orbitą elementu $x \in X$ nazywamy zbiór $< x >_G := \{g(x) \in X : g \in G\}$;
- zbiorem punktów stałych jest $Fix_g := \{x \in X : g(x) = x\}$.

Lemat 1.3 (**Lemat Burnside'a**).
Niech grupa G działa na zbiorze X. Niech ponadto X/G będzie zbiorem orbit. Wówczas liczba orbit jest średnią arytmetyczną liczby punktów stałych i wyraża się wzorem

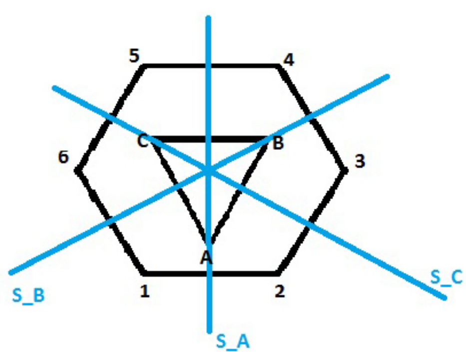
$$|X/G| = \frac{\sum_{g\in G} |Fix_g|}{|G|}$$

Zadanie 23 (ZM)**.**
Rozważmy szklaną płytkę z zaznaczonymi na niej dziewięcioma punktami w kolorach czarnym lub białym, sześć na zewnętrznym okręgu, trzy na wewnętrznym, w równych odstępach od siebie. Ile jest istotnie różnych takich płytek?

Rozwiązanie 23.
Poniższa ilustracja przedstawia jak wygląda płytka z naszego zadania



My jednak w celu rozwiązania zadania rozważymy sześciokąt symbolizujący powyższą płytkę z oznaczonymi wierzchołkami następującej postaci



gdzie S_A, S_B, S_C oznaczają symetrie względem odpowiednich wierzchołków trójkąta ABC. Zauważmy od razu, że zbiór wszystkich możliwych pokolorowań wierzchołków $1, ..., 6, A, B.C$ ma moc równą

$$|X| = 2^9.$$

Rozważmy grupę $G = (O_{0^\circ}, O_{120^\circ}, O_{240^\circ}, S_A, S_B, S_C)$. Moc takiej grupy jest równa 6. Rozpiszmy każdy z jej elementów i policzmy ilość punktów stałych.

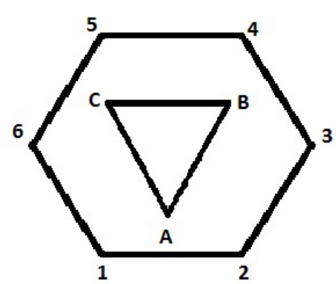
- $O_{0^\circ} = \begin{pmatrix} A & B & C & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ A & B & C & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (A)(B)(C)(1)...(6)$
  $|Fix_{O_{0^\circ}}| = 2^9$
- W tym punkcie rozpiszemy jedynie O_{120°, gdyż wystarczy nam to do obliczenia $|Fix_{O_{120^\circ}}|$ oraz $|Fix_{O_{240^\circ}}|$
  $O_{120^\circ} = \begin{pmatrix} A & B & C & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ B & C & A & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (ABC)(135)(246)$
  $|Fix_{O_{120^\circ}}| = 2^3 = |Fix_{O_{240^\circ}}|$
- W tym punkcie rozpiszemy jedynie S_A, gdyż wystarczy nam to do obliczenia $|Fix_{S_A}|, |Fix_{S_B}|$ oraz $|Fix_{S_C}|$
  $S_A = \begin{pmatrix} A & B & C & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ A & C & B & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (A)(BC)(12)(36)(45)$
  $|Fix_{S_A}| = 2^5 = |Fix_{S_B}| = |Fix_{S_C}|$

Ilość różnych orbit w grupie izometrii wyznacza ilość istotnie różnych szklanych płytek. Zatem na mocy lematu Burnside'a mamy

$$|X/G| = \frac{2^9 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^5}{6} = 104.$$

Zadanie 24 (ZM)**.**
Ile jest istotnie różnych karuzel z dziewięcioma konikami każdy w kolorze białym lub czarnym, ustawionymi w dwa rzędy: sześć koników w zewnętrznym okręgu, trzy w wewnętrznym, w równych odstępach od siebie?

Rozwiązanie 24.
Na początku zauważmy, że rysunek przedstawiający karuzelę z konikami będzie identyczny, jak rysunek szklanej płytki z poprzedniego zadania. Natomiast w tym zadaniu rozważany przez nas sześciokąt symbolizujący naszą karuzelę będzie pozbawiony osi symetrii. Zatem będzie następującej postaci



Zbiór wszystkich możliwych pokolorowań wierzchołków $1, 2, ..., 6, A, B, C$ ma moc

$$|X| = 2^9,$$

gdyż na każdy z dziewięciu wierzchołków przypadają dwa kolory. Rozważmy grupę obrotów $G = (O_{0^\circ}, O_{120^\circ}, O_{240^\circ})$, której moc jest równa 3. W tym przypadku zajmujemy się tylko takimi elementami, dlatego, że mamy istotnie różne karuzele, a ponadto chcemy, aby trójkąt znajdował się zawsze w dobrym ułożeniu. Podobnie, jak w poprzednim zadaniu rozpiszmy każdy z elementów grupy G i policzmy ilość punktów stałych.

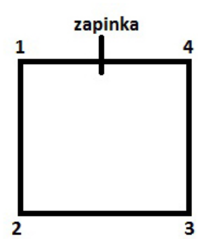
- $O_{0^\circ} = \begin{pmatrix} A & B & C & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ A & B & C & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (A)(B)(C)(1)...(6)$
  $|Fix_{O_{0^\circ}}| = 2^9$
- W tym punkcie znowu wystarczy rozpisać jedynie O_{120°, gdyż dzięki temu obliczymy jednocześnie $|Fix_{O_{120^\circ}}|$ oraz $|Fix_{O_{240^\circ}}|$
  $O_{120^\circ} = \begin{pmatrix} A & B & C & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ B & C & A & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (ABC)(135)(246)$
  $|Fix_{O_{120^\circ}}| = 2^3 = |Fix_{O_{240^\circ}}|$

Ilość różnych orbit w grupie obrotów wyznacza ilość istotnie różnych karuzel. Zatem na mocy lematu Burnside'a mamy

$$|X/G| = \frac{2^9 + 2 \cdot 2^3}{3} = 176.$$

Zadanie 25 (ZM)**.**
Ile jest istotnie różnych naszyjników z zapięciem z czterema kamieniami szlachetnymi k rodzajów?

Rozwiązanie 25.
Rozważmy kwadrat symbolizujący naszyjnik z zapinką, który jest następującej postaci



Zbiór wszystkich możliwych pokolorowań k kolorami wierzchołków powyższego kwadratu ma moc

$$|X| = k^4.$$

Ponieważ nasz naszyjnik ma zapinkę, to rozważymy grupę $G = (S_|, S\_, S_/, S_\backslash, O_{0^\circ})$, której moc jest równa 5. Rozpiszmy teraz poszczególne elementy grupy G oraz ilości ich elementów stałych.

- $O_{0^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1)...(4)$
  $|Fix_{O_{0^\circ}}| = k^4$

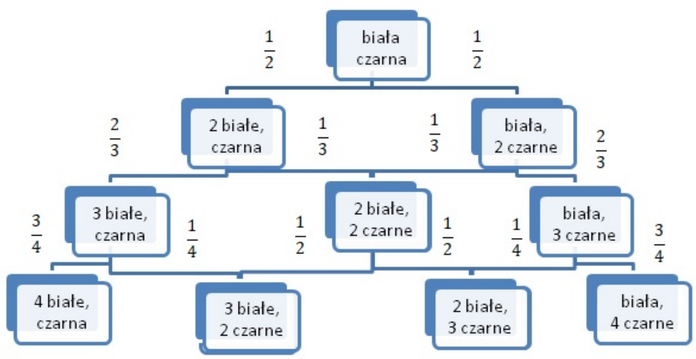
- W tym punkcie rozważymy jedynie $S_|$, gdyż wystarczy nam to do obliczenia ilości elementów stałych $S_|$ oraz $S_{\_}$
$S_| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (14)(23)$
$|Fix_{S_|}| = k^2 = |Fix_{S_{\_}}|$
- Pozostało rozważyć symetrię $S_/$ i to wystarczy, aby obliczyć ilość elementów stałych $S_/$ oraz $S_\backslash$
$S_/ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (13)(2)(4)$
$|Fix_{S_/}| = k^3 = |Fix_{S_\backslash}|$

Na mocy lematu Burnside'a otrzymujemy, że istotnie różnych naszyjników z zapięciem z czterema kamieniami szlachetnymi k rodzajów mamy

$$|X/G| = \frac{k^4 + 2 \cdot k^3 + 2 \cdot k^2}{5}.$$

Zadanie 26 (50 OM etap I zadanie 11)**.**
W urnie znajdują się dwie kule: biała i czarna. Ponadto mamy do dyspozycji 50 kul białych i 50 kul czarnych. Wykonujemy 50 razy następującą czynność: losujemy z urny kulę, a następnie wrzucamy ją z powrotem do urny oraz dokładamy jedną kulę tego samego koloru, co wylosowana kula. Po zakończeniu tych czynności mamy więc w urnie 52 kule. Jaka liczba kul białych znajdujących się w urnie jest najbardziej prawdopodobna?

Rozwiązanie 26.
Rozpoczniemy od rozpisania drzewka możliwych zdarzeń wraz z ich prawdopodobieństwami dla pierwszych 2 losowań.



Po przeanalizowaniu drzewka nabieramy podejrzeń, że wszystkie zdarzenia w kolejnych krokach są jednakowo prawdopodobne, a ich prawdopodobieństwa wynoszą

$$\frac{1}{\text{ilość kul w urnie} - 1}.$$

Aby w $n+1$ kulach, k kul było białych, to w n kulach k kul musiało być białych i wylosowaliśmy czarną lub w n kulach $k-1$ kul było białych i wylosowaliśmy kulę białą. Prawdopodobieństwo, że jeżeli w urnie jest $n+1$ kul (po $n-1$ losowaniach) to dokładnie k kul jest białych wyraża się wzorem rekurencyjnym

$$P(k, n+1) = \underbrace{\frac{n-k}{n}}_{\text{prawdo. na czarną}} P(k,n) + \underbrace{\frac{k-1}{n}}_{\text{prawdo. na białą}} P(k-1,n).$$

Używając indukcji udowodnimy, że zgodnie z naszymi przypuszczeniami $P(k,n) = \frac{1}{n-1}$ (założenie indukcyjne). Na początku mamy dwie kule w urnie z czego dokładnie 1 jest biała, tak więc spełniony jest pierwszy krok indukcyjny

$$P(1,2) = 1 = \frac{1}{2-1}.$$

Sprawdźmy, co się dzieje dla $n+1$ kul w urnie. Zgodnie z naszym wzorem rekurencyjnym możemy napisać

$$\begin{aligned}
P(k, n+1) &= \frac{n-k}{n}P(k,n) + \frac{k-1}{n}P(k-1,n) \overset{\text{zał ind.}}{=} \\
&= \frac{n-k}{n}\cdot\frac{1}{n-1} + \frac{k-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1} = \\
&= \frac{n-k+k-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1} = \\
&= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1} = \\
&= \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Tak więc $P(k, 52) = \frac{1}{51}$. Zatem każda ilość kul białych po 52 losowaniach ma to samo prawdopodobieństwo.

Zadanie 27 (55 OM etap I zadanie 5)**.**
Dla liczb całkowitych dodatnich m, n niech $N(m, n)$ oznacza liczbę m wyrazowych ciągów niemalejących o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Udowodnij, że $N(m, n+1) = N(n, m+1)$.

Rozwiązanie 27.
Przyjmijmy następujące oznaczenia

(i) A - m wyrazowe ciągi niemalejące ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n+1\}$;

(ii) B - n wyrazowe ciągi niemalejące ze zbioru $\{1, 2, \ldots, m+1\}$.

Dalej zdefiniujmy funkcję $f : A \to B$ wzorem

$$f((a_1, a_1, \ldots, a_m)) = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

gdzie $b_l = 1+$ ilość wyrazów $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ mniejszych równych l. Ponieważ wyrazów mniejszych równych od indeksu pewnego ustalonego l może być od 0 do m, to $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ jest ciągiem elementów ze zbioru $\{1, 2, \ldots, m+1\}$. Ponadto $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ jest ciągiem niemalejącym, bo wszystkie wyrazy mniejsze równe $l+1$ są mniejsze równe l. Tak więc funkcja f jest dobrze określona.

Sprawdźmy teraz różnowartościowość funkcji f. Ustalmy $(a_1^1, a_2^1, \ldots, a_m^1) \neq (a_1^2, a_2^2, \ldots, a_m^2)$. Stąd mamy, że istnieje $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ takie, że $a_k^1 \neq a_k^2$. Niech $k^* = min\{k \in \{1, 2, \ldots, m\} : a_k^1 \neq a_k^2\}$. Możemy założyć, że $a_{k^*}^1 < a_{k^*}^2$. To implikuje, że $b_{a_{k^*}^1}^1 > b_{a_{k^*}^1}^2$. Tak więc $(b_1^1, b_2^1, \ldots, b_n^1) \neq (b_1^2, b_2^2, \ldots, b_n^2)$, gdzie $(b_1^1, b_2^1 \ldots, b_n^1) = f((a_1^1, a_2^1, \ldots, a_m^1))$ oraz $(b_1^2, b_2^2, \ldots, b_n^2) = f((a_1^2, a_2^2, \ldots, a_m^2))$.
Udowodniona wyżej różnowartościowość funkcji f implikuje, że $|A| \leq |B|$.

Ponieważ nie postulowaliśmy żadnej zależności pomiędzy m i n, możemy powtórzyć rozumowanie zamieniając rolami te dwie liczby i otrzymamy w ten sposób, że $|B| \leq |A|$. Co dowodzi, że $|A| = |B|$.

Zadanie 28 (59 OM etap I zadanie 7)**.**
W n - osobowym stowarzyszeniu działa $2^n - 1$ komisji (każdy niepusty podzbiór zbioru członków komisji tworzy komisję). W każdej komisji należy wybrać przewodniczącego. Wymagany jest przy tym warunek: jeżeli komisja C jest taka, że $C = A \cup B$, to przewodniczący komisji C jest też przewodniczącym co najmniej jednej z komisji A lub B. Wyznacz liczbę możliwych wyborów przewodniczących.

Rozwiązanie 28.

Wykażemy, że wybór prezesów komisji jest równoznaczny z wybraniem pewnej permutacji ze zbioru n-elementowego. Przez X oznaczmy komisję składającą się ze wszystkich członków. Przypuśćmy, że wybraliśmy prezesów wszystkich komisji. Ponumerujmy członków komisji w następujący sposób.
x_1 - prezes komisji X;
x_2 - prezes komisji $X \setminus \{x_1\}$;
x_3 - prezes komisji $X \setminus \{x_1, x_2\}$;
$\vdots$
x_n - prezes komisji $X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$.
Ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tworzy permutację zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ustalmy pewną permutację zbioru n-elementowego $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Dla ustalonej komisji C prezesem komisji mianujemy $x_m = min\{x_k : x_k \in C\}$.
Oznaczmy przez X_m zbiór elementów X mniejszych od x_m. Oczywiście, jeśli x_m jest prezesem komisji C, to $X_m \cap A = \emptyset$. Zauważmy, że jeżeli $C = A \cup B$ dla pewnych komisji A i B, to

(i) $x_m \in A$ lub $x_m \in B$ oraz

(ii) $X_m \cap A = \emptyset \Rightarrow X_m \cap A = \emptyset = B \cap X_m$, co mówi nam , że w każdej z tych komisji nie ma elementu mniejszego od x_m. Tak więc x_m jest prezesem komisji A lub B.

Te dwie metody wyboru są funkcjami różnowartościowymi. Zatem wybór prezesów komisji jest równoznaczny z wybraniem pewnej permutacji ze zbioru n-elementowego. A stąd wnioskujemy, że ilość możliwych komisji, to $n!$.

Zadanie 29 (27 OM etap 3 zadanie 5)**.**
Statek łowi ryby na wodach terytorialnych obcego państwa, nie mając na to pozwolenia. Każde zarzucenie sieci przynosi połów tej samej wartości. Prawdopodobieństwo przechwycenia statku przez straż wynosi $\frac{1}{k}$ dla pewnego ustalonego $k \in \mathbb{N}$. Zakładamy, że prawdopodobieństwo złapania statku przy kolejnycm zarzuceniu sieci jest niezależne od dotychczasowego przebiegu połowu. W razie przechwycenia przez statku straż graniczną, całość dotychczas złowionych ryb ulega konfiskacie i dalszy połów jest niemożliwy. Kapitan planuje powrót po n-tym zanurzeniu sieci. Znaleźć liczbę n przy której wartość oczekiwana zysku jest największa.

Rozwiązanie 29.

Oznaczmy przez ω zysk podczas każdego połowu. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że statek nie zostanie przychwycony przy pewnym zarzuceniu sieci jest równe

$$1 - \frac{1}{k}.$$

Zdarzenia polegające na złapaniu lub niezłapaniu statku przy kolejnym zarzuceniu sieci są niezależne, więc prawdopodobieństwo zdarzenia, że przy n-krotnym zarzucaniu sieci statek nie zostanie przychwycony, jest równe

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n.$$

Stąd wartość oczekiwana zysku przy n-krotnym zarzucaniu sieci jest równa

$$f(n) = n\omega \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n + 0 \cdot (1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n).$$

Tak więc chcemy znaleźć dla jakiego n funkcja f jest największa. Rozważmy zatem kiedy funkcja f jest rosnąca, a kiedy malejąca. Ze wzoru na wartość oczekiwaną otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \omega(n+1)\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n+1} = \\ &= \omega n\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) = \\ &= f(n)\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = \\ &= f(n)\left(1+\frac{(k-1)-n}{kn}\right). \end{aligned}$$

Nierówność

$$1+\frac{(k-1)-n}{kn} \geq 1$$

jest równoważna nierówności

$$(k-1)-n \geq 0,$$

czyli

$$n \leq k-1.$$

Otrzymujemy więc:

$$f(n+1) > f(n) \text{ dla } n = 1, 2, \ldots, k-2,$$

$$f(n+1) = f(n) \text{ dla } n = k-1,$$

$$f(n+1) < f(n) \text{ dla } n = k, k+1, \ldots$$

Stąd największą wartość oczekiwaną mamy dla $n = k-2$ oraz $n = k-1$.

Zadanie 30 (33 OM etap II zadanie 6)**.**
Dany jest taki skończony zbiór B punktów przestrzeni, że każde dwie odległości między punktami tego zbioru są różne. Każdy punkt zbioru B łączymy odcinkiem z najbliższym mu punktem zbioru B. Otrzymamy w ten sposób zbiór odcinków, z których jeden (dowolnie wybrany) malujemy na czerwono, wszystkie pozostałe odcinki malujemy na zielono. Dowieść, że istnieją takie dwa punkty zbioru B, których nie można połączyć łamaną złożoną z odcinków pomalowanych na zielono.

Rozwiązanie 30.

Niech odcinek A_1A_2 będzie pomalowany na czerwono. Przypuśćmy, że istnieje łamana złożona z odcinków zielonych łącząca punkty A_1 i A_2. Wówczas istnieją punkty $A_3, \ldots, A_n$ będące kolejnymi końcami odcinków tworzących tę łamaną.
Przyjmijmy następujące oznaczenie
$A_i \to A_j$ - elementem zbioru B najbliższym punktowi A_i jest A_j.
Z tego, że narysowany jest odcinek $\overline{A_iA_j}$ wynika, że $A_i \to A_j$ albo $A_j \to A_i$. Wobec założenia, że każde

dwie odległości między punktami zbioru B są różne, nie może dla $k \neq j$ zachodzić jednocześnie $A_i \to A_j$ oraz $A_i \to A_k$. Wynika stąd, że musi być albo

$$A_1 \to A_2, A_2 \to A_3, \ldots, A_{n-1} \to A_n, A_n \to A_1$$

albo

$$A_1 \to A_n, A_n \to A_{n-1}, \ldots, A_3 \to A_2, A_2 \to A_1.$$

W obu przypadkach odległości kolejnych punktów spełniałyby odpowiednio sprzeczne nierówności postaci

$$A_1A_2 > A_2A_3 > \ldots A_{n-1}A_n > A_nA_1 > A_1A_2$$

lub

$$A_1A_2 < A_2A_3 < \ldots < A_{n-1}A_n < A_nA_1 < A_1A_2.$$

Wobec tego punkty tworzące odcinek czerwony nie mogą być połączone łamaną złożoną z odcinków zielonych.

Literatura

[1.] ww.om.edu.pl

[2.] ww.omj.edu.pl

[3.] ww.deltami.edu.pl

[4.] ww.wmii.uwm.edu.pl/∼zawodymat/