UNIWERSYTET ŚLĄSKI W KATOWICACH
WYDZIAŁ MATEMATYKI, FIZYKI I CHEMII
INSTYTUT MATEMATYKI

PROJEKT ZESPOŁOWY
ZADANIA OLIMPIJSKIE
RÓWNANIA, NIERÓWNOŚCI I UKŁADY RÓWNAŃ

KATOWICE 2018

1. Nierówności

Zadanie 1. (9 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 9)
Udowodnić, że dla $a, b, c, d > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geq \frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$

Rozwiązanie:
Przyjmijmy oznaczenia

$$x := b + c + d,$$

$$y := a + c + d,$$

$$z := a + b + d$$

oraz

$$u := a + b + c.$$

Wtedy

$$a(a + b + c + d) = x + y + z + u$$

i wyrażenie, które należy udowodnić ma postać

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} \geq \frac{16}{x+y+z+u},$$

przy czym $x, y, z, u > 0$.
Zauważmy, że dla $m, n > 0$ mamy

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \geq \frac{4}{m+n}.$$

Istotnie

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn} = \frac{(m+n)^2}{mn(m+n)} \geq \frac{4mn}{mn(m+n)} = \frac{4}{m+n}.$$

Zatem

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

oraz

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{u} \geq \frac{4}{z+u}.$$

Stąd

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} \geq 4\Big(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z+u}\Big).$$

Stosując znaną nam własność jeszcze raz do prawej strony nierówności mamy

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}\geq 4\Big(\frac{4}{x+y+z+u}\Big)=\frac{16}{x+y+z+u}.$$

Zadanie 2. (5 Olimpiada Matematyczna, etap III, zadanie 4)
Znaleźć wartość x spełniającą nierówność

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-a}>2,$$

gdzie a jest daną liczbą dodatnią.
Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że x spełnia $\sqrt{x}-\sqrt{x-a}>2$, wtedy $x\geq a$ oraz

$$\sqrt{x}>\sqrt{x-a}+2$$

i

$$x>(\sqrt{x-a}+2)^2=x-a+4\sqrt{x-a}+4,$$

a także

$$\sqrt{x-a}<\frac{a-4}{4}.$$

Z ostatniej nierówności wynika, że $a>4$ oraz

$$x-a<\Big(\frac{a-4}{4}\Big)^2,$$

a stąd

$$x<\Big(\frac{a-4}{4}\Big)^2+a$$

lub

$$x<\Big(\frac{a+4}{4}\Big)^2.$$

Jeśli więc x spełnia $\sqrt{x}-\sqrt{x-a}>2$, to $a>4$ oraz $a\leq x<\left(\frac{a+4}{4}\right)^2$.
Odwrotnie jeśli spełniony jest powyższy warunek to zachodzi

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-a}>2.$$

Zadanie 3. (4 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 7)
Udowodnij, że dla $n\in\mathbb{N}$, $n>2$ zachodzi nierówność

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!.$$

Rozwiązanie:
Prowadzimy dowód indukcyjny. Dla $n=3$ mamy

$$2^{\frac{3}{2}(3-1)}=8>6=3!.$$

Założenie indukcyjne

$$2^{\frac{1}{2}k(k-1)} > k!.$$

Wtedy

$$2^{\frac{1}{2}k(k+1)} = 2^{\frac{1}{2}k(k-1)+k} = 2^{\frac{1}{2}k(k-1)}2^k,$$

a dalej

$$2^{\frac{1}{2}k(k-1)}2^k > k!2^k > k!(k+1) = (k+1)!,$$

dla $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$. Na mocy indukcji matematycznej wykazaliśmy nierówność.

Zadanie 4. (3 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 6)
Udowodnić, że dla $u, v, w \geq 0$ zachodzi nierówność

$$u^3 + v^3 + w^3 \geq 3uvw.$$

Rozwiązanie:
Jeżeli któreś z u, v, w jest równe 0 to nierówność zachodzi, ponieważ prawa strona jest równa zero, a lewa jest nieujemna.
Niech $u, v, w > 0$.
Rozłóżmy $u^3 + v^3 + w^3$ na czynniki. W tym celu przekształcimy sześcian sumy liczb u, v, w w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
(u+v+w)^3 &= (u+v)^3 + 3(u+v)^2w + 3(u+v)w^2 + w^3 \\
&= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + 3u^2w + 6uvw + \\
&+ 3v^2w + 3uw^2 + 3vw^2 + w^3 \\
&= u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw + (3u^2v + 3uv^2 + 3uvw) + \\
&+ (3v^2w + 3vw^2 + 3uvw) + (3u^2w + 3uw^2 + 3uvw) \\
&= u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw + 3uv(u+v+w) + \\
&+ 3vw(u+v+w+) + 3wu(u+v+w) \\
&= u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw + 3(u+v+w)(uv+vw+wu).
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw &= (u+v+w)^3 - 3(u+v+w)(uv+vw+wu) \\
&= (u+v+w)[(u+v+w)^2 - 3(uv+vw+wu)] \\
&= (u+v+w)(u^2+v^2+w^2-uv-vw-wu) \\
&= \frac{1}{2}(u+v+w)(2u^2+2v^2+2w^2-2uv-2vw-2wu) \\
&= \frac{1}{2}(u+v+w)[(u-v)^2+(v-w)^2+(w-u)^2].
\end{aligned}$$

Ponieważ $(u+v+w)>0$ oraz $[(u-v)^2+(v-w)^2+(w-u)^2]\geq 0$, więc

$$u^3+v^3+w^3-3uvw\geq 0,$$

a stąd

$$u^3+v^3+w^3\geq 3uvw.$$

Zadanie 5. (51 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 3, seria 1) Suma liczb dodatnich a,b,c wynosi 1. Udowodnij, że

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\leq 1.$$

Rozwiązanie:
Skoro

$$a+b+c=1,$$

to wystarczy wykazać, że

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc(a+b+c)}\leq (a+b+c)^2.$$

Przekształcając otrzymujemy

$$2\sqrt{3abc(a+b+c)}\leq 2ab+2ac+2bc.$$

Zatem

$$\sqrt{3abc(a+b+c)}\leq ab+ac+bc.$$

Podstawiając

$$x=bc,$$

$$y=ac,$$

oraz

$$z=ab,$$

dostajemy

$$\sqrt{3(yz+xz+xy)}\leq x+y+z.$$

Wówczas

$$3(xy+yz+xz)\leq x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.$$

Po redukcji wyrazów podobnych mamy

$$xy+yz+xz\leq x^2+y^2+z^2.$$

Mnożąc nierówność stronami przez 2 i przenosząc wszystkie składniki na jedną stronę otrzymujemy

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2 \geq 0.$$

Stąd

$$(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0,$$

co jest prawdą dla każdych liczb rzeczywistych x, y, z i kończy zadanie.

Zadanie 6. (57 Olimpiada Matematyczna, etap II, zadanie 3)
Dodatnie liczby a, b, c spełniają warunek $ab+bc+ca = abc$. Udowodnij, że

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq 1.$$

Rozwiązanie:
Podzielmy równanie $ab + bc + ca = abc$ przez abc. Zatem

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Podstawiając za $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ i $z = \frac{1}{c}$ mamy, że

$$x + y + z = 1,$$

a także $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$ i $c = \frac{1}{z}$. Stosując podstawienia policzmy pierwszy składnik nierówności. Wówczas

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} = \frac{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4}}{\frac{1}{xy}(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3})} = \frac{\frac{x^4+y^4}{x^4y^4}}{\frac{x^3+y^3}{x^3y^3} \cdot \frac{1}{xy}} =$$
$$= \frac{x^4 + y^4}{x^4y^4} \cdot \frac{x^4y^4}{x^3 + y^3} = \frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3}$$

Analogicznie dla drugiego i trzeciego składnika nierówności mamy

$$\frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} = \frac{\frac{1}{y^4} + \frac{1}{z^4}}{\frac{1}{yz}(\frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3})} = \frac{\frac{y^4+z^4}{y^4z^4}}{\frac{y^3+z^3}{y^3z^3} \cdot \frac{1}{yz}} =$$
$$= \frac{y^4 + z^4}{y^4z^4} \cdot \frac{y^4z^4}{y^3 + z^3} = \frac{y^4 + z^4}{y^3 + z^3}$$

i

$$\frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} = \frac{\frac{1}{z^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{1}{zx}(\frac{1}{z^3} + \frac{1}{x^3})} = \frac{\frac{z^4+x^4}{z^4x^4}}{\frac{z^3+x^3}{z^3x^3} \cdot \frac{1}{zx}} =$$
$$= \frac{z^4 + x^4}{z^4x^4} \cdot \frac{z^4x^4}{z^3 + x^3} = \frac{z^4 + x^4}{z^3 + x^3}$$

Z powyższych przeliczeń mamy, że

$$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}+\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3}+\frac{z^4+x^4}{z^3+x^3}\geq 1.$$

Pokażemy, że

$$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}\geq\frac{x+y}{2}.$$

Mnożąc obustronnie nierówność przez wyrażenie $2(x^3+y^3)$ dostajemy

$$2x^4+2y^4\geq x^4+xy^3+x^3y+y^4.$$

Przenosząc wszystkie składniki na jedną stronę otrzymujemy

$$x^4-x^3y-xy^3+y^4\geq 0.$$

Stosując metodę grupowania wyrazów mamy

$$x^3(x-y)-y^3(x-y)\geq 0.$$

Równoważnie

$$(x^3-y^3)(x-y)\geq 0.$$

Powyższa nierówność jest zawsze spełniona (dla $x>y$, $x<y$ i $x=y$).

Analogicznie dla drugiego wyrażenia pokażemy, że $\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3}\geq\frac{y+z}{2}$.

Mnożąc obustronnie nierówność przez wyrażenie $2(y^3+z^3)$ dostajemy

$$2y^4+2z^4\geq y^4+yz^3+y^3z+z^4.$$

Przenosząc wszystkie składniki na jedną stronę otrzymujemy

$$y^4-y^3z-y^3z+z^4\geq 0.$$

Stosując metodę grupowania wyrazów mamy

$$y^3(y-z)-z^3(y-z)\geq 0.$$

Równoważnie

$$(y^3-z^3)(y-z)\geq 0.$$

Podobnie dla trzeciego wyrażenia pokażemy, że $\frac{z^4+x^4}{z^3+x^3}\geq\frac{z+x}{2}$ Mnożąc obustronnie nierówność przez wyrażenie $2(z^3+x^3)$ dostajemy

$$2z^4+2x^4\geq z^4+zx^3+z^3x+x^4.$$

Przenosząc wszystkie składniki na jedną stronę otrzymujemy

$$z^4-z^3x-zx^3+x^4\geq 0.$$

Stosując metodę grupowania wyrazów mamy

$$z^3(z-x) - x^3(z-x) \geq 0.$$

Równoważnie

$$(z^3 - x^3)(z-x) \geq 0.$$

Stąd

$$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}+\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3}+\frac{z^4+x^4}{z^3+y^3} \geq \frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2} = \frac{2(x+y+z)}{2} = 1.$$

Zadanie 7. (60 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 4)
Udowodnij, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$4(\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{b^3c^3}+\sqrt{c^3a^3}) \leq 4c^3 + (a+b)^3 \tag{1}$$

Rozwiązanie:
Skorzystamy z następujących zależności i wzorów skróconego mnożenie

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}, \tag{2}$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \tag{3}$$

$$(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz. \tag{4}$$

Z (3) mamy

$$\begin{aligned} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \geq \\ &\geq a^3 + b^3 + 3ab \cdot 2\sqrt{ab} = \\ &= a^3 + b^3 + 6\sqrt{a^3b^3} \end{aligned}$$

Przekształcając (1) dostajemy

$$4c^3 + (a+b)^3 - 4(\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{b^3c^3}+\sqrt{c^3a^3}) \geq 0.$$

Równoważnie

$$4c^3 + a^3 + b^3 + 6\sqrt{a^3b^3} - 4\sqrt{a^3b^3} - 4\sqrt{b^3c^3} - 4\sqrt{c^3a^3} \geq 0.$$

Wtedy

$$4c^3 + a^3 + b^3 + 2\sqrt{a^3b^3} - 4\sqrt{b^3c^3} - 4\sqrt{c^3a^3} \geq 0.$$

Ostatecznie

$$(2\sqrt{c^3} - \sqrt{a^3} - \sqrt{b^3})^2 \geq 0.$$

Zadanie 8. (58 Olimpiada Matematyczna, etap II, zadanie 6)
Dodatnie liczby a, b, c, d spełniają warunek

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4.$$

Wykaż, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leq 2(a+b+c+d)-4$$

Rozwiązanie:
Skorzystamy z nierówności

$$\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}} \leq \frac{x^2+y^2}{x+y}, \tag{5}$$

którą udowodnimy.

Zatem

$$\frac{x^3+y^3}{2} \leq \frac{x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3},$$

co jest równoważne nierówności

$$(x^3+y^3)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) \leq 2(x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6).$$

Przekształcając i przenosząc wszystkie składniki na jedną stronę mamy

$$x^6-3x^5y+2x^4y^2-2x^3y^3+2x^2y^4-3xy^5+y^6 \geq 0.$$

Grupując dostajemy

$$(x^3-y^3)^2-3xy(x-y)(x^3-y^3) \geq 0,$$

co jest równoważnie nierówności

$$(x^3-y^3)(x-y)^3 \geq 0,$$

co jest zawsze prawdą (dla $x > y$, $x < y$ oraz $x = y$. Z (5) mamy

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+d^2}{c+d}+\frac{d^2+a^2}{d+a} \leq 2(a+b+c+d)-4.$$

Przekształcając otrzymujemy

$$2(a+b+c+d)-\frac{2ab}{a+b}-\frac{2bc}{b+c}-\frac{2cd}{c+d}-\frac{2da}{d+a} \geq 4.$$

Wykażemy, że

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2cd}{c+d} + \frac{2da}{d+a} \geq 4. \tag{6}$$

Skorzystajmy z nierówności

$$x + y \geq \frac{4}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \tag{7}$$

którą udowodnimy. Zatem

$$x + y \geq \frac{4xy}{x+y},$$

czyli

$$(x+y)^2 \geq 4xy.$$

Ostatecznie

$$(x-y)^2 \geq 0.$$

Wówczas pierwszy i trzeci składniki (6) z uwzględnieniem nierówności (7) dają następujący rezultat

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2cd}{c+d} \geq \frac{8}{\frac{a+b}{ab} + \frac{c+d}{cd}} = \frac{8}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} = \frac{8}{4} = 2.$$

Analogicznie dla drugiego i czwartego składnika (6) z uwzględnieniem nierówności (7) dostajemy następujący rezultat

$$\frac{2bc}{b+c} + \frac{2da}{d+a} \geq \frac{8}{\frac{b+c}{bc} + \frac{d+a}{da}} = \frac{8}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} = \frac{8}{4} = 2.$$

Wykazaliśmy zatem (6), co kończy zadanie.

Zadanie 9. (57 Olimpiada Matematyczna, etap III, zadanie 10)
Jeśli liczby $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ spełniają warunek $ab + bc + ca = 3$ to

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 9.$$

Rozwiązanie:
W rozwiązaniu zadania wykorzystamy dwie nierówności. Mamy

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \leq (a+b+c)(ab+bc+ca),$$

ponieważ

$$a^3 + b^3 + c^3 - (a^2b + ab^2 + b^2c + c^2a + bc^2 + ca^2) + 3abc \geq 0$$

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $a \leq b \leq c$. Wówczas

$$a(b-a)(c-a)+(c-b)\big(c(c-a)-b(b-a)\big) \geq 0.$$

Ponadto

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca),$$

ponieważ

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \geq 3(ab+bc+ca)$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc \geq 0$$

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc \geq 0$$

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0.$$

Na mocy powyższych dwóch nierówności oraz założenia $ab+bc+ca=3$ mamy:

$$a^3+b^3+c^3+6abc \geq (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq$$

$$\geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}(ab+bc+ca)=\sqrt{9}\cdot 3=9.$$

Zadanie 10. (68 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 4)
Udowodnij, że dla $t \in (0,1)$ oraz $a,b \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| \geq \frac{2t}{2+t}(|a|+|b|).$$

Rozwiązanie:
Dla dowolnych $a,b \in \mathbb{R}$ oraz $t \in (0,1)$ mamy

$$|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| \geq |a+(1+t)b+a+(1-t)b| =$$

$$=|a+b+tb+a+b-tb|=|2a+2b|=2|a+b| \geq 2|a|-2|b|,$$

gdzie ostatnią nierówność mamy na mocy

$$|x|=|x+y-y| \leq |x+y|+|-y|.$$

Dalej

$$|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b|=|a+(1+t)b|+|-a-(1-t)b| \geq$$

$$\geq |a+(1+t)b-a-(1-t)b|=|a+b+bt-a-b+bt|=|2bt|=2t|b|.$$

Przemnażając pierwszą nierówność przez $\frac{t}{2+t}$ otrzymujemy

$$\frac{t}{2+t}\Big(|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b|\Big) \geq \frac{t}{2+t}2|a| - \frac{t}{2+t}2|b|.$$

Przemnażając drugą nierówność przez $\frac{2}{2+t}$ dostajemy

$$\frac{2}{2+t}\Big(|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b|\Big) \geq \frac{2}{2+t}2t|b|.$$

Dodając nierówności stronami otrzymujemy

$$|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| \geq \frac{2t}{2+t}(|a|+|b|).$$

Zadanie 11. (55 Olimpiada Matematyczna, etap III, zadanie 4)
Dla $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{2(a^2+b^2)} + \sqrt{2(b^2+c^2)} + \sqrt{2(c^2+a^2)} \geq$$
$$\geq \sqrt{3(a+b)^2+3(b+c)^2+3(c+a)^2}.$$

Rozwiązanie:
Podnosimy stronami do kwadratu. Wówczas

$$L = 4(a^2+b^2+c^2) + 4\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} +$$
$$+4\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} + 4\sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)}$$

oraz

$$P = 6(a^2+b^2+c^2) + 6(ab+bc+ca).$$

Redukujemy wyrazy podobne i dzielimy stronami przez 2. Wtedy

$$2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} + 2\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} +$$
$$+2\sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)} \geq a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca).$$

Na mocy nierówności $\sqrt{2x^2+2y^2} \geq |x+y|$ mamy

$$2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} \geq |(a+b)(b+c)| \geq b^2 + (ab+bc+ca).$$

Analogicznie

$$2\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq c^2 + (ab+bc+ca)$$

oraz

$$2\sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)} \geq a^2 + (ab+bc+ca).$$

Sumując trzy ostatnie nierówności stronami dostajemy

$$2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2} + 2\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2} +$$
$$+2\sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2} \geq a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca),$$

co jest równoważne nierówności z treści zadania.

2. Układy równań

Zadanie 12. (48 Olimpiada Matematyczna, etap II, zadanie 1)
Dla każdej liczby rzeczywistej a wyznacz liczbę uporządkowanych trójek liczb rzeczywistych (x, y, z) spełniających układ równań

$$\begin{cases} x + y^2 + z^2 = a \\ x^2 + y + z^2 = a \\ x^2 + y^2 + z = a \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Zastosujmy podstawienie

$$x = u + \frac{1}{2}, \qquad y = v + \frac{1}{2}, \qquad \text{oraz} \qquad z = w + \frac{1}{2}.$$

Zatem układ ma postać

$$\begin{cases} u + \frac{1}{2} + v^2 + v + \frac{1}{4} + w^2 + w + \frac{1}{4} = a \\ u^2 + u + \frac{1}{4} + v + \frac{1}{2} = a \\ w^2 + w + \frac{1}{4} + v^2 + v + \frac{1}{4} + w + \frac{1}{2} = a \end{cases}$$

Równoważnie

$$\begin{cases} v^2 + w^2 + u + v + w + 1 = a \\ u^2 + w^2 + u + v + w + 1 = a \\ u^2 + v^2 + u + v + w + 1 = a \end{cases} \tag{8}$$

Odejmując pierwsze równanie od drugiego powyższego układu otrzymujemy $v^2 - u^2 = 0$.

Odejmując pierwsze równanie od trzeciego powyższego układu otrzymujemy $w^2 - u^2 = 0$.

Odejmując drugie równanie od trzeciego powyższego układu otrzymujemy $w^2 - v^2 = 0$.

Stąd $u^2 = v^2 = w^2$.

Każde rozwiązanie (u, v, w) układu (8) ma dokładnie jedno z następujących rozwiązań postaci

1. (t, t, t) dla $t \in \mathbb{R}$.

Dla $u = v = w = t$ układ (8) sprowadza się do równania postaci

$$2t^2 + 3t + 1 - a = 0.$$

Liczba rozwiązań (u, v, w) układu (8) mających postać (t, t, t) jest równa liczbie pierwiastków powyższego równania, którą oznaczmy przez N_1.

Policzmy wyróżnik trójmianu kwadratowego. Zatem

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (1 - a) = 9 - 8 + 8a = 8a + 1.$$

Stąd

$$N_1 = \begin{cases} 0, & \text{dla} \quad a < -\frac{1}{8} \\ 1, & \text{dla} \quad a = -\frac{1}{8} \\ 2, & \text{dla} \quad a > -\frac{1}{8} \end{cases}$$

2. $(-t, t, t)$ lub $(t, -t, t)$ lub $(t, t, -t)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

   Dla $u = v = t$ i $w = -t$ układ (8) sprowadza się do równania postaci

$$2t^2 + t + 1 - a = 0.$$

   Liczba rozwiązań (u, v, w) układu (8) mających postać $(-t, t, t)$, $(t, -t, t)$ lub $(t, t, -t)$ jest równa liczbie pierwiastków powyższego równania, którą oznaczmy przez $3N_2$, gdzie $N_2 \neq 0$.

   Policzmy wyróżnik trójmianu kwadratowego. Zatem

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (1 - a) = 1 - 8 + 8a = 8a - 7.$$

   Stąd

$$N_2 = \begin{cases} 0, & \text{dla} \quad a < \frac{7}{8} \\ 1, & \text{dla} \quad a = \frac{7}{8} \quad \text{lub} \quad a = 1 \\ 2, & \text{dla} \quad a > \frac{7}{8} \quad \text{i} \quad a \neq 1 \end{cases}$$

Ostatecznie, liczba rozwiązań układu (8) ma postać

$$N = N_1 + 3N_2 = \begin{cases} 0, & \text{dla} \quad a < -\frac{1}{8} \\ 1, & \text{dla} \quad a = -\frac{1}{8} \\ 2, & \text{dla} \quad -\frac{1}{8} < a < \frac{7}{8} \\ 5, & \text{dla} \quad a = \frac{7}{8} \quad \text{lub} \quad a = 1 \\ 8, & \text{dla} \quad a > \frac{7}{8} \quad \text{i} \quad a \neq 1 \end{cases}$$

Zadanie 13. (63 Olimpiada Matematyczna, etap II, zadanie 1)
Rozwiąż w liczbach rzeczywistych a, b, c, d układ równań

$$\begin{cases} a^3 + b = c \\ b^3 + c = d \\ c^3 + d = a \\ d^3 + a = b \end{cases} \tag{9}$$

Rozwiązanie:
Odejmując trzecie równanie od pierwszego z wyjściowego układu równań otrzymujemy

$$c^3 + d - a^3 - b = a - c.$$

Równoważnie

$$c^3 - a^3 + c - a = b - d.$$

Zatem wyrażenia $c^3 - a^3$ i $c - a$ są jednakowego znaku.

Analogicznie, odejmując czwarte równanie od druggiego z wyjściowego układu równań otrzymujemy

$$d^3 + a - b^3 - c = b - d.$$

Równoważnie

$$d^3 - b^3 + d - b = c - a.$$

Zatem wyrażenia $d^3 - b^3$ i $d - b$ są jednakowego znaku. Z powyższych rozważań mamy

$$c - a = d - b = 0.$$

Wtedy

$$b = d$$

oraz

$$a = c.$$

Zatem podstawiając dostajemy

$$\begin{cases} a^3 + b = a \\ b^3 + a = b \end{cases} \tag{10}$$

Dodając stronami równania otrzymujemy

$$a^3 + b + b^3 + a = a + b.$$

Wtedy

$$a^3 + b^3 = 0.$$

Zatem

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = 0.$$

Stąd

$$a = -b.$$

Analogicznie, podstawiając dostajemy

$$\begin{cases} c^3 + d = c \\ d^3 + c = d \end{cases} \tag{11}$$

Dodając stronami równania otrzymujemy

$$c^3 + d + d^3 + c = c + d.$$

Wtedy

$$c^3 + d^3 = 0.$$

Zatem

$$(c+d)(c^2 - cd + d^2) = 0.$$

Stąd

$$c = -d.$$

Wówczas nasze rozwiązania układu są postaci $(a, b, c, d) = (t, -t, t, -t)$ dla $t \in \mathbb{R}$. Podstawiając t do któregokolwiek równania wyjściowego układu równań otrzymujemy

$$t^3 - t = t.$$

Zatem

$$t^3 - 2t = 0.$$

Stąd

$$t(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2}) = 0,$$

czyli

$$t = 0$$

lub

$$t = \sqrt{2}$$

lub

$$t = -\sqrt{2}.$$

Ostateczne rozwiązanie układu równań ma postać

$$(0,0,0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Zadanie 14. (61 Olimpiada Matematyczna, etap II, zadanie 1)
Rozwiąż w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2 - (y + z + yz)x + (y + z)yz = 0 \\ y^2 - (z + x + zx)y + (z + x)zx = 0 \\ z^2 - (x + y + xy)z + (x + y)xy = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Rozwiązanie:
Każde z równań naszego układu równań możemy przekształcić do następujących postaci

$$(x - (y + z))(x - yz) = 0,$$

$$(y - (z + x))(y - zx) = 0,$$

oraz

$$(z - (x + y))(z - xy) = 0.$$

Zatem otrzymujemy

$$\begin{cases} x = y + z \\ x = yz, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = z + x \\ y = zx, \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} z = x + y \\ z = xy. \end{cases}$$

Stąd dostajemy 8 możliwych kombinacji rozwiązań powyższych układów równań postaci

$$\begin{cases} x = y + z \\ y + z + x \\ z + x + y \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} x = y + z \\ y = z + x \\ z = xy \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} x = y + z \\ y = zx \\ z = x + y \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} x = y + z \\ y = zx \\ z = xy \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} x = yz \\ y = zx \\ z = xy \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} x = yz \\ y = x + z \\ z = x + y \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} x = yz \\ y = x + z \\ z = xy \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} x = yz \\ y = x + z \\ z = x + y \end{cases} \tag{20}$$

Rozwiązaniem (13) jest

$$x = y = z = 0$$

Rozwiązaniem (14) jest

$$x = y = z = 0$$

Rozwiązaniem (15) jest

$$x = y = z = 0$$

Rozwiązaniem (16) jest

$$x = y = z = 0$$

Rozwiązaniem (17) jest

$$x = y = z = 0$$

lub

$$x = y = z = 1$$

lub

$$x = y = -1, z = 1$$

lub

$$y = z = -1, x = 1$$

lub

$$x = z = -1, y = 1$$

Rozwiązaniem (18) jest

$$x = y = z = 0$$

lub

$$x = y = \frac{1}{2}, z = 1$$

Rozwiązaniem (19) jest

$$x = y = z = 0$$

lub

$$x = z = \frac{1}{2}, y = 1$$

Rozwiązaniem (20) jest

$$x = y = z = 0$$

Ostatecznie, wszystkie rozwiązania układu (12) są postaci

$$(0,0,0), (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$$

$$(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)$$

Zadanie 15. (69 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 3)
Znaleźć wszystkie trójki $x, y, z \in \mathbb{R}$ spełniające

$$\begin{cases} x^2y + 2 = x + 2yz \\ y^2z + 2 = y + 2zx \\ z^2x + 2 = z + 2xy \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Przekształcając układ mamy

$$\begin{cases} x(xy-1) = 2(yz-1) \\ y(yz-1) = 2(zx-1) \\ z(zx-1) = 2(xy-1) \end{cases}$$

Wymnażając stronami dostajemy

$$xyz(xy-1)(yz-1)(zx-1) = 8(yz-1)(zx-1)(xy-1).$$

Stąd

$$(xyz-8)(xy-1)(yz-1)(zx-1) = 0.$$

1°. Co najmniej jedna z xy, yz, zx równa się 1. Układ jest cykliczny, więc bez straty ogólności możemy przyjąć, że $xy = 1$. Wtedy z $x(xy-1) = 2(yz-1)$ mamy $yz = 1$, a $zy(yz-1) = 2(zx-1)$ mamy $zx = 1$. Zatem

$$x^2 = \frac{xy \cdot zx}{yz} = 1,$$

więc $x = 1$ lub $x = -1$. Wówczas $x = y = z = 1$ lub $x = y = z = -1$.
2°. Żadna z liczb xy, yz, zx nie jest równa 1. Wtedy $xyz = 8$.
Stąd $xy = \frac{8}{z}$, $yz = \frac{8}{x}$, $zx = \frac{8}{y}$. Wówczas

$$\begin{cases} \frac{8x}{z} + 2 = x + \frac{16}{x} \\ \frac{8y}{x} + 2 = y + \frac{16}{y} \\ \frac{8z}{y} + 2 = z + \frac{16}{z} \end{cases}$$

Układ ten jest cykliczny. Bez straty ogólności, możemy założyć, że $x \geq y$, $x \geq z$. Wtedy $x > 0$ (w przeciwnym wypadku $y \geq x \geq 0$ i $z \geq x \geq 0$, więc $xyz \geq 0$, a wiemy, że $xyz = 8$).
Wówczas $yz = \frac{8}{x} > 0$, stąd y i z tego samego znaku i $\frac{z}{y} > 0$.
Wtedy

$$z + \frac{16}{z} = \frac{8z}{y} + 2 > 2 > 0,$$

więc $z > 0$ i stąd $y > 0$.
Zatem $x, y, z > 0$, czyli $x^3 \geq xyz = 8$, więc $x \geq 2$.
Wówczas

$$y + \frac{16}{y} = \frac{8y}{z} \leq 4y + 2.$$

Po rozwiązaniu nierówności otrzymujemy

$$y \in [-\frac{8}{3}, 0) \cup [2, \infty),$$

ale wiemy, że $y > 0$, więc $y \geq 2$. Analogicznie dostajemy $z \geq 2$. Wówczas $x, y, z \geq 2$ oraz $8 = xyz \geq 8$. Stąd $x = y = z = 2$.

Zadanie 16. (16 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 1)
Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^2bc + ab^2c + abc^2 \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Rozwiązanie:
Podstawiając
$$x = bc,$$
$$y = ac,$$
oraz
$$z = ab,$$
otrzymujemy
$$xy + xz + xy \leq x^2 + y^2 + z^2.$$
Mnożąc nierówność stronami przez 2, przenosząc wszystkie składniki na jedną stronę i grupując odpowiednie wyrazy dostajemy
$$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2 \geq 0.$$
Zatem
$$(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0,$$
co kończy zadanie.

Zadanie 17. (62 Olimpiada Matematyczna, etap II, zadanie 1)
Rozwiąż układ równań, dla $x, y \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} (x-y)(x^3+y^3) = 7 \\ (x+y)(x^3-y^3) = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Przekształcając układ równań dostajemy
$$\begin{cases} (x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2) = 7 \\ (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2) = 3 \end{cases}$$
Dzielimy stronami
$$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} = \frac{7}{3}.$$
Wówczas
$$3(x^2-xy+y^2) = 7(x^2+xy+y^2).$$
Stąd
$$0 = 4x^2 + 10xy + 4y^2 = 2(2x+y)(x+2y).$$
Wtedy $x = -2y$ lub $y = -2x$. Dla $x = -2y$ mamy
$$\begin{cases} -3y(-7y^3) = 7 \\ -y(-9y^3) = 3 \end{cases}$$

Ostatecznie $y^4 = \frac{1}{3}$ i pary spełniające układ to $(\frac{2}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$ lub $(-\frac{2}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}})$.
Dla $y = -2x$ mamy

$$3x(-7x^3) = 7,$$

czyli

$$x^4 = -\frac{1}{3},$$

co jest niemożliwe.

Zadanie 18. (63 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 1)
Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} (x+y)^3 = 8z \\ (y+z)^3 = 8x \\ (z+x)^3 = 8y \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Odejmując drugie równanie od pierwszego mamy

$$8(z-x) = (x+y)^3 - (y+z)^3 =$$

$$\Big((x+y)-(y+z)\Big)\Big((x+y)^2 + (x+y)(y+z) + (y+z)^2\Big) =$$

$$= (x-z)\Big((x+y)^2 + (x+y)(y+z) + (y+z)^2\Big).$$

Czyli

$$(x-z)\Big((x+y)^2 + (x+y)(y+z) + (y+z)^2 + 8\Big).$$

Wobec tego $x = z$ lub $(x+y)^2 + (x+y)(y+z) + (y+z)^2 + 8 = 0$.
Drugi przypadek jest niemożliwy, ponieważ biorąc $a = x+y$ oraz $b = y+z$ mamy

$$a^2 + ab + b^2 + 8 = (a + \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b + 8 \geq 8.$$

W takim razie $x = z$.
Analogicznie odejmując trzecie równanie od drugiego dostajemy $x = y$.
Zatem $x = y = z = t$. Wówczas układ przyjmuje postać

$$(2t)^3 = 8t.$$

Równoważnie

$$t^3 = t.$$

Stąd $t = 0$ lub $t = 1$ lub $t = -1$. Wtedy rozwiązania naszego układu są postaci $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ oraz $(-1,-1,-1)$.

Zadanie 19. (48 Olimpiada Matematyczna, etap III, zadanie 2)
Dla $x, y, z \in \mathbb{R}$ wyznaczyć wszystkie trójki spełniające układ równań

$$\begin{cases} 3(x^2 + y^2 + z^2) = 1 \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = xyz(x + y + z)^3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że x, y, z spełniają powyższy układ równań. Z drugiego równania układu wynika, że

$$xyz(x + y + z) \geq 0.$$

Dalej mamy

$$0 \leq (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2,$$

co na mocy pierwszego równania układu daje

$$(x + y + z)^2 \leq 1.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} 0 &\leq (xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 = \\ &= 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2xyz(x + y + z), \end{aligned}$$

czyli

$$xyz(x + y + z) \leq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2.$$

Na mocy $xyz(x + y + z) \geq 0$ możemy wymnożyć stronami nierówności

$$(x + y + z)^2 \leq 1$$

oraz

$$xyz(x + y + z) \leq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2.$$

Wówczas dostajemy

$$xyz(x + y + z)^3 \leq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2.$$

Zgodnie z drugim równaniem układu powyższa nierówność ma być równością. To znaczy że albo obie mnożone stronami nierówności są równościami albo wyrażenia po obu stronach

$$xyz(x + y + z) \leq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$$

są równe 0.
W pierwszym przypadku znak równości w związkach

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z)^2$$

oraz

$$(x+y+z)^2 = 1$$

prowadzi do wniosku $x = y = z = \pm\frac{1}{3}$.
W drugim przypadku iloczyny xy, yz, zx są równe 0, czyli dwie spośród liczb x, y, z są równe zeru, a trzecia musi być równa $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, zgodnie z pierwszym równaniem układu. Wówczas rozwiązanie tworzy 8 trójek $\left(\epsilon\frac{1}{3}, \epsilon\frac{1}{3}, \epsilon\frac{1}{3}\right)$, $\left(\epsilon\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right)$, $\left(0, \epsilon\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $\left(0, 0, \epsilon\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, gdzie $\epsilon = \pm 1$.

Zadanie 20. (49 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 1)
Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} |x-y| - \frac{|x|}{x} = -1 \\ |2x-y| + |x+y-1| + |x-y| + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że x i y spełniają układ równań. Z pierwszej równości układu wynika, że $x \neq 0$ oraz $\frac{|x|}{x}$ nie może być równy -1, więc $\frac{|x|}{x} = 1$, stąd $x > 0$. Wówczas dalej z pierwszego równania układu $|x-y| = 0$. Podstawiając $x = y$ do drugiego równania i pamietając, że $x > 0$ mamy

$$|2x-x| + |x+x-1| + |x-x| + x - 1 = 0$$

$$|x| + |2x-1| + x - 1 = 0$$

$$2x - 1 + |2x-1| = 0.$$

Co jest równoważne $2x - 1 < 0$ oraz $x\frac{1}{2}$. Tak więc każde rozwiązanie (x, y) ukłądu równań ma postać $0 < x = y \leq \frac{1}{2}$. Na odwrót każda para (x, y) takiej postaci spełnia oba równania układu.

Zadanie 21. (59 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 1)
Rozwiąż w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^5 = 5y^3 - 4z \\ y^5 = 5z^3 - 4x \\ z^5 = 5x^3 - 4y \end{cases} \tag{21}$$

Rozwiązanie:
Rozwiązaniem (21) są cykliczne trójki $(x, y, z), (y, z, x), (z, x, y)$. Załóżmy, że x jest najmniejszym rozwiązaniem. Rozważmy przypadki:

1. $y \leq z$ $f(t) = t^5$ jest ściśle rosnącą funkcją. Zatem z drugiego i trzeciego równania (21) mamy
$$5z^3 = y^5 + 4x \leq z^5 + 4y = 5x^3.$$
Stąd $z \leq x$. Wówczas $y \leq z \leq x$, czyli $x = y = z = t$. Podstawiając otrzymujemy
$$t^5 = 5t^3 - 4t.$$
Równoważnie
$$t^5 - 5t^3 + 4t = 0,$$
czyli
$$t(t-2)(t+2)(t=1)(t+1) = 0.$$
Stąd
$$t = 0 \quad \text{lub} \quad t = 2 \quad \text{lub} \quad t = -2 \quad \text{lub} \quad t = 1 \quad \text{lub} \quad t = -1.$$

2. $y > z$, czyli $x \leq z < y$. Zatem z pierwszego i trzeciego równania układu (21) mamy
$$5y^3 = x^5 + 4z < z^5 + 4y = 5x^3.$$
Stąd
$$x \leq z < y < x,$$
co daje nam sprzeczność.

Rozwiązaniami układu (21) są następujące trójki liczb
$$(-2, -2, -2), (-1, -1, -1), (0, 0, 0)$$
$$(1, 1, 1), (2, 2, 2).$$

Zadanie 22. (54 Olimpiada Matematyczna, etap II, zadanie 1)
Rozwiąż w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań
$$\begin{cases} x^2 = yz + 1 \\ y^2 = zx + 2 \\ z^2 = zy + 4 \end{cases} \tag{22}$$

Rozwiązanie:
Mnożąc pierwsze równanie układu (22) przez y, drugie przez z i trzecie przez x oraz dodając je stronami otrzymujemy
$$x^2y + y^z + z^2x = yz^2 + y + z^2x + 2z + x^2y + 4x.$$

Stąd
$$y + 2z + 4x = 0. \tag{23}$$
Następnie mnożąc pierwsze równanie układu (22) przez z, drugie przez x i trzecie przez y oraz dodając je stronami otrzymujemy
$$x^2z + y^2x + z^2y = y^2z + z + x^2z + 2x + y^2x + 4y.$$
Stąd
$$z + 2x + 4y = 0. \tag{24}$$
Z (23) i (24) tworzymy układ równań postaci
$$\begin{cases} y + 2z + 4y = 0 \\ z + 2x + 4y = 0 \end{cases}$$
Mnożąc drugie równanie powyższego układu równań przez -2 oraz dodając stronami oba równania otrzymujemy
$$-7y = 0.$$
Zatem $y = 0$. Stąd mamy, że $x^2 = 1$, czyli $x = 1$ lub $x = -1$. Dla $x = 1, y = 0$ dostajemy, że $z = -2$, a dla $x = -1, y = 0$ dostajemy, że $z = 2$.

3. Równania

Zadanie 23. (62 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 1)
Wyznacz wszystkie takie pary (a, b) liczb wymiernych dodatnich spełniających równanie

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{4 + \sqrt{7}}.$$

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że $a, b > 0$ i spełniają powyższe równanie. Podnosząc obie strony równania do potęgi 2 mamy

$$a + 2\sqrt{ab} + b = 4 + \sqrt{7}.$$

Równoważnie

$$2\sqrt{ab} = 4 - a - b + \sqrt{7}.$$

Podnosząc obie strony równania do potęgi 2 dostajemy

$$4ab = (4 - a - b)^2 + 2\sqrt{7}(4 - a - b) + 7.$$

Równoważnie

$$4ab - (4 - a - b)^2 - 7 = 2\sqrt{7}(4 - a - b).$$

Wiemy, że $a, b \in \mathbb{W}$, a $\sqrt{7} \in \mathbb{NW}$. Zatem rozwiązanie będzie spełnione, gdy obie strony równania będą wynosić 0. Wówczas prawa strona równania ma postać

$$2\sqrt{7}(4 - a - b) = 0,$$

czyli

$$4 = a + b.$$

Natomiast lewa strona równania ma postać

$$4ab - (4 - a - b)^2 - 7 = 0,$$

czyli korzystając, że $4 - a - b = 0$ mamy

$$4ab = 7.$$

Stąd otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 4ab = 7 \end{cases}$$

Korzystając z zależności

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

i naszych danych $a+b=4$ i $4ab=7$ dostajemy, że

$$(a-b)^2 = 4^2 - 7 = 16 - 7 = 9.$$

Wówczas

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a-b=3 \end{cases} \tag{25}$$

lub

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a-b=-3 \end{cases} \tag{26}$$

Ostatecznie rozwiązaniem układu (25) jest para $a = 3,5$ i $b = 0,5$, a rozwiązaniem układu (26) jest para $a = 0,5$ i $b = 3,5$.

Zadanie 24. (66 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 5)
Rozwiązać w liczbach całkowitych x i y równanie

$$x^4 - 2x^3 + x = y^4 + 3y^2 + y.$$

Rozwiązanie:

- Wiemy, że dla $t \in \mathbb{Z}$ mamy $t^2 + t \geq 0$ oraz $t^2 - t \geq 0$.
- Dla $x = 0$ i $x = 1$ lewa strona równania zeruje się.
  Wówczas prawa strona

  $$y^4 + 2y^2 + (y^2 + y)$$

  jest sumą trzech nieujemnych składników, przy czym pierwsze dwa są równe zero jedynie dla $y = 0$. Wobec tego prawa strona jest równa 0 dla $y = 0$. Stąd mamy dwa rozwiązania $(0,0)$ i $(1,0)$.
- Od tego momentu zakładamy, że $x \neq 0$, $x \neq 1$. Stąd prawdą jest, że $x^2 - x \geq 2$.
- Korzystając z $x^2 - x \geq 2$ oraz $y^2 - y + 4 \geq 4$ mamy

  $$L = x^4 - 2x^3 + x = x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 + x =$$

  $$= (x^2-x)^2 - (x^2-x) > (x^2-x)^2 - 2(x^2-x) + 1 = (x^2-x-1)^2.$$

  i

  $$P = y^4 + 3y^2 + y = y^4 + 4y^2 + 4 - y^2 + y - 4 =$$
  $$= (y^2+2)^2 - (4 + y^2 - y) < (y^2+2)^2.$$

- Wówczas $L = P$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$(x^2 - x - 1)^2 < L = P < (y^2 + 2)^2$$
$$(x^2 - x - 1)^2 < (y^2 + 2)^2$$
$$x^2 - x - 1 < y^2 + 2.$$

- Ponadto $x^2 - x \geq 2$ oraz $y^2 + y \geq 0$. Wtedy

$$L = (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) < (x^2 - x)^2 - 1$$

oraz

$$P = y^4 + 3y^2 + y = y^4 + 2y^2 + 1 + y^2 + y - 1 =$$
$$= (y^2 + 1)^2 + (y^2 + y - 1) \geq (y^2 + 1)^2 - 1.$$

- Wówczas $L = P$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$(x^2 - x)^2 - 1 > L = P > (y^2 + 1)^2 - 1.$$

Stąd

$$x^2 - x)^2 > y^2 + 1.$$

- Dodając do $x^2 - x - 1 < y^2 + 2$ stronami 1 mamy

$$x^2 - x < y^2 + 3.$$

Wtedy

$$x^2 - x = y^2 + 2.$$

- Jeżeli $L = P$ jest prawdą, to prawdą jest też powyższy związek. Wtedy

$$L = (x^2 - x)^2 - (x^2 - x)$$

i

$$P = (y^2 + 2)^2 - (y^2 - y + 4)$$

są równe, co prowadzi do

$$x^2 - x = y^2 - y + 4.$$

- Na mocy

$$x^2 - x = y^2 - y + 4$$

oraz

$$x^2 - x = y^2 + 2$$

dostajemy

$$y^2 + 2 = y^2 - y + 4.$$

Stąd $y = 2$.

- Ponadto
$$x^2 - x = 4 + 2 = 6,$$
stąd $x = 3$ lub $x = -2$.
- Ostatecznie wszystkie rozwiązania to $(0,0)$, $(1,0)$, $(3,2)$ oraz $(-2,2)$.

Zadanie 25. (67 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 5)
Wykazać, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a i b równanie
$$(x^2 - y^2 - a)(x^2 - y^2 - b)(x^2 - y^2 - ab) = 0$$
ma przynajmniej jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych x i y.
Rozwiązanie:

- Jeśli a jest nieparzyste to przyjmujemy $x = \frac{a+1}{2}$ oraz $y = \frac{a-1}{2}$. Wówczas
$$\left(\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - a\right)$$
$$\left(\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - b\right)\left(\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - ab\right) = 0,$$
ponieważ zeruje się pierwszy nawias.
- Jeśli b jest nieparzyste to przyjmujemy $x = \frac{b+1}{2}$ oraz $y = \frac{b-1}{2}$. Wówczas
$$\left(\left(\frac{b+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-1}{2}\right)^2 - a\right)\left(\left(\frac{b+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-1}{2}\right)^2 - b\right)$$
$$\left(\left(\frac{b+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-1}{2}\right)^2 - ab\right) = 0,$$
ponieważ zeruje się drugi nawias.
- Jeśli a i b są parzyste to przyjmujemy $x = \frac{a+b}{2}$ oraz $y = \frac{a-b}{2}$. Wówczas
$$\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - a\right)$$
$$\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - b\right)\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - ab\right) = 0,$$
ponieważ zeruje się trzeci nawias.

Zadanie 26. (20 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 2)
Rozwiąż równanie w liczbach całkowitych
$$x + y = (x - y)^2. \tag{27}$$

Rozwiązanie:
Przypuśmy, że liczby x, y spełniają (27) i przyjmijmy, że

$$x - y = r \tag{28}$$

z (27) i (28) mamy

$$x + y = r^2. \tag{29}$$

Rozwiązując układ równań złożony z (28) i (29) oraz wyliczając z niego niewiadome x i y dostajemy

$$\begin{cases} x = \frac{r^2+r}{2} \\ y = \frac{r^2-r}{2}. \end{cases} \tag{30}$$

Jeśli zatem para liczb całkowitych x i y jest rozwiązaniem (27), to zachodzi (30), gdzie $r \in \mathbb{Z}$. Odwrotnie, jeśli $r \in \mathbb{Z}$, to liczby x i y spełniające (30) spełniają także (27), bo

1. $\frac{r^2+r}{2} + \frac{r^2-r}{2} = r^2$
2. $\frac{r^2+r}{2} - \frac{R62-r}{2} = r.$

Liczby te są całkowite, ponieważ $r^2 + r(r+1)$ i $r^2 - r = r(r-1)$, jako iloczyn kolejnych liczb całkowitych, są liczbami parzystymi. Zatem wszystkie rozwiązania (27) w liczbach całkowitych mają postać (30), gdzie $r \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 27. (65 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 1)
Wykaż, że jeśli liczby całkowite a, b, c spłeniają równanie

$$(a+3)^2 + (b+4)^2 - (c+5)^2 = a^2 + b^2 - c^2, \tag{31}$$

to wspólna wartość obu stron równania jest kwadratem liczby całkowitej.
Rozwiązanie:
Stosując wzory skróconego mnożenia otrzymujemy

$$a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 - c^2 - 10c - 25 = a^2 + b^2 - c^2.$$

Zatem

$$6a + 8b - 10c = 0.$$

Wyliczając c z powyższego równania i podstawiając jego wartość do prawej strony (31) mamy

$$\begin{aligned} a^2+b^2-\left(\frac{3}{5}b+\frac{4}{5}b\right)^2 &= a^2+b^2-\frac{9}{25}a^2-\frac{24}{25}ab-\frac{16}{25}b^2 = \\ &= \frac{16}{25}a^2-\frac{24}{25}ab+\frac{9}{25}b^2=\left(\frac{4}{5}a-\frac{3}{5}b\right)^2. \end{aligned}$$

Wystarczy pokazać, że $\frac{4}{5}a-\frac{3}{5}b$ jest liczbą całkowitą i to zakończy zadanie.

Przedstawmy powyższe wyrażenie w następującej postaci

$$\frac{4}{5}a-\frac{3}{5}b=\frac{9}{5}a-a+\frac{12}{5}b-3b=3\left(\frac{3}{5}a+\frac{4}{5}b\right)-a-3b=3c-a-3b.$$

Zatem $a^2+b^2-c^2$ jest kwadratem liczby $3c-a-3b$.

Zadanie 28. (54 Olimpiada Matematyczna, etap II, zadanie 1)
Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y spełniających równanie

$$(x+y)^2-2(xy)^2=1.$$

Rozwiązanie:
Dla dowolnych $x, y \geq 2$ mamy

$$xy=x\cdot\frac{y}{2}+y\cdot\frac{x}{2}\geq x+y.$$

Zatem

$$\frac{2xy}{2}\geq x+y,$$

czyli

$$xy\geq x+y.$$

Wtedy dla $x, y \geq 2$ mamy

$$2(xy)^2+1>(xy)^2\geq(x+y)^2.$$

Wówczas otrzymujemy sprzeczność, czyli $x, y \in \emptyset$. Stąd $x=1$ lub $y=1$.
Zatem dla $x=1$ otrzymujemy

$$(1+y)^2-2y^2=1.$$

Równoważnie

$$1+2y+y^2-2y^2=1.$$

Przekształcając mamy
$$2y - y^2 = 0.$$
Wyłączając wspólny czynnik przed nawias dostajemy
$$y(2 - y) = 0,$$
czyli $y = 0$ (sprzeczne z założeniem treści zadania) lub $y = 2$. Analogicznie, dla $y = 1$ otrzymujemy
$$(x + 1)^2 - 2x^2 = 1.$$
Równoważnie
$$x^2 + 2x + 1 - 2x^2 = 1.$$
Przekształcając mamy
$$2x - x^2 = 0.$$
Wyłączając wspólny czynnik przed nawias dostajemy
$$x(2 - x) = 0,$$
czyli $x = 0$ (sprzeczne z założeniem treści zadania) lub $x = 2$. Ostatecznie rozwiązaniem równania są dwie pary liczb całkowitych dodatnich postaci
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$
lub
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$
Zadanie 29. (6 Olimpiada Matematyczna, etap II, zadanie 1)
Oblicz $x^4 + y^4 + z^4$, wiedząc że $x + y + z = 0$ oraz $x^2 + y^2 + z^2 = a$, gdzie a jest liczbą dodatnią.
Rozwiązanie:

Stosując wzory skróconego mnożenia mamy

$$\begin{aligned}
x^4+y^4+z^4 &= (x^2+y^2+z^2)-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) = \\
&= a^2-2[(xy+yz+zx)^2-2x^2yz-2xy^2z-2xyz^2] = \\
&= a^2-2[(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)] = \\
&= a^2-2(xy+yz+zx)^2-4xyz(x+y+z) = \\
&= a^2-2(xy+yz+zx)^2 = \\
&= a^2-2\left[\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}\right]^2 = \\
&= a^2-2\left[-\frac{a}{2}\right]^2 = \\
&= a^2-\frac{2a^2}{4} = \\
&= a^2-\frac{a^2}{2} = \\
&= \frac{a^2}{2}.
\end{aligned}$$

Zadanie 30. (15 Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 1)
Udowodnić, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$$

Rozwiązanie:
Prowadzimy dowód indukcyjny. Dla $n=1$

$$1=1.$$

Założenie indukcyjne dla $k \in \mathbb{N}$

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+\cdots+k)^2.$$

Teza indukcyjna

$$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=(1+2+\cdots+n+(n+1))^2.$$

Dowód indukcyjny

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + (n+1)^3 \\
&= \Big(\frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)^3\Big)^2 \\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2\Big(\frac{1}{4}n^2 + n + 1\Big) \\
&= (n+1)^2\Big(\frac{1}{2}n + 1\Big)^2 \\
&= \Big(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\Big)^2 \\
&= (1 + 2 + \cdots + n + (n+1))^2
\end{aligned}$$