

## Kolokwium 1

Poniżej przedstawiono zadania jednej z wersji kolokwium. Zadania z drugiego zestawu można rozwiązać analogicznie. Wyjątkiem są Zadania 4 i 5, w ich przypadku zaprezentowano rozwiązania dla obu grup.

**Zadanie 1** (3 punkty). *Niech  $n \in \mathbb{N}$ .*

1. *Wykaż, że zbiór  $\mu_n(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$  wraz ze zwykłym mnożeniem liczb zespolonych jest podgrupą  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ .*
2. *Czy  $(\mu_n(\mathbb{C}), +)$  jest podgrupą  $(\mathbb{C}, +)$ ? Odpowiedź uzasadnij.*

*Rozwiązanie:*

1.  $(\mu_n(\mathbb{C}), \cdot)$  jest podgrupą  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall z, w \in \mu_n(\mathbb{C}) \quad zw^{-1} \in \mu_n(\mathbb{C}). \quad (1)$$

Ustalmy  $z, w \in \mu_n(\mathbb{C})$ . Wtedy, ponieważ  $z^n = 1$  i  $w^n = 1$ ,

$$(zw^{-1})^n = \left(\frac{z}{w}\right)^n = \frac{z^n}{w^n} = \frac{1}{1} = 1.$$

Zatem  $zw^{-1} \in \mu_n$ , co oznacza, że  $(\mu_n(\mathbb{C}), \cdot)$  jest podgrupą  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ .

2. Gdyby  $(\mu_n(\mathbb{C}), +)$  było podgrupą  $(\mathbb{C}, +)$ , wówczas dla dowolnych  $z, w \in \mu_n(\mathbb{C})$  mielibyśmy  $(z - w)^n = 1$  (jest to ten sam warunek co w (1), tyle że zapisany addytywnie). Zauważmy, że ten warunek nie jest spełniony gdyż  $1 \in \mu_n(\mathbb{C})$ , ale  $(1 - 1)^n = 0 \notin \mu_n(\mathbb{C})$ . Zatem  $(\mu_n(\mathbb{C}), +)$  nie jest podgrupą  $(\mathbb{C}, +)$ .

□

**Zadanie 2** (3 punkty). *Wyznacz najmniejszy zbiór generatorów dla grupy  $U(\mathbb{Z}_8)$ . Wypisz wszystkie podgrupy cykliczne. Czy są one podgrupami normalnymi?*

*Rozwiązanie:*

Przypomnijmy, że  $U(\mathbb{Z}_8) = \{1, 3, 5, 7\}$  jest grupą ze względu na mnożenie modulo 8. Sprawdzając po kolei wszystkie możliwe pojedyncze generatory (poza 1, która nigdzie nas nie doprowadzi), widzimy, że

$$\langle 3 \rangle = \{3, 1\}, \quad \langle 5 \rangle = \{5, 1\}, \quad \langle 7 \rangle = \{7, 1\}, \quad (2)$$

a więc żadna z tych grup nie jest równa  $U(\mathbb{Z}_8)$ . Natomiast:

$$\langle 3, 5 \rangle = \{3, 1, 5, 7\} = U(\mathbb{Z}_8).$$

Zatem zbiór  $\{3, 5\}$  zawiera najmniejszą liczbę generatorów, która jest niezbędna do wygenerowania całej grupy  $U(\mathbb{Z}_8)$ . (Nie jest to jedyny taki zbiór: również  $\langle 3, 7 \rangle = U(\mathbb{Z}_8)$  oraz  $\langle 5, 7 \rangle = U(\mathbb{Z}_8)$ . Zatem, ściśle rzecz biorąc, nie można powiedzieć, że zbiór  $\{3, 5\}$  jest najmniejszy, ale raczej że jest minimalny.)

Podgrupy cykliczne: grupa trywialna  $\{1\}$  oraz grupy wymienione w (2). Wszystkie one są normalne, gdyż mnożenie modulo 8 jest przemienne.

□

**Zadanie 3** (3 punkty). *Niech*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

1. Zapisz powyższą permutację w postaci iloczynu cykli rozłącznych.
2. Wyznacz rząd permutacji  $\sigma$ .
3. Czy jest to permutacja parzysta czy nieparzysta?

*Rozwiązanie:*

1.  $\sigma = (1\ 5)(2\ 8\ 3\ 7\ 4)(9\ 10)$
2. Łatwo obliczyć rzędy poszczególnych cykli:

$$r((1\ 5)) = 2, \quad r((9\ 10)) = 2, \quad r((2\ 8\ 3\ 7\ 4)) = 5.$$

Stąd  $r(\sigma) = 2 \cdot 5 = 10$ . Łatwo to sprawdzić składając permutację  $\sigma$  (zapisaną w postaci iloczynu cykli rozłącznych) ze sobą 10 razy.

3. Permutacja jest parzysta, gdyż jest iloczynem parzystej liczby transpozycji:

$$\sigma = (1\ 5)(2\ 8\ 3\ 7\ 4)(9\ 10) = (1\ 5)(2\ 4)(2\ 7)(2\ 3)(2\ 8)(9\ 10).$$

□

**Zadanie 4** (3 punkty).

- a) Wykaż, że  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)/(\mathbb{Z}_2 \times \{0\}) \cong \mathbb{Z}_3$ .
- b) Wykaż, że  $\mathbb{Z}_6/\{0, 3\} \cong \mathbb{Z}_3$ .

*Rozwiązanie:*

- a) Musimy znaleźć homomorfizm

$$\phi: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$$

taki, że  $\ker(\phi) = \mathbb{Z}_2 \times \{0\}$  oraz  $\text{Im}(\phi) = \mathbb{Z}_3$ .

Ponieważ przeciwdziedzina  $\phi$  wygląda tak jak dziedzina z tą różnicą, że brakuje pierwszej współrzędnej oraz to co powinno być na pierwszej współrzędnej jest w jądrze, spróbujmy wziąć

$$\phi((a, b)) = b.$$

Łatwo sprawdzić, że jest to homomorfizm (na ćwiczeniach rozwiązaliśmy podobny problem: zadanie 4 lub 1(h) z zestawu 3). Ponadto,

$$\ker(\phi) = \{(a, b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 : b = 0\} = \{(a, 0) : a \in \mathbb{Z}_2\} = \mathbb{Z}_2 \times \{0\}$$

oraz dla dowolnego  $b \in \mathbb{Z}_3$ :  $b = \phi((0, b))$ , a więc  $\phi$  jest "na". Na mocy twierdzenia o izomorfizmie,  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)/(\mathbb{Z}_2 \times \{0\}) \cong \mathbb{Z}_3$ .

b) Musimy znaleźć homomorfizm

$$\phi: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_3$$

taki, że  $\ker(\phi) = \{0, 3\}$  oraz  $\text{Im}(\phi) = \mathbb{Z}_3$ .

Działaniem w dziedzinie jest dodawanie modulo 6, a w przeciwdziedzinie - dodawanie modulo 3. To powinno nasunąć nam skojarzenie, żeby spróbować

$$\phi(a) = a \bmod 3.$$

Łatwo sprawdzić, że jest to homomorfizm (na ćwiczeniach rozwiązaliśmy podobny problem: zadanie 14(a) z zestawu 3). Ponadto,

$$\ker(\phi) = \{a \in \mathbb{Z}_6 : a \bmod 3 = 0\} = \{0, 3\}$$

oraz dla dowolnego  $b \in \mathbb{Z}_3$ :  $b = \phi(b)$ , a więc  $\phi$  jest "na". Na mocy twierdzenia o izomorfizmie,  $\mathbb{Z}_6/\{0, 3\} \cong \mathbb{Z}_3$ .

□

**Zadanie 5** (3 punkty).

a) Niech  $(G, \cdot)$  będzie grupą. Wykaż, że

$$\phi: G \rightarrow G, \quad \phi(a) = a^2$$

jest homomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy  $G$  jest grupą abelową.

b) Załóżmy, że  $(G, \cdot), (F, *)$  są grupami, a  $\phi: G \rightarrow F$  jest epimorfizmem grup (tzn.  $\phi$  jest homomorfizmem i surjekcją). Wykaż, że jeśli grupa  $G$  jest abelowa, to  $F$  też.

*Rozwiązanie:*

Rozwiążemy najpierw podpunkt a).

( $\Leftarrow$ ) Załóżmy, że  $G$  jest grupą abelową. Wówczas

$$\phi(ab) = (ab)^2 = abab = aabb = \phi(a)\phi(b),$$

a więc  $\phi$  jest homomorfizmem.

( $\Rightarrow$ ) Jeśli  $\phi$  jest homomorfizmem, to dla dowolnych  $a, b \in G$ :

$$\begin{aligned} \phi(ab) &= \phi(a)\phi(b) \\ (ab)^2 &= aabb \\ abab &= aabb \end{aligned}$$

Po przemnożeniu obu stron (skorzystamy z własności z zadania 10(f),(g) z zestawu 1) z prawej strony przez  $b^{-1}$  dostajemy

$$aba = aab,$$

a po przemnożeniu obu stron z lewej strony przez  $a^{-1}$ :

$$ba = ab,$$

co oznacza, że grupa  $G$  jest abelowa.

Przejdźmy teraz do podpunktu b).

Ustalmy  $x, y \in F$ . Musimy pokazać, że  $xy = yx$ . Ponieważ  $\phi$  jest surjekcją, to istnieją  $a, b \in G$  takie, że  $x = \phi(a)$  i  $y = \phi(b)$ . Dalej, ponieważ  $\phi$  jest homomorfizmem:

$$xy = \phi(a)\phi(b) = \phi(ab).$$

Co więcej, skoro grupa  $G$  jest abelowa, to

$$\phi(ab) = \phi(ba) = \phi(b)\phi(a) = yx.$$

Zatem  $xy = yx$ , jak należało wykazać.

□