

Kolokwium 2

Poniżej przedstawiono zadania z jednej wersji kolokwium. Zadania z drugiego zestawu można rozwiązać analogicznie. Jedynym wyjątkiem jest Zadanie 2, którego rozwiązanie jest przedstawione dla dwóch zestawów.

Zadanie 1 (4 punkty). *Rozwiąż równanie*

$$(1+i)z^2 - (1+5i)z + (-2+6i) = 0.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\Delta &= (1+5i)^2 - 4(1+i)(-2+6i) = 1+10i-25-4(-2+6i-2i-6) \\ &= -24+32+10i-16i = 8-6i\end{aligned}$$

Niech $\sqrt{\Delta} = a + bi$. Wtedy $\Delta = a^2 + 2abi - b^2$, a więc:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} \end{cases}$$

gdzie ostatnia równość pochodzi z $|a + bi|^2 = |\Delta|$. Dodając pierwszą i trzecią równość stronami otrzymujemy $2a^2 = 18$, a więc $a = \pm 3$, a $b = \frac{-3}{a} = \mp 1$, to znaczy $\sqrt{\Delta} = \pm(3-i)$. Stąd:

$$z_1 = \frac{1+5i-(3-i)}{2(1+i)} = \frac{-2+6i}{2(1+i)} = \frac{-1+3i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i,$$

$$z_2 = \frac{1+5i+(3-i)}{2(1+i)} = \frac{4+4i}{2(1+i)} = 2.$$

□

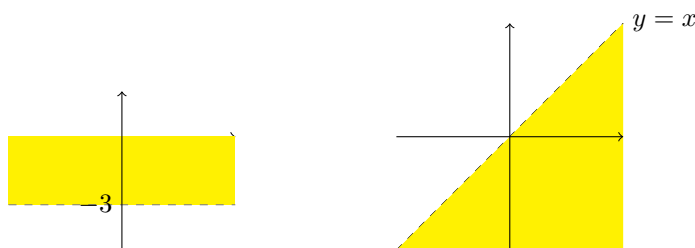
Zadanie 2 (4 punkty). *Jakie twory na płaszczyźnie zespolonej określają poniższe nierówności?*

1. $0 \leq \operatorname{Re}(iz) < 3$, $\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z \leq \pi$,

2. $1 < |z| < 5$, $\operatorname{Im}(z) < \operatorname{Im}(iz)$.

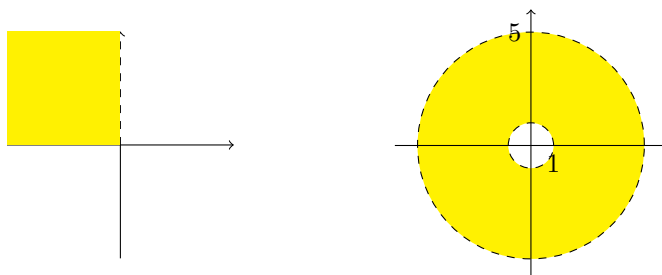
Rozwiązanie:

Niech $z = x + iy$. Wtedy $iz = -y + ix$, a więc $\operatorname{Re}(iz) = -y$ i $\operatorname{Im}(iz) = x$. Dlatego:



$$0 \leq \operatorname{Re}(iz) < 3$$

$$\operatorname{Im}(z) < \operatorname{Im}(iz)$$



$$\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z \leq \pi$$

$$1 < |z| < 5$$

□

Zadanie 3 (4 punkty). Oblicz moduł i argument główny liczby -1 . Następnie wyznacz wszystkie pierwiastki stopnia 4 z liczby -1 .

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $|-1| = 1$ oraz

$$-1 = 1(-1 + 0 \cdot i) = 1(\cos(\pi) + i \sin(\pi)),$$

a więc $\text{Arg}(-1) = \pi$. Oznaczmy przez w_1, w_2, w_3, w_4 pierwiastki czwartego stopnia z -1 . Z wzorów na pierwiastki czwartego stopnia mamy:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[4]{1} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ w_2 &= \cos\left(\frac{\pi + 2\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ w_3 &= \cos\left(\frac{\pi + 4\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 4\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ w_4 &= \cos\left(\frac{\pi + 6\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 6\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

□

Zadanie 4 (4 punkty).

- a) Dobierz liczby $a, b \in \mathbb{Z}_{11}$, aby wielomian $X^5 - 5X^4 - 4X^3 + 10X^2 + aX + b \in \mathbb{Z}_{11}[X]$ przy dzieleniu przez $X + 2$ dawał resztę 3, a przy dzieleniu przez $X - 5$ resztę 6.
- b) Pewien wielomian o współczynnikach z $\mathbb{Z}_7$ przy dzieleniu przez $X + 3$ daje resztę 3, a przy dzieleniu przez $X - 1$ resztę 4. Jaką resztę daje ten wielomian przy dzieleniu przez $(X + 3)(X - 1)$?

Rozwiązanie:

- a) Oznaczmy $g(X) = X^5 - 5X^4 - 4X^3 + 10X^2 + aX + b$. To zadanie można zrobić na kilka sposobów: dzieląc z resztą wielomian $g(X)$ przez $X + 2$ i $X - 5$ (pod kreską lub korzystając ze schematu Hornera) lub korzystając z faktu (tw. o dzieleniu z resztą), że istnieją wielomiany $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}_{11}$ takie, że

$$X^5 - 5X^4 - 4X^3 + 10X^2 + aX + b = f_1(X)(X + 2) + 3$$

oraz

$$X^5 - 5X^4 - 4X^3 + 10X^2 + aX + b = f_2(X)(X - 5) + 6.$$

Tu skorzystamy z drugiego sposobu. Z jednej strony $g(-2) = 3$ i $g(5) = 6$, a z drugiej (w $\mathbb{Z}_{11}$):

$$\begin{aligned} g(-2) &= (-2)^5 - 5 \cdot (-2)^4 - 4 \cdot (-2)^3 + 10 \cdot (-2)^2 - 2a + b \\ &= 1 - 5 \cdot 5 + 4 \cdot 8 + 7 - 2a + b = 4 - 2a + b \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} g(5) &= 5^5 - 5 \cdot 5^4 - 4 \cdot 5^3 + 10 \cdot 5^2 + 5a + b = -4 \cdot 4 + 8 + 5a + b \\ &= 3 + 5a + b. \end{aligned}$$

Stąd dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} 4 - 2a + b = 3 \\ 3 + 5a + b = 6 \end{cases}$$

Odejmując stronami dostajemy $7a - 1 = 3$, a więc $a = 4 \cdot 7^{-1} = 4 \cdot 8 = -1$ (7^{-1} można wyznaczyć korzystając z uogólnionego algorytmu Euklidesa). Wtedy $b = -1 + 2a = -3 = 8$.

- b) Oznaczmy wielomian z treści zadania przez $g(X)$. Na mocy twierdzenia o dzieleniu z resztą, istnieją wielomiany $f_1, f_2, f_3, R \in \mathbb{Z}_7[X]$ takie, że:

$$g(X) = f_1(X)(X+3) + 3, \quad g(X) = f_2(X)(X-1) + 4$$

oraz

$$g(X) = f_3(X)(X+3)(X-1) + R(X),$$

a ponadto $\deg R(X) \leq 1$. Możemy więc zapisać $R(X) = aX + b \in \mathbb{Z}_7[X]$. Podobnie jak powyżej,

$$3 = g(-3) = R(-3) = -3a + b \quad 4 = g(1) = R(1) = a + b,$$

co daje układ równań:

$$\begin{cases} -3a + b = 3 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

Stąd $4a = 1$, a więc $a = 1 \cdot 4^{-1} = 2$ oraz $b = 4 - a = 2$. Wobec tego $R(X) = 2X + 2$.

□

Zadanie 5 (4 punkty). Rozwiąż poniższy układ równań w zależności od parametru λ . Zrób to najpierw w $\mathbb{Q}$, a potem w $\mathbb{Z}_3$.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - t = 0 \\ 6x - 3y + \lambda z - 4t = 0 \\ x - 4y + 4z - 5t = 5 \\ 2\lambda z - 2t = -1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Najpierw zapiszemy ten układ w postaci macierzowej, na której będziemy wykonywać operacje elementarne, tak aby doprowadzić ją do postaci zredukowanej.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & \lambda & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2\lambda & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} I \mapsto I - 2III \\ II \mapsto II - 6III \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -5 & 9 & -10 \\ 0 & 21 & \lambda - 24 & 26 & -30 \\ 1 & -4 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2\lambda & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{l} II \mapsto II - 3I \\ I \leftrightarrow III \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & \lambda - 9 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 9 & -10 \\ 0 & 0 & 2\lambda & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} II \mapsto -2II \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -2\lambda + 18 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 9 & -10 \\ 0 & 0 & 2\lambda & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{l} II \leftrightarrow III \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & 9 & -10 \\ 0 & 0 & -2\lambda + 18 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} III \mapsto III + IV \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & 9 & -10 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2\lambda & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zauważmy, że powyższe operacje mogły być wykonane zarówno w $\mathbb{Q}$ jak i w $\mathbb{Z}_3$.

Będziemy kontynuować wykonując obliczenia w $\mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} & \begin{array}{l} I \mapsto I - \frac{4}{18}III \\ II \mapsto II + \frac{5}{18}III \\ III \mapsto \frac{1}{18}III \\ IV \mapsto IV - \frac{\lambda}{9}III \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -5 & 5 + 4/18 \\ 0 & 7 & 0 & 9 & -10 + 5/18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/18 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 + \lambda/9 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{l} I \mapsto I - 2IV \\ II \mapsto II + 4IV \\ IV \mapsto -\frac{1}{2}IV \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 & 7 + (4 - 4\lambda)/18 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & -14 + (5 + 8\lambda)/18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (9 - \lambda)/18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{matrix} I \mapsto I + \frac{4}{7}II \\ II \mapsto \frac{1}{7}II \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/7 & -1 + (48 + 4\lambda)/126 \\ 0 & 1 & 0 & 1/7 & -2 + (5 + 8\lambda)/126 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (9 - \lambda)/18 \end{pmatrix} \\
\begin{matrix} I \mapsto I + \frac{3}{7}IV \\ II \mapsto II - \frac{1}{7}IV \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 + (75 + \lambda)/126 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 + (-4 + 9\lambda)/126 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (9 - \lambda)/18 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zatem, niezależnie od wartości parametru λ , układ równań ma jedno rozwiązanie w $\mathbb{Q}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + (75 + \lambda)/126 \\ -2 + (-4 + 9\lambda)/126 \\ -1/18 \\ (9 - \lambda)/18 \end{pmatrix}$$

Zobaczmy teraz jak wygląda sytuacja w $\mathbb{Z}_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & 9 & -10 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2\lambda & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ w } \mathbb{Z}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Trzeci wiersz możemy odczytać jako $0 = -1$. Zatem, niezależnie od wartości parametru λ , układ równań jest sprzeczny w $\mathbb{Z}_3$.

□