# Kolokwium

**Zadanie 1.** Zdefiniuj zbiór liczb całkowitych za pomocą komendy `\Z`.

**Zadanie 2.** Zdefiniuj w preambule jednoargumentową komendę `\bo` do użycia w środowisku matematycznym, która będzie zwracać argument napisany pogrubioną czcionką, np. kod `$\bo{g}$`, `$\bo{Z}$` utworzy odpowiednio $\mathbf{g}$ i $\mathbf{Z}$.

**Zadanie 3** (trochę trudniejsze)**.** Zdefiniuj jednoargumentową komendę `\T` do użycia w środowisku matematycznym, która będzie podnosić do potęgi $t$ po lewej stronie, np. kod `$\T{\mu}$` będzie oznaczał ${}^t\mu$. Przyda ci się to do następnego zadania.

**Zadanie 4.** Przepisz tekst matematyczny (razem z bibliografią) znajdujący się na następnych dwóch stronach. Aby przyspieszyć pisanie możesz kopiować fragmenty tekstu, definiować nowe komendy, itp. Zwróć uwagę, że pojawiające się w tekście napisy takie jak [2, Chapter III], [1], itp. odnoszą się do prac wspomnianych w bibliografii, a więc numerów 1 i 2 nie można wpisać "samemu", muszą one zostać "wygenerowane" przez TEX. Podobnie, nie oszukuj przy odwoływaniu się do twierdzenia poniżej, użyj etykiet.
Symbole $\times$, det, $\prod$ otrzymasz za pomocą kodów `\times`, `\det`, `\prod` (które mpgą być użyte jedynie w środowisku matematycznym).
(Nie przejmuj się jeśli zamiast References wyświetli ci się napis Bibliography.)

**Zadanie 5.** Oba pliki `.tex` i `.pdf` wyślij na maila `jmarzec@math.us.edu.pl`

In order to state the main theorem of this section we need to introduce a bit more notation. We write $\alpha_S(s,\chi)$ for the Siegel series attached to the symmetric matrix $S$ and to the character $\chi$, as defined for example in [2, Chapter III]. Moreover, by [2, Theorem 13.6], we have

$$\alpha_S(s,\chi) = \left( L(s,\chi) \prod_{i=1}^{[l/2]} L(2s-2i,\chi^2) \right)^{-1} g_S(s,\chi) \tag{1}$$

for some analytic function $g_S(s,\chi)$ of the form $g_S(s,\chi) = G(\chi(\pi)q^{-s})$ for some polynomial $G(X) \in \mathbb{Z}[X]$ of constant term one. Moreover if $S$ is regular, that is, $\det(2S) = \mathfrak{o}^\times$ for $l$ even and $\det(2S) = 2\mathfrak{o}^\times$ for $l$ odd, then $g_S(s,\chi) = 1$.

The following theorem generalizes a result due to Murase and Sugano [1], where the case of $l = 1$ and $\chi$ trivial is considered.

**Theorem 1.** *With the notation as above,*

$$L(\xi,\chi,s) = \frac{g_S(s+n+l/2,\chi)}{g_S(s+l/2,\chi)} \Lambda(\chi,s) \int_{\mathbf{Z}\backslash\mathbf{G}} \nu_{\chi,s+n+l/2}(\mathbf{g})\phi_\xi(\mathbf{g})d\mathbf{g}\Lambda(\chi,s),$$

*where*

$$\Lambda(\chi,s) := \begin{cases} \prod_{i=1}^n L(2s+2n-2i,\chi^2) & \text{if } l \in 2\mathbb{Z}, \\ \prod_{i=1}^n L(2s+2n-2i+1,\chi^2) & \text{if } l \notin 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

*In particular,*

$$L(\xi,\chi,s) = B(\xi,\chi,s+n+l/2)\frac{g_S(s+n+l/2,\chi)}{g_S(s+l/2,\chi)}\Lambda(\chi,s).$$

The rest of this subsection is devoted to a proof of Theorem 1. First we extend some calculations of Murase and Sugano [1]. Denote by $\sigma_{n_1,n_2}$ the characteristic function of $M_{n_1,n_2}(\mathfrak{o})$ and let

$$F(s,\chi,\mathbf{g}) := F(s,\chi,hg) :=$$
$$\int_{GL_{2n+l}(F_v)} \sigma_{2n+l,4n+2l}\left(\left(y\begin{pmatrix} 1_l & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}, y\alpha(h)\right)\right)\chi(\det(y))|\det(y)|^{s+n+l/2}d^*y,$$

where for $h = (\lambda,\mu,\kappa) \in H$ we set

$$\alpha(h) := \begin{pmatrix} \kappa - \lambda\,{}^t\mu & -\lambda & -\mu \\ {}^t\mu & 1_n & 0 \\ {}^t\lambda & 0 & 1_n \end{pmatrix}.$$

Define also

$$\mathcal{F}(s,\chi,\mathbf{g}) := \int_{\mathcal{Z}} F(s,\chi,(0,0,\kappa)\mathbf{g})\psi_S(\kappa)d\kappa.$$

## References

[1] A. Murase and T. Sugano, Whittaker-Shintani functions on the symplectic group of Fourier-Jacobi type, *Compositio Mathematica*, 79 (1991), 321-349.

[2] G. Shimura, Euler Products and Eisenstein Series, Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Number 93, AMS, 1996.