

Zadanie 1 (4 punkty).

- a) Wyznacz dzielniki zera w pierścieniu $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$.
- b) Czy elementy wyznaczone powyżej tworzą ideał pierścienia $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$?
Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:

- a) Najpierw zauważmy, że $a \in \mathbb{Z}_4$ jest dzielnikiem zera w $\mathbb{Z}_4$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $x \in \mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ takie, że $ax = 0$. To się może zdarzyć tylko gdy $a = 0$ (i x dowolne) lub $a = 2$ (i $x = 2$). Zatem (w podobny sposób korzystając z definicji dzielnika zera) dzielniki zera w pierścieniu $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ są postaci $(0, b), (2, b), (b, 0), (b, 2)$, gdzie $b \in \mathbb{Z}_4$.
- b) Oznaczmy przez $\mathcal{D}$ zbiór dzielników zera w pierścieniu $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$. Zbiór $\mathcal{D}$ nie jest ideałem pierścienia $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ ponieważ nie zawsze różnica dwóch elementów z tego zbioru dalej do niego należy, np.:

$$(0, 3) \in \mathcal{D} \text{ oraz } (2, 0) \in \mathcal{D}, \text{ ale } (0, 3) - (2, 0) = (2, 3) \notin \mathcal{D}.$$

□

Zadanie 2 (2 punkty). W pierścieniu ilorazowym $\mathbb{Z}[X]/I$, gdzie $I = (X^2)$ wyznacz element odwrotny do elementu $(-1 + X) + I$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\mathbb{Z}[X]/(X^2) = \{a + bX + (X^2) : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Ponieważ elementem neutralnym pierścienia ilorazowego jest $1 + I$, musimy rozwiązać równanie postaci

$$((-1 + X) + I)(a + bX + I) = 1 + I, \quad \text{gdzie } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Korzystając z definicji mnożenia i dodawania w pierścieniu ilorazowym mamy:

$$\begin{aligned} ((-1 + X) + I)(a + bX + I) &= 1 + I \\ -a - bX + aX + bX^2 + I &= 1 + I \\ -1 - a + X(a - b) + I &= I \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z tego, że

$$bX^2 + (X^2) = bX^2 + \{f(X) \cdot X^2 : f \in \mathbb{Z}[X]\} = \{(b + f(X)) \cdot X^2 : f \in \mathbb{Z}[X]\} = (X^2).$$

Podobnie:

$$\begin{aligned} -1 - a + X(a - b) + I = I &\Leftrightarrow -1 - a + X(a - b) \in I \\ \Leftrightarrow -1 - a = 0 \quad \text{i} \quad a - b = 0 &\Leftrightarrow a = b = -1 \end{aligned}$$

Zatem elementem odwrotnym do $-1 + X + I$ w $\mathbb{Z}[X]/(X^2)$ jest $-1 - X + (X^2)$.

□