Zadanie (punkty: 2+2+1+1)**.** *Rozważmy grupę* $U(\mathbb{Z}_{16}) = \{a \in \mathbb{Z}_{16} : \mathrm{NWD}(a, 16) = 1\}$.

a) Wyznacz podgrupę generowaną przez zbiór $\{7, 15\}$*, tj. grupę* $< 7, 15 >$*.*

b) Znajdź wszystkie (rozłączne) warstwy grupy $U(\mathbb{Z}_{16})$ *względem podgrupy* $< 7, 15 >$*. (Jeśli nie zrobiłe(a)ś podpunktu a): znajdź warstwy grupy* $U(\mathbb{Z}_{16})$ *względem podgrupy* $< 3 >$*.)*

c) Ile wynosi indeks $(U(\mathbb{Z}_{16}) :< 7, 15 >)$*? (Jeśli nie zrobiłe(a)ś podpunktu a): ile wynosi indeks* $(U(\mathbb{Z}_{16}) :< 3 >)$*?)*

d) Jaki jest rząd liczby 7 *w tej grupie?*

Rozwiązanie:
Przede wszystkim zauważmy, że $U(\mathbb{Z}_{16}) = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ jest grupą ze względu na mnożenie. (Ponieważ $1 + 3 = 4 \notin U(\mathbb{Z}_{16})$, więc dodawanie nawet nie jest działaniem w $U(\mathbb{Z}_{16})$.)

a) $< 7, 15 >= \{7, 1, 15, 9\}$
W celu wyznaczenia tej grupy najpierw napisaliśmy wszystkie potęgi liczby 7 (modulo 16), potem wszystkie potęgi liczby 15 (zauważ, że modulo 16: $15 = -1$), a następnie kombinacje potęg liczby 7 i potęg liczby 15.
(Wykład: Twierdzenie 1.4)

b) Zauważmy, że
$$U(\mathbb{Z}_{16}) = 1 \cdot \{7, 1, 15, 9\} \quad \cup \quad \underbrace{3 \cdot \{7, 1, 15, 9\}}_{\{3\cdot 7, 3\cdot 1, 3\cdot 15, 3\cdot 9\}=\{5,3,13,11\}} .$$
Zatem warstwy (lewostronne) grupy $U(\mathbb{Z}_{16})$ względem podgrupy $< 7, 15 >$ to:
$1\cdot < 7, 15 >$, $\quad 3\cdot < 7, 15 >$.
(Wykład: Definicja 2.2, Wniosek 2.1 (2),(4) - jeśli warstwy są różne, to są rozłączne; suma wszystkich warstw (np. lewostronnych) daje całą grupę)

c) Ponieważ $U(\mathbb{Z}_{16})$ ma dwie warstwy lewostronne względem podgrupy $< 7, 15 >$, więc
$$(U(\mathbb{Z}_{16}) :< 7, 15 >) = 2.$$
(Wykład: Definicja 2.4)

d) Ponieważ $< 7 >= \{7, 1\}$ ma dwa elementy (czyli jest rzędu 2), więc $r(7) = 2$.
(Wykład: Definicja 2.6, ewentualnie Twierdzenie 2.6)

$\square$