

1 Badanie przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej

Polega ono na określeniu w jakich przedziałach funkcja rośnie/maleje, w jakich punktach ma maksima/minima lokalne. Jeśli chcemy poddać funkcję bardziej szczegółowej analizie, wyznaczamy również jej asymptoty, miejsca zerowe i tzw. punkty przegięcia (w nich zmienia się wklęsłość/wypukłość funkcji).

Definicja 1. Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 *maksimum lokalne*, jeśli istnieje takie otoczenie U punktu x_0 , że

$$\bigwedge_{x \in U} f(x) < f(x_0).$$

Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 *minimum lokalne*, jeśli istnieje takie otoczenie U punktu x_0 , że

$$\bigwedge_{x \in U} f(x) > f(x_0).$$

Twierdzenie 1 (Fermata). *Jeżeli funkcja różniczkowalna w przedziale osiąga w pewnym punkcie wewnętrznym $x = x_0$ tego przedziału ekstremum lokalne (tj. minimum albo maksimum), to: $f'(x_0) = 0$.*

Twierdzenie 2.

1. *Jeżeli pochodna funkcji jest w pewnym przedziale dodatnia, to funkcja jest w tym przedziale rosnąca.*
2. *Jeżeli pochodna funkcji jest w pewnym przedziale ujemna, to funkcja jest w tym przedziale malejąca.*

Zadanie 1.1. Zbadaj przebieg zmienności następujących funkcji:

a) $f(x) = -x^3 + 9x$

b) $f(x) = x + \frac{4}{x-5}$

c) $f(x) = x + 2\sqrt{-x}$

d) $f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x-3}$

Zadanie 1.2. Wydajność tlenku azotu NO z mieszaniny $a\%$ tlenu i $(100-a)\%$ azotu w temperaturze $160^\circ C$ i pod ciśnieniem normalnym określa wzór

$$x = \sqrt{Ka(100-a)} - 25K,$$

gdzie $K > 0$ jest stałą równowagi reakcji dla danej temperatury i danego ciśnienia. Oblicz przy jakiej procentowej zawartości tlenu $a\%$ w mieszaninie wydajność tlenku azotu NO będzie maksymalna.

2 Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych

Definicja 2. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiorem otwartym (nie będącym sumą dwóch niepustych zbiorów otwartych rozłącznych), $(x_0, y_0) \in D$. Mówimy, że funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie (x_0, y_0) :

- maksimum lokalne słabe, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo S punktu (x_0, y_0) , że

$$\bigwedge_{x \in S} f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Jeżeli $\bigwedge_{x \in S} f(x, y) < f(x_0, y_0)$, to f ma maksimum lokalne mocne w (x_0, y_0) .

- minimum lokalne słabe, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo S punktu (x_0, y_0) , że

$$\bigwedge_{x \in S} f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Jeżeli $\bigwedge_{x \in S} f(x, y) > f(x_0, y_0)$, to f ma minimum lokalne mocne w (x_0, y_0) .

Twierdzenie 3. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie (x_0, y_0) maksimum lub minimum lokalne (słabe lub mocne) oraz pochodne cząstkowe $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)}$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)}$ istnieją, to

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} = 0.$$

Ponadto, jeżeli w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) istnieją pochodne cząstkowe drugiego rzędu i są ciągłe, oraz

$$\delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(x_0, y_0)} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x_0, y_0)} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x_0, y_0)} < 0,$$

to f ma w punkcie (x_0, y_0)

- maksimum lokalne (słabe lub mocne), gdy $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x_0, y_0)} < 0$ lub $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x_0, y_0)} < 0$;
- minimum lokalne (słabe lub mocne), gdy $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x_0, y_0)} > 0$ lub $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x_0, y_0)} > 0$.

Uwaga.

1. Jeżeli powyżej mamy $\delta > 0$, to f nie ma ani maksimum ani minimum lokalnego w (x_0, y_0) .
2. Jeżeli powyżej mamy $\delta = 0$, to nie wiadomo czy f ma w (x_0, y_0) maksimum lub minimum lokalne (zależy od f).

Zadanie 2.1. Znajdź minima i maksima lokalne funkcji (o ile istnieją):

- a) $f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$
- b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$
- c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ stała.

Zadanie 2.2. Jakie wymiary powinien mieć otwarty zbiornik prostopadłościenny o objętości 32 cm^3 tak aby jego pole powierzchni było minimalne?

3 Funkcja uwikłana jednej zmiennej

Czasem może się zdarzyć, że mamy do dyspozycji tylko funkcję, która nie jest bezpośrednio dana żadnym wzorem, np. $x^2 + y^2 = 5$ lub $e^{x+y} - \sin(xy) - 1 = 0$. Oczywiście, można na te wyrażenia patrzeć jako na zbiory punktów (x, y) , które spełniają odpowiednie równania. Jednakże, bez wątpienia, dopuszczalne wartości dla y zależą od x , tzn. możemy traktować y jako funkcję zmiennej x : $y = y(x)$. Czy da się wyznaczyć y z takich uwikłanych wzorów? Czy będzie on wyznaczony jednoznacznie?

Jeśli $x^2 + y^2 = 5$, to łatwo zauważyć, że $y = \pm\sqrt{5 - x^2}$. Funkcja y wyraża się przez dwa wzory. Ale jeśli sprecyzujemy, że interesuje nas funkcja, której wykres zawiera punkt $(1, -2)$, to dostajemy już tylko jedną możliwość: $y = -\sqrt{5 - x^2}$. Dla funkcji uwikłanej danej wzorem $e^{x+y} - \sin(xy) - 1 = 0$ wyprowadzenie wzoru na y wydaje się niemożliwe... Jak w związku z tym badać ekstrema takich funkcji? Jak obliczyć pochodną $y'(x)$?

Twierdzenie o funkcji uwikłanej podaje nam konkretne warunki, które mówią w jakich przypadkach z funkcji $F(x, y) = 0$, której wykres zawiera punkt (x_0, y_0) , można wyznaczyć y w sposób jednoznaczny (aczkolwiek nie mówi jak):

1. F jest ciągła w otoczeniu punktu (x_0, y_0) ,
2. pochodna cząstkowa $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)}$ istnieje i jest różna od zera.

Żeby wyznaczyć pochodną $y'(x)$, w miejsce y wpisujemy $y(x)$ i całość różniczkujemy jako funkcję (jednej) zmiennej x , traktując $y(x)$ jako funkcję złożoną. Np. dla funkcji uwikłanej danej wzorem

$$e^{x+y} - \sin(xy) - 1 = 0$$

postępujemy następująco.

Przede wszystkim, różniczkujemy stronami równanie

$$e^{x+y(x)} - \sin(xy(x)) - 1 = 0.$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned} e^{x+y(x)} \cdot (x + y(x))' - \cos(xy(x)) \cdot (xy(x))' &= 0 \\ e^{x+y(x)} \cdot (1 + y'(x)) - \cos(xy(x)) \cdot (y(x) + xy'(x)) &= 0, \end{aligned}$$

a stąd

$$\begin{aligned} y'(x)(e^{x+y(x)} - \cos(xy(x))x) &= \cos(xy(x))y(x) - e^{x+y(x)} \\ y'(x) &= \frac{\cos(xy(x))y(x) - e^{x+y(x)}}{e^{x+y(x)} - \cos(xy(x))x}, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość (a więc w szczególności istnienie $y'(x)$) ma sens tylko w tych punktach (x, y) dla których $e^{x+y} - \cos(xy)x \neq 0$.

Przy okazji zauważmy, że jeśli oznaczymy $F(x, y) = e^{x+y} - \sin(xy) - 1$, to

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{x+y} - \cos(xy)x.$$

A więc pochodna $y'(x)$ istnieje tylko w tych punktach (x_0, y_0) dla których pochodna cząstkowa $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)}$ jest różna od zera, zgodnie z założeniem w twierdzeniu o funkcji uwikłanej (pozostałe założenia twierdzenia są spełnione: pochodna $\frac{\partial F}{\partial y}$ istnieje w każdym punkcie, skoro umiemy podać jej wzór, a F jako złożenie funkcji ciągłych jest ciągła w każdym punkcie).

Zadanie 3.1. Znajdź pierwsze pochodne funkcji uwikłanych określonych równaniami:

a) $x^3y - xy^3 = a^4$, gdzie a jest pewną stałą

b) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$.

Zadanie 3.2. Znajdź drugą pochodną w punkcie $(0, 1)$ funkcji uwikłanej zadanej równaniem

$$x^2 + 2xy + y^2 + x - y - 1 = 0.$$

3.1 Ekstrema funkcji uwikłanej jednej zmiennej

Jak zauważyliśmy powyżej, jeśli mamy do czynienia z funkcją uwikłaną $F(x, y) = 0$, gdzie y zależy od zmiennej x , to o ile w otoczeniu danego punktu (x_0, y_0) funkcja $y(x)$ może być przedstawiona w sposób jednoznaczny (tzn. założenia z twierdzenia o funkcji uwikłanej są spełnione), to nie ma dodatkowych problemów z wyznaczeniem pochodnej $y'(x)$. Możemy więc szukać ekstremów lokalnych tej funkcji w podobny sposób jak w przypadku funkcji jednej zmiennej: warunek $y'(x) = 0$ musi być spełniony.

Założmy, że w pewnym punkcie (x_0, y_0) należącym do wykresu funkcji $F(x, y) = 0$ (tzn. $F(x_0, y_0) = 0$) pochodna $y'(x_0)$ istnieje oraz jest równa zero. Jeśli ponadto:

- $y''(x_0) < 0$, to funkcja $F(x, y) = 0$ osiąga w punkcie (x_0, y_0) maksimum lokalne.
- $y''(x_0) > 0$, to funkcja $F(x, y) = 0$ osiąga w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne.

Zadanie 3.3. Zbadaj ekstrema funkcji uwikłanych danych równaniami:

a) $x^2 + 2xy + y^2 - 4y - \frac{1}{4} = 0$,

b) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$,

c) $x^5 + y^4 - 4xy^2 = 0$.

Literatura

- [1] J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, WNT, Warszawa, 1994.
- [2] W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, cz. I*, PWN, Warszawa 1999.
- [3] W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, cz. II*, PWN, Warszawa 1993.