Załącznik nr 2 do wniosku o wszczęcie postępowania habilitacyjnego - autoreferat w języku polskim

1. Imię i nazwisko: Włodzimierz Fechner.

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej:

    1. magister matematyki: Uniwersytet Śląski, Instytut Matematyki, 1 czerwca 2003 r.
       tytuł pracy magisterskiej: *Równania funkcyjne w przestrzeni Rätza*,
       promotor: prof. dr hab. Roman Ger.

    2. doktor nauk matematycznych: Uniwersytet Śląski, Instytut Matematyki, 2 lipca 2007 r.
       tytuł rozprawy doktorskiej: *Nierówności funkcyjne związane z funkcjonałami kwadratowymi*,
       promotor: prof. dr hab. Roman Ger.

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

    1. 15 marca 2007 r. - 30 czerwca 2007 r.: asystent (75% etatu), Uniwersytet Śląski, Instytut Matematyki.

    2. 1 października 2007 r. - obecnie: adiunkt (pełny etat), Uniwersytet Śląski, Instytut Matematyki.

4. Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. Nr 65, poz. 595, z późń. zm.):

    (a) Jednotematyczny cykl publikacji pt. *Nierówności funkcyjne o wielu zmiennych.*

    (b) Lista prac składających się na jednotematyczny cykl publikacji:

    [F1] Włodzimierz Fechner, *Functional characterization of a sharpening of the triangle inequality*, Math. Inequal. Appl. 13/3 (2010), 571–578.

    [F2] Włodzimierz Fechner, *On some composite functional inequalities*, Aequationes Math. 79/3 (2010), 307–314.

[F3] Włodzimierz Fechner, *Four inequalities of Volkmann type*, J. Math. Inequal. 5/4 (2011), 463–472.

[F4] Włodzimierz Fechner, *A note on alienation for functional inequalities*, J. Math. Anal. Appl. 385 (2012), 202–207.

[F5] Włodzimierz Fechner, *Hlawka's functional inequality*, Aequationes Math. (2012) doi=10.1007/s00010-012-0178-2.

[F6] Włodzimierz Fechner, *Inequalities connected with averaging operators*, Indagationes Math. 24 (2013), 305–312.

[F7] Włodzimierz Fechner, *Functional inequalities motivated by the Lax-Milgram theorem*, J. Math. Anal. Appl. 402 (2013), 411–414.

(c) Opis celu naukowego wyżej wymienionego cylku prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania:

Celem naukowym przedłożonego cyklu prac jest zbadanie wybranych problemów teorii nierówności funkcyjnych o wielu zmiennych wraz z ich możliwymi zastosowaniami oraz związkami z innymi gałęziami matematyki. Rozwiązania postawionych problemów stanowią wkład habilitanta w rozwój teorii nierówności funkcyjnych. Narzędzia i techniki dowodowe, które autor wypracował w trakcie swoich badań znacznie wykraczają poza wachlarz standardowych metod stosowanych do podobnych problemów i stanowią dodatkowy wkład habilitanta w rozwój dziedziny. Ponadto, w pracach przedłożonego cyklu odkryte są nowe związki teorii nierówności funkcyjnych z elementami teorii operatorów oraz teorii multifunkcji.

Wprowadzenie.

Rozpoczniemy od krótkiego omówienia dwóch najbardziej podstawowych w naszych badaniach nierówności funkcyjnych. Jest to nierówność definiująca funkcje wypukłe w sensie Jensena oraz nierówność funkcji podaddytywnych. To ta druga nierówność pełnić będzie centralną rolę w naszych dalszych rozważaniach.

Załóżmy, że $(X,+)$ jest półgrupą abelową z jednoznacznym dzieleniem przez dwa, D takim podzbiorem X, że $\frac{1}{2}(x+y) \in D$ dla wszystkich $x, y \in D$ i $f\colon D \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją. Mówimy, że f jest *wypukła w sensie Jensena*, jeśli

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x, y \in D.$$

Załóżmy dodatkowo, że X jest rzeczywistą przestrzenią liniową i zbiór D jest wypukły. Funkcję $f\colon D \to \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą*, jeśli

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad x, y \in D,\ \lambda \in [0,1].$$

Każda ciągła funkcja wypukła w sensie Jensena określona na wypukłym podzbiorze rzeczywistej przestrzeni liniowo-topologicznej jest wypukła. Ponieważ istnieją nieciągłe funkcjonały liniowe, więc istnieją też nieciągłe funkcje wypukłe. Nieciągła funkcja addytywna na prostej jest przykładem funkcji wypukłej w sensie Jensena, która nie jest wypukła. Z drugiej strony, bardzo słabe warunki regularnościowe narzucone na funkcję wypukłą w sensie Jensena implikują jej ciągłość. Twierdzenie Bernsteina-Doetscha orzeka, że każda funkcja wypukła w sensie Jensena określona na otwartym i wypukłym podzbiorze rzeczywistej przestrzeni liniowo-topologicznej, która jest ograniczona z góry na pewnym niepustym zbiorze otwartym, jest ciągła. Z kolei twierdzenie Sierpińskiego mówi, że mierzalna w sensie Lebesgue'a funkcja wypukła w sensie Jensena określona na otwartym i wypukłym podzbiorze $\mathbb{R}^n$ jest ciągła. Detaliczna dyskusja tych pojęć jest przedstawiona w monografii Marka Kuczmy [12].

Sytuacja jest dalece mniej komfortowa w przypadku drugiej nierówności funkcyjnej. Załóżmy, że $(X, +)$ jest półgrupą abelową i $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją. Mówimy, że f jest *podaddytywna*, jeśli

$$f(x+y) \leqslant f(x) + f(y), \quad x, y \in X.$$

Nie są prawdziwe odpowiedniki twierdzeń Bernsteina-Doetscha i Sierpińskiego dla funkcji podaddytywnych. Istnieją nieciągłe funkcje podaddytywne o relatywnie wysokiej regularności. Omówienie znanych rezultatów dla tej klasy funkcji znajduje się np. w monografii E. Hille, R.S. Philips [9].

Ważną dla nas klasą odwzorowań są funkcje podliniowe. Niech $(X, +)$ będzie półgrupą abelową i $f\colon X \to \mathbb{R}$. Funkcję f nazywać będziemy *podliniową*, jeśli jest ona podaddytywna oraz

$$f(2x) = 2f(x), \quad x \in X.$$

W szczególności każda funkcja podliniowa jest wypukła w sensie Jensena. Ponadto, znana jest następująca reprezentacja funkcji podliniowych.

Twierdzenie 1 (R. Ger [6]). *Załóżmy, że $(X, +)$ jest grupą abelową i $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest parzystą funkcją podliniową. Wówczas istnieją: przestrzeń Banacha E i takie odwzorowanie addytywne $A\colon X \to E$, że f ma następującą reprezentację:*

$$f(x) = \|A(x)\|, \quad x \in X.$$

Kr

Dodajmy jeszcze, że przestrzeń Banacha E, o której mowa w powyższym twierdzeniu może być wskazana konstruktywnie, jako przestrzeń ciągów ograniczonych na pewnym zbiorze z normą supremum.

W cyklu prac [F1-F7] koncentrujemy się na wybranych zagadnieniach teorii nierówności funkcyjnych, w których rozwijane są nowe techniki dowodowe. Badania rozpoczęte zostały od prostszych zagadnień, w których opieraliśmy się na znanych wcześniej podejściach. Wraz z postępem badań pojawiały się problemy, które opierały się tradycyjnym metodom i konieczne było wypracowanie bardziej zaawansowanych narzędzi. Pierwsza metoda wprowadzona przez autora polega na uzyskaniu efektu "różniczkowania" obu stron nierówności lub "odejmowania" dwóch nierówności stronami. Podejście to pozwoliło autorowi badać nowy typ problemów, tzw. nierówności funkcyjnych ze złożeniami funkcji niewiadomej. Drugie narzędzie zostało wprowadzone w pracy [F7] i dotyczy zastosowania multifunkcji i twierdzeń o selekcji dla nierówności funkcyjnych. Rezultat ten przedstawiamy bardziej szczegółowo w ostatniej sekcji niniejszego omówienia.

Twierdzenie Rădulescu o charakteryzacji operatorów liniowo-multyplikatywnych i wynik Hammera. Alienacja nierówności funkcyjnych.

Załóżmy, że X jest zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa i $C(X)$ jest przestrzenią wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych na X wyposażoną w normę supremum. Marius Rădulescu w pracy [16] wykazał, że jeśli operator $T\colon C(X) \to C(X)$ spełnia następujący układ nierówności:

$$\begin{cases} T(f+g) & \geqslant & T(f)+T(g), \\ T(f\cdot g) & \geqslant & T(f)\cdot T(g), \end{cases} \tag{1}$$

dla wszystkich $f, g \in C(X)$, to istnieją: zbiór otwarto-domknięty $B \subseteq X$ i taka funkcja ciągła $\varphi\colon X \to X$, że

$$T(f) = \chi_B \cdot f \circ \varphi,$$

gdzie χ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru. W szczególności, operator T jest więc liniowy, multyplikatywny i ciągły.

Jean Dhombres w pracy [4] badał układ równań funkcyjnych:

$$\begin{cases} f(x+y) & = & f(x)+f(y), \\ f(xy) & = & f(x)f(y), \end{cases} \tag{2}$$

pojedyncze równanie, powstałe poprzez dodanie stronami obu równań układu (2), czyli równanie:

$$f(x+y)+f(xy) = f(x)+f(y)+f(x)f(y), \tag{3}$$

K

a także bardziej ogólne równanie:

$$af(xy) + bf(x)f(y) + cf(x+y) + d(f(x) + f(y)) = 0.$$

Załóżmy, że dany jest pewien abstrakcyjny układ równań lub nierówności funkcyjnych (U) oraz odpowiednio: równanie lub nierówność (E), która powstała poprzez dodanie stronami obu związków z (U). Oczywiście każde rozwiązanie (U) spełnia (E). Jeśli prawdziwa jest implikacja odwrotna, to mówimy, że dla układu (U) zachodzi *zjawisko alienacji.*

Dhombres w swojej pracy podaje warunki, pod którymi każde rozwiązanie równania (3) spełnia układ (2), występuje więc efekt alienacji dla addytywnego i multyplikatywnego równania Cauchy'ego z układu (2). Pojawia się pytanie, czy podobne zachowanie jest również charakterystyczne dla układu nierówności (1). Intuicyjnie oznaczałoby to, że pod pewnymi założeniami jest możliwe "odejmowanie stronami" od siebie dwóch nierówności. Pierwszy wynik w tym kierunku uzyskał Claus Hammer w pracy [8]. Wykazał on, że ciągła i różniczkowalna w zerze funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia nierówność

$$f(x+y) + f(xy) \geqslant f(x) + f(y) + f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{4}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy f jest stale równa zeru lub

$$f(x) = x + \frac{a-1}{a}(e^{ax} - 1), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie $a = f'(0) \geqslant 1$.

Praca [F4] poświęcona jest głębszemu zbadaniu nakreślonego powyżej problemu. Wprowadzona jest metoda, którą roboczo nazwiemy "różniczkowaniem nierówności stronami". Podejście to jest modyfikacją rozumowania z wspomnianej powyżej pracy Hammera [8] i rozwinięte zostało również w omówionych w kolejnych sekcjach artykułach [F2] i [F5]. Ogólna idea polega na rozważaniu odpowiednich ilorazów różnicowych i wykazaniu z użyciem badanej nierówności, że ilorazy te spełniają pewne oszacowania. Czasem udaje się udowodnić, że funkcja rozwiązująca badaną nierówność musi być różniczkowalna w sposób ciągły (wyniki z prac [F4] i [F5]), w innych przypadkach konieczne jest założenie wyższej regularności funkcji niewiadomej (wyniki zawarte w pracy [F2]). Dalej, wykonując przejścia graniczne otrzymujemy zwykle pewną nierówność lub równanie różniczkowe, które po rozwiązaniu doprowadza nas do ogólnej postaci rozwiązań wyjściowej nierówności. W pracy [F4] (opublikowanej w roku 2012, ale wysłanej do redakcji we wrześniu 2009 r.) udało się zastosować tę metodę w elementarnej formie. Problemy omawiane w (późniejszych) pracach [F2] i [F5] okazały się trudniejsze, również technicznie i wymagały znacznych modyfikacji naszego pierwotnego podejścia.

Pierwszy lemat dotyczy ogólnej sytuacji z dwiema funkcjami niewiadomymi.

Lemat 1 ([F4, Lemma 1]). *Załóżmy, że funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne w zerze, g jest ciągła oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ są dowolnymi stałymi. Jeśli f i g spełniają warunek $f(0) = g(0) = 0$ oraz nierówność funkcyjną*

$$\alpha[f(x+y) - f(x) - f(y)] + \beta[g(xy) - g(x)g(y)] \geqslant 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

to zachodzi równość

$$\alpha(f'(x) - f'(0)) = \beta g'(0)(g(x) - x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jeśli ponadto $\alpha \neq 0$, to f jest różniczkowalna w sposób ciągły.

Zauważmy, że lemat ten jest uogólnieniem znanego faktu mówiącego, że funkcja podaddytywna $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która jest różniczkowalna w zerze i spełnia $f(0) = 0$ jest postaci $f(x) = f'(0)x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ (wystarczy przyjąć w lemacie $g = 0$ oraz $\alpha = -1$).

Lemat 1 pozwala nam zredukować problem rozwiązania nierówności funkcyjnej (5) z dwiema funkcjami niewiadomymi do przypadku nierówności z jedną funkcją niewiadomą.

Następnie, uzyskaliśmy uogólnienie omówionego wcześniej wyniku Hammera.

Twierdzenie 2 ([F4, Theorem 1]). *Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w zerze i ciągła, $f(0) = 0$ oraz $b, c \in \mathbb{R}$ są niezerowymi stałymi. Wówczas f spełnia nierówność*

$$f(x+y) + bf(xy) \geqslant f(x) + f(y) + cf(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{6}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $f = 0$ lub

$$f(x) = \frac{ac-b}{ac^2}[e^{acx} - 1] + \frac{b}{c}x, \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie $a = f'(0)$ i ponadto $ac > 0$ oraz $(ac - b)bc \geqslant 0$.

Z powyższego twierdzenia wnioskujemy, że efekt alienacji dla badanego układu nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $f = 0$ lub $f'(0) = \frac{b}{c}$ ([F4, Corollary 1]).

Przypadki $c = 0$ lub $b = 0$ w nierówności (6) są zbadane w poniższych dwóch twierdzeniach.

Pan

Twierdzenie 3 ([F4, Theorem 2]). *Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w zerze i ciągła, $f(0) = 0$ oraz $b \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą. Wówczas f spełnia nierówność*

$$f(x+y) + bf(xy) \geqslant f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x) = -\frac{1}{2}abx^2 + ax \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie $a = f'(0)$ i ponadto jeśli $b \neq 0$, to $a \leqslant 0$.

Twierdzenie 4 ([F4, Theorem 3]). *Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w zerze i ciągła, $f(0) = 0$ oraz $c \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą niezerową. Wówczas f spełnia nierówność*

$$f(x+y) \geqslant f(x) + f(y) + cf(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x) = \frac{1}{c}[e^{acx} - 1], \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie $a = f'(0)$.

Tożsamość Tarskiego i pewne wzmocnienie warunku trójkąta.

Następująca elementarna identyczność została zauważona przez Alfreda Tarskiego (por. [18]):

$$\Big| |x| - |y| \Big| = |x+y| + |x-y| - |x| - |y|, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Lech Maligranda w pracy [14] wykazał, że identyczność (7) nie jest spełniona w wymiarze wyższym niż jeden, ale w dowolnej przestrzeni unormowanej prawdziwe jest następujące oszacowanie:

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x+y\| + \|x-y\| - \|x\| - \|y\| \leqslant \min\{\|x+y\|, \|x-y\|\}. \tag{8}$$

Nie wykorzystując żadnych (!) dodatkowych własności normy możemy z (8) łatwo wyprowadzić obie nierówności trójkąta: $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ oraz $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x-y\|$. Nierówność (8), traktowana jako wzmocnienie warunku trójkąta, posłużyła wraz z podobnymi związkami jako motywacja do badań opublikowanych w pracach [F1], [F2] i

[F3]. Zajmowaliśmy się w nich odpowiednimi nierównościami funkcyjnymi, które, zgodnie z ich motywacją, są wzmocnieniami warunku podaddytywności.

Pierwszym badanym problemem związanym z tożsamością Tarskiego (7) i nierównością (8) wykazaną przez Maligrandę jest równanie funkcyjne

$$|f(x) - f(y)| = f(x+y) + f(x-y) - f(x) - f(y) \tag{9}$$

oraz nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant f(x+y) + f(x-y) - f(x) - f(y) \leqslant \min\{f(x+y), f(x-y)\}. \tag{10}$$

W pracy [F1] udowodniliśmy następujące dwa twierdzenia.

Twierdzenie 5 ([F1, Theorem 1]). *Załóżmy, że $(X,+)$ jest grupą abelową i funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ znika w zerze. Wówczas f spełnia (10) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: przestrzeń unormowana $(E, \|\cdot\|)$ i takie odwzorowanie addytywne $A\colon X \to E$, że*

$$f(x) = \|A(x)\|, \quad x \in X.$$

Twierdzenie 6 ([F1, Theorem 2]). *Załóżmy, że $(X,+)$ jest grupą abelową i $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją. Wówczas f spełnia (9) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: odwzorowanie addytywne $A\colon X \to \mathbb{R}$ i taka stała $c \in \mathbb{R}$, że*

$$f(x) = |A(x)| + c, \quad x \in X.$$

Dowodzimy również stabilności w sensie Hyersa-Ulama równania (9) ([F1, Theorem 3 oraz Corollary 4]). W dowodzie twierdzenia 5 wykorzystaliśmy zacytowane we wstępie twierdzenie 1 Gera. Z kolei twierdzenie 6 jest łatwą konsekwencją twierdzenia 5.

Peter Volkmann w bezpośredniej dyskusji z autorem zauważył, że twierdzenie 6 można wyprowadzić z pewnych wyników Chaljub-Simon i Volkmanna z pracy [3]. Badali oni następujące dwa równania funkcyjne:

$$\max\{f(x+y), f(x-y)\} = f(x) + f(y), \tag{11}$$
$$\min\{f(x+y), f(x-y)\} = |f(x) - f(y)|, \tag{12}$$

dla funkcji niewiadomej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

W kontekście powyższych rezultatów dla nierówności (10) i jej związku z równaniami (11) i (12) naturalne jest pytanie o rozwiązania nierówności funkcyjnych pochodzących bezpośrednio od równań (11) i (12):

$$\max\{f(x+y), f(x-y)\} \leqslant f(x)+f(y), \tag{13}$$
$$\max\{f(x+y), f(x-y)\} \geqslant f(x)+f(y), \tag{14}$$
$$\min\{f(x+y), f(x-y)\} \geqslant |f(x)-f(y)|, \tag{15}$$
$$\min\{f(x+y), f(x-y)\} \leqslant |f(x)-f(y)|. \tag{16}$$

Nierówności te dla funkcji rzeczywistych określonych na grupie abelowej, nazwane *nierównościami typu Volkmanna*, są przedmiotem badań zawartych w pracy [F3]. Zauważony jest brak symetrii między odpowiadającymi sobie parami nierówności (13) i (14) oraz (15) i (16). Dalej, dowodzimy, że każde znikające w zerze rozwiązanie (13) jest parzystą funkcją podaddytywną. Ponadto, jeśli rozwiązanie tej nierówności znika w dowolnym punkcie, to znika w zerze. Co więcej, zbiór miejsc zerowych tej funkcji tworzy podgrupę addytywną dziedziny. Analogiczne zachowanie cechuje rozwiązania nierówności (15). Różnica dotyczy zbioru miejsc zerowych: każdy punkt ze zbioru miejsc zerowych rozwiązań (15) jest okresem funkcji f. Dla nierówności (14) i (16) ograniczamy się do podania listy przykładów, które ilustrują jak słabymi warunkami są te nierówności w stosunku do odpowiadających im nierówności przeciwnych.

Technika dowodowa "różniczkowania nierówności stronami", która była już prezentowana w poprzednim paragrafie została zastosowana w pracy [F2] dla kolejnych trzech nierówności funkcyjnych motywowanych przez związki (7) oraz (8):

$$f(f(x)-f(y)) \leqslant f(x+y)+f(f(x-y))-f(x)-f(y), \quad x,y\in\mathbb{R}, \tag{17}$$
$$f(f(x)-f(y)) \leqslant f(f(x+y))+f(x-y)-f(x)-f(y), \quad x,y\in\mathbb{R}, \tag{18}$$
$$f(f(x)-f(y)) \leqslant f(f(x+y))+f(f(x-y))-f(f(x))-f(y), \quad x,y\in\mathbb{R}. \tag{19}$$

Zauważmy, że w powyższych problemach funkcja niewiadoma f występuje również jako swój argument. Jest więc to tzw. *nierówność funkcyjna ze złożeniami*. Należy podkreślić, że praca [F2] wraz z omówioną w dalszej sekcji pracą [F6] są pionierskie w badaniu nierówności tego typu. Metody stosowane dla klasycznych równań i nierówności funkcyjnych zawodzą w przypadku problemów dla nierówności ze złożeniami.

Dla nierówności (17), (18) i (19) udowodniliśmy, że różniczkowalność w sposób ciągły funkcji f, warunki $f(0)=0$ oraz pewne oszacowanie wartości $f'(0)$ implikują, że każde rozwiązanie jest postaci $f(x)=x$ lub $f(x)=f'(0)x$ dla $x\in\mathbb{R}$. Nierówność (17) jest nieco trudniejsza w stosunku do obu pozostałych i rozwiązanie jej wymagało nieznacznie silniejszych założeń.

Nierówność Hlawki. Zastosowanie pochodnych Diniego i twierdzenia Denjoy-Young-Saksa.

Kolejną nierównością normową, która również może być traktowana jako pewne wzmocnienie warunku trójkąta, jest nierówność Hlawki:

$$\|x+y\|+\|y+z\|+\|x+z\| \leqslant \|x+y+z\|+\|x\|+\|y\|+\|z\|. \tag{20}$$

Jako pierwszy zauważył ją dla liczb zespolonych Edmund Hlawka, co zostało odnotowane w pracy [10] Hansa Hornicha z 1942 roku. Można sprawdzić, że nierówność (20) nie jest prawdziwa w każdej przestrzeni unormowanej. Przestrzeń unormowaną, w której (20) zachodzi dla wszystkich punktów x, y, z nazywać będziemy *przestrzenią Hlawki*. Problem charakteryzacji przestrzeni Hlawki w klasie przestrzeni unormowanych pozostaje otwarty, znane wyniki częściowe są omówione we wstępnym paragrafie artykułu [F5].

W pracy [F5] skupiamy się na nierówności funkcyjnej pochodzącej od (20):

$$f(x+y)+f(y+z)+f(x+z) \leqslant f(x+y+z)+f(x)+f(y)+f(z). \tag{21}$$

Nierówność tę badamy dla odwzorowań o wartościach rzeczywistych określonych na grupie abelowej X, a dalej dla funkcji rzeczywisto-rzeczywistych. Zauważmy, że szczególne rozwiązania (21) to funkcje: $f=\|\cdot\|$ określone na przestrzeni Hlawki oraz $f=\|\cdot\|^2$ na przestrzeni Hilberta. Ogólniej, dla dowolnego funkcjonału addytywnego $a\colon X\to\mathbb{R}$ określonego na grupie X i dla dowolnego operatora addytywnego $L\colon X\to Y$ o wartościach odpowiednio w przestrzeni Hlawki lub przestrzeni Hilberta, odwzorowania:

$$X \ni x \mapsto f(x)=\|Lx\|+a(x)\in\mathbb{R} \tag{22}$$

oraz

$$X \ni x \mapsto f(x)=\|Lx\|^2+a(x)\in\mathbb{R} \tag{23}$$

spełniają nierówność (21). Dowodzimy, że jeśli funkcja f spełnia (21) i znika w zerze, to jej część nieparzysta jest addytywna ([F5, Lemma 1]). Następnie, zakładając jeden z następujących warunków jednorodnościowych:

$$\begin{aligned} f(2x)&=2f(x),\\ f(2x)&=3f(x)+f(-x),\\ f(2x)&=4f(x), \end{aligned}$$

Ew

dla wszystkich $x \in X$, udowodniliśmy, że każde rozwiązanie nierówności (21) jest odpowiednio postaci (22), (23) lub (23) z $a = 0$ ([F5, Section 2]).

Problem rozwiązania nierówności (21) staje się zdecydowanie trudniejszy w przypadku, gdy nie zakładamy warunku jednorodnościowego. Udało nam się jednak uzyskać satysfakcjonujące rezultaty również w takiej sytuacji. Ograniczyliśmy się do przypadku funkcji rzeczywisto-rzeczywistych i zastosowaliśmy zaprezentowane wcześniej podejście "różniczkowania nierówności stronami". Chcąc zachować maksymalną możliwą ogólność rozważań, w szczególności chcąc uniknąć zakładania wysokiej regularności funkcji f, zdecydowaliśmy się badać pochodne Diniego funkcji f. W lematach trzeciego paragrafu pracy [F4] dowodzimy kolejnych własności górnych i dolnych pochodnych $D^{\pm}f$ i $D_{\pm}f$. Najpierw wykazujemy, że funkcje $D_{+}f(x)+D^{+}f(-x)$ oraz $D_{-}f(x)+D^{-}f(-x)$ zmiennej rzeczywistej x są obustronnie ograniczone przez wyrażenia zależne jedynie od wartości pochodnych Diniego funkcji f w zerze. Dalej, dowodzimy podaddytywności odwzorowań $-D_{+}f + D^{+}f(0)\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ oraz $D^{-}f - D_{-}f(0)\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ o możliwych wartościach nieskończonych (używamy oznaczenia $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$). Następnie, stosujemy lemat Rosenbauma (por. R.A. Rosenbaum [17] lub E. Hille, R.S. Philips [9, Theorem 7.3.3]) o funkcjach podaddytywnych o wartościach w $\overline{\mathbb{R}}$. Mówi on, że jeśli funkcja podaddytywna $\varphi\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a i $\varphi(t_0) < +\infty$ w pewnym punkcie ujemnym to, albo $\varphi = +\infty$ prawie wszędzie na $(0, +\infty)$, albo φ jest skończona (wszędzie) na całej prostej. Informacje, które uzyskaliśmy dzięki temu lematowi porównujemy z tezą twierdzenia Denjoy-Young-Saksa, które opisuje możliwe zachowania pochodnych Diniego dla dowolnej funkcji rzeczywisto-rzeczywistej. Dzięki temu udało się nam wywnioskować, że pod bardzo słabymi założeniami funkcja f jest różniczkowalna prawie wszędzie oraz przynajmniej jedna z jej pochodnych Diniego jest skończona w każdym punkcie. Kolejny etap dowodu, to użycie wyniku Zbigniewa Gajdy [5, Corollary 3.1] o stabilności równania Cauchy'ego prawie wszędzie. Jeśli oznaczymy $B = \frac{1}{2}[D^{+}f(0) + D_{-}f(0)]$, $C = \frac{1}{2}[D^{+}f(0) - D_{-}f(0)]$ oraz zdefiniujemy funkcję g wzorem $g(t) = f'(t) - B$, to g jest funkcją poprawnie określoną dla prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}$ oraz zachodzi oszacowanie stabilnościowe

$$|g(x+y) - g(x) - g(y)| \leqslant C$$

dla prawie wszystkich par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dzięki wynikowi Gajdy istniejąca prawie wszędzie pochodna funkcji f posiada jednostajną aproksymacje prawie wszędzie:

$$|f'(x) - 2Ax - B| \leqslant C$$

dla pewnej stałej A. Opis funkcji f uzyskujemy odcałkowując powyższe szacowanie. Powołując się na wykazany fakt, że przynajmniej jedna z pochodnych Diniego funkcji f jest wszędzie skończona możemy wyznaczyć jej całkę Henstocka. Następnie, wykorzystując różniczkowalność prawie wszędzie funkcji f, wnosimy, że jej całka Henstocka jest równa całce Lebesgue'a. W ten sposób otrzymujemy poniższe twierdzenie, będące głównym wynikiem pracy [F5].

Twierdzenie 7 ([F5, Theorem 8]). *Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest mierzalna, $f(0) = 0$, wszystkie jej pochodne Diniego są skończone w zerze, przynajmniej jedna z nich jest skończona w pewnym punkcie dodatnim i w pewnym punkcie ujemnym i przynajmniej jedna jest skończona na zbiorze miary dodatniej. Jeśli f spełnia nierówność (21) dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$, to istnieją: stała $A \in \mathbb{R}$ i takie odwzorowanie $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że*

$$f(x) = Ax^2 + Bx + r(x)$$

oraz

$$|r(x)| \leqslant C|x|$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, gdzie $B = \frac{1}{2}[D^+f(0) + D_-f(0)]$ oraz $C = \frac{1}{2}[D^+f(0) - D_-f(0)]$.

Jeśli w powyższym twierdzeniu założymy dodatkowo, że $D^+f(0) \leqslant D_-f(0)$, to otrzymujemy, że f spełnia nierówność (21) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie stałe $A, B \in \mathbb{R}$, że $f(x) = Ax^2 + Bx$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ ([F5, Corollary 5]).

Warty podkreślenia jest fakt, że wyniki z pracy [F5] spotkały się już ze znacznym zainteresowaniem międzynarodowych specjalistów z dziedziny równań i nierówności funkcyjnych. Na konferencji *49th International Symposium on Functional Equations* w Graz-Mariatrost (Austria), na której autor przedstawiał swoje wyniki dotyczące nierówności (21), Zsolt Páles [15] przedstawił kilka problemów motywowanych referatem habilitanta. Ponadto, wyniki tej pracy wraz z detalami dowodowymi habilitant referował na seminarium Katedry Analizy w Debreczynie na Węgrzech podczas swojego pobytu na tej uczelni w czerwcu 2012 roku.

Operatory uśredniające i powiązane nierówności funkcyjne.

Jednym z najwcześniej badanych *równań funkcyjnych ze złożeniami* jest równanie operatorów uśredniających:

$$T(f \cdot Tg) = Tf \cdot Tg. \tag{24}$$

Po raz pierwszy pojawiło się ono w latach trzydziestych ubiegłego stulecia w rozważaniach Josepha Kampé de Fériet [11]. Później było badane przez Garretta Birkhoffa w pracy [2], a także przez innych matematyków, również z mnożeniem zastąpionym przez dowolną operację grupową lub półgrupową. Operator liniowy $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ działający na algebrze $\mathcal{A}$ nazywamy *operatorem uśredniającym*, jeśli spełnia on równanie (24) dla wszystkich funkcji f, g. Tematyka operatorów uśredniających była intensywnie badana w latach 60-tych i 70-tych XX wieku. Pojedyncze prace na ten temat publikowane są również obecnie.

Celem pracy [F6] było zbadanie problemu powstałego poprzez zastąpienie znaku równości w równaniu (24) znakiem nierówności. Jest jasne, że nasze rozważania powinniśmy w tej sytuacji ograniczyć do struktur uporządkowanych, takich jak np. algebra $C(X)$ wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych na pewnym zbiorze zwartym, lub ogólniej, rozważać pierścienie uporządkowane. W kontekście wcześniejszych badań równania (24), zasadne jest skupienie uwagi na następujących dwóch nierównościach:

$$T(f + T(g)) \geqslant T(f) + T(g), \tag{25}$$
$$T(f \cdot T(g)) \geqslant T(f) \cdot T(g). \tag{26}$$

Należy podkreślić, że badając powyższe dwa problemy nie zakładamy liniowości operatora T. Konsekwencją takiego podejścia jest ograniczony opis rozwiązań, gdyż bez założenia liniowości siła związków (25) i (26) jest mniejsza. Dodatkowa trudność, która była już sygnalizowana przy okazji badania problemów (17), (18) i (19), to charakter nierówności (25) oraz (26) – są to nierówności ze złożeniami funkcji niewiadomej. Tak więc nie dysponujemy wyborem metod pozwalających efektywnie wyznaczać ich rozwiązania.

Praca [F6] rozpoczyna się od serii przykładów odwzorowań spełniających nierówność (25) lub (26), które pokazują, że rozwiązania mogą nie mieć postaci, której oczekiwalibyśmy, jeżeli zbiór wartości funkcji niewiadomej T nie tworzy przynajmniej grupy addytywnej lub nie jest podzbiorem o niepustym wnętrzu. Dalej wykazane jest, że jeśli $\mathcal{R}$ jest pierścieniem częściowo uporządkowanym, to każde rozwiązanie $T\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ nierówności (25) jest postaci

$$T(f) = f + T(0) \tag{27}$$

dla wszystkich elementów f ze zbioru $T(\mathcal{R}) \cap -T(\mathcal{R})$ ([F6, Lemma 2.1]). W szczególności więc, wiemy, że wszystkie rozwiązania surjektywne są postaci (27) dla wszystkich $f \in \mathcal{R}$ ([F6, Corollary 2.1]). Następnie, udowodnione jest, że jeśli dodatkowo pierścień $\mathcal{R}$ jest wyposażony w odpowiednią strukturę topologiczną, to tę samą postać mają rozwiązania spełniające dużo słabszy warunek niż surjektywność ([F6, Corollary 2.2]).

Ze względu na możliwość występowania dzielników zera w pierścieniu $\mathcal{R}$, nierówność (26) jest zdecydowanie trudniejsza. Wykazane jest, że jeśli $\mathcal{R}$ jest pierścieniem z jednością oraz $1 > 0$, to dla wszystkich f należących do odpowiedniego podzbioru pierścienia $\mathcal{R}$ zachodzi równość $T(f) = T(1) \cdot f$ ([F6, Lemma 2.3 oraz Theorem 2.1]).

Lemat Laxa-Milgrama. Zastosowanie multifunkcji i twierdzenia o selekcji.

Ostatnia z jednotematycznego cyklu prac dotyczy pewnej modyfikacji lematu Laxa-Milgrama. Przedstawiony wynik ma słabszą tezę, natomiast uzyskany jest bez zakładania koersywności i z warunkiem dwuliniowości zastąpionym przez odpowiednie układy nierówności. Klasyczny wynik Petera Laxa i Arthura Milgrama z pracy [13] jest zwykle formułowany następująco:

Twierdzenie 8 (P. Lax, A. Milgram [13]). *Załóżmy, że H jest rzeczywistą przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $(\cdot|\cdot)$, a B jest funkcjonałem dwuliniowym na H, który jest ograniczony oraz spełnia tzw.* warunek koersywności*:*

$$c\|u\|^2 \leqslant B(u,u) \tag{28}$$

dla pewnej stałej $c > 0$ i wszystkich $u \in H$. Wówczas każdy ciągły funkcjonał liniowy na przestrzeni H jest postaci $B(\cdot, w)$ dla pewnego jednoznacznie wyznaczonego wektora $w \in H$.

Równoważnie, wykorzystując twierdzenie Riesza możemy tezę lematu Laxa-Milgrama sformułować w następujący sposób:

funkcjonał B może być przedstawiony w postaci

$$B(u,v) = (Tu, v), \quad u, v \in H,$$

gdzie $T\colon H \longrightarrow H$ jest pewnym ciągłym i bijektywnym operatorem liniowym.

Głównym wynikiem pracy [F7] jest poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 9 ([F7, Theorem 5]). *Załóżmy, że H jest rzeczywistą przestrzenią Hilberta i $B\colon H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem spełniającym następujące warunki:*

(*a*) *dla każdego $u \in H$ odwzorowanie $B(u, \cdot)$ jest podliniowe;*

(*b*) *dla każdego $v \in H$ odwzorowanie $B(\cdot, v)$ jest nadaddytywne;*

(c1) *jeśli $B(u,v) \geqslant 0$ dla pewnego $u \in H$ i dla każdego $v \in H$, to $u = 0$;*

(c2) *jeśli $B(u,v) = 0$ dla każdego $u \in H$ i dla pewnego $v \in H$, to $v = 0$;*

(*d*) *B jest ograniczone z góry na pewnym niepustym podzbiorze otwartym $H \times H$.*

Wówczas istnieje ciągły operator liniowy $T\colon H \longrightarrow H$ o następujących własnościach:

(*i*) T *jest injektywny;*

(*ii*) *obraz przestrzeni* H *poprzez operator* T *jest gęsty w* H*;*

(*iii*) $(Tu|v) \leqslant B(u,v)$ *dla wszystkich* $u, v \in H$.

W dowodzie twierdzenia 9 używamy wyniku Gera z pracy [7], mówiącego, że każda ciągła funkcja podliniowa określona na H ma reprezentację postaci:

$$f(x) = \sup\{(a|x) : a \in K\}, \quad x \in H,$$

gdzie K jest pewnym niepustym zbiorem słabo zwartym i wypukłym. Co więcej, zbiór K jest wyznaczony jednoznacznie i jest równy

$$K = \{x \in H : (x|v) \leqslant f(v) \text{ dla każdego } v \in H\}.$$

Wykorzystując te dwa fakty konstruujemy odpowiednią multifunkcję $m\colon H \longrightarrow \mathrm{cc}(H)$. Następnie wykazujemy związek

$$m(u) + m(v) \subseteq m(u+v),$$

dla wszystkich $u, v \in H$. Dalej, korzystając z twierdzenia o selekcji multifunkcji nadaddytywnej pochodzącego od Gajdy [5, Theorem 4.4] uzyskujemy addytywną selekcję multifunkcji m. Dowód kończymy wykazując, że selekcja ta (będąca postulowanym operatorem T) spełnia warunki (*i*), (*ii*), (*iii*).

Warto podkreślić, że bardzo pożądana dla multifunkcji własność, by wartości były zbiorami niepustymi, zwartymi i wypukłymi jest w naszym przypadku konsekwencją zachodzenia odpowiedniej nierówności funkcyjnej. Można więc przypuszczać, że taki efekt wystąpi również dla szerszej klasy problemów. Twierdzenia o selekcji znalazłyby wtedy potencjalne liczne zastosowania w teorii nierówności funkcyjnych.

Niewątpliwą niedoskonałością omówionych w tej sekcji badań jest brak w chwili obecnej przykładów zastosowań uzyskanego wyniku. Podstawowy problem, który stoi na przeszkodzie wykorzystania twierdzenia 9 w sposób analogiczny do tego jak wykorzystuje się lemat Laxa-Milgrama, to zbyt słabe własności operatora T wykazane w twierdzeniu 9. Nie dowodzimy bowiem bijektywności T. Problem wydaje się leżeć w następującym fakcie – założenie koersywności (28) nie zapewnia pożądanych efektów, gdy dwuliniowość zastąpimy układem nierówności. W dowodzie lematu Laxa-Milgrama warunek (28) wymusza bijektywność operatora T. W rozważanym przez nas problemie taka implikacja nie jest prawdziwa. W chwili obecnej autorowi nie jest znany warunek, który, łącznie innymi założeniami twierdzenia (9) implikowałby tezę taką jak w lemacie Laxa-Milgrama.

Wyniki tej części były przedstawiane przez autora w lutym 2012 roku na seminarium *Ulmer Seminare "Funktionalanalysis und Differentialgleichungen"*, prowadzonym przez Wolfganga Arendta, gdzie referat spotkał się z dużym zainteresowaniem. W dyskusji po referacie Markus Kunze zauważył pewne związki prezentowanych wyników z równaniem Bellmana i problemami podobnymi, występującymi m.in. w teorii optymalizacji (por. również przeglądowy artykuł [1]). Ponadto, w czerwcu 2012 roku habilitant przedstawiał powyższy wynik na konferencji *The Fiftieth International Symposium on Functional Equations* w Hajdúszoboszló (Węgry). Referat został nagrodzony medalem *For Outstanding Contribution* przyznawanym przez Komitet Naukowy konferencji za wybitne osiągnięcie naukowe.

Habilitant zamierza prowadzić dalsze badania tego wątku, również z wykorzystaniem innych znanych twierdzeń o selekcji, takich jak np. twierdzenie Michaela, które podaje warunki zapewniające, że półciągła z dołu multifunkcja ma ciągłą selekcję.

Literatura

[1] R, Bellman, E.S. Lee, *Functional equations in dynamic programming*, Aequationes Math. 17 (1978), 1–18.

[2] G. Birkhoff, *Moyennes des fonctions bornées*, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, no. 24 (1950), Algèbre et Théorie des Nombres, 143–153.

[3] A. Chaljub-Simon, P. Volkmann, *Caractérisation du module d'une fonction additive a l'aide d'une équation fonctionnelle*, Aequationes Math. 47 (1994), 60-68.

[4] J. Dhombres, *Relations de dépendance entre les équations fonctionnelles de Cauchy*, Aequationes Math. 35 (1988), 186-212.

[5] Z. Gajda, *Invariant means and representation of semigroups in the theory of functional equations*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach nr. 1273, Uniwersytet Śląski, Katowice, 1992.

[6] R. Ger, *Fischer-Muszély additivity on abelian groups*, Comment. Math. Prace Mat. (2004) Tomus Specialis in honorem Juliani Musielak, 82–96.

[7] R. Ger, *Sublinear functionals and weak $*$-compactness*, Prace Naukowe Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie, Matematyka X (2005), 67-76.

[8] C. Hammer, *Über die Funktionalungleichung* $f(x+y)+f(xy) \geqslant f(x)+f(y)+f(x)f(y)$, Aequationes Math. 45 (1993), 297-299.

[9] E. Hille, R.S. Philips, *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. 31, 1957.

[10] H. Hornich, *Eine Ungleichung für Vektorlängen*, Math. Z. 48 (1942), 268–274.

[11] J. Kampé de Fériet, *L'etat actuel du problème de la turbulence (I and II)*, La Science Aérienne 3 (1934), 9–34; 4 (1935), 12–52.

[12] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities (second edition)*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2009.

[13] P.D. Lax, A.N. Milgram, *Parabolic Equations*, Ann. Math. Stud. 33 (1954), 167–190.

[14] L. Maligranda, *Some remarks of the triangle inequality for norms*, Banach J. Math. Anal. 2/2 (2008), 31-41.

[15] Zs. Páles, *Remarks and problems on Hlawka's inequality*, Report of Meeting, The Forty-ninth International Symposium on Functional Equations, June 19—26, 2011, Graz-Mariatrost, Austria, Aequationes Math. 84 (2012), 285—318.

[16] M. Rădulescu, *On a supra-additive and supra-multiplicative operator of* $C(X)$, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Repub. Soc. Roum., Nouv. Ser. 24 (72) (1980), 303-305.

[17] R.A. Rosenbaum, *Sub-additive functions*, Duke Math. J. 17 (1950), 227–247.

[18] A. Tarski, *Problem nr 83*, Parametr 1 (1930), no. 6, 231; Rozwiązanie: Młody Matematyk 1/1 (1931), 90.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

(a) Wykaz innych (nie wchodzących w skład osiągnięcia wymienionego w pkt 4.) opublikowanych prac naukowych.

(A) Publikacje naukowe w czasopismach znajdujących się w bazie Journal Citation Reports (Edycja 2011):

[F8] Włodzimierz Fechner, *On functions with the Cauchy difference bounded by a functional. Part III*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **76** (2006), 57–62.

[F9] Włodzimierz Fechner, *Stability of a functional inequality associated with the Jordan-von Neumann functional equation*, Aequationes Math. **71** (2006), 149–161.

[F10] Włodzimierz Fechner, *On the Hyers-Ulam stability of functional equations connected with additive and quadratic mappings*, J. Math. Anal. Appl. **322** (2006), 774–786.

[F11] Włodzimierz Fechner, *Characterization of quadratic mappings through a functional inequality*, J. Math. Anal. Appl. **324** (2006), 452–459.

[F12] Włodzimierz Fechner, *On a functional inequality connected with quadratic functionals*, J. Math. Anal. Appl. **332** (2007), 381–389.

[F13] Włodzimierz Fechner, *On an abstract version of a functional inequality*, Math. Inequal. Appl. **11/2** (2008), 381–392.

[F14] Włodzimierz Fechner, *On a composite functional equation on Abelian groups*, Aequationes Math. **78** (2009), 185–193.

[F15] Włodzimierz Fechner, *On some functional inequalities related to the logarithmic mean*, Acta Math. Hungar. **128/1-2** (2010), 36–45.

[F16] Włodzimierz Fechner, *Stability of a composite functional equation related to idempotent mappings*, J. Approx. Theory **163** (2011), 328–335.

[F17] Włodzimierz Fechner, *Functional equations with exotic addition*, Nonlinear Anal. **74/17** (2011), 5999–6003.

[F18] Włodzimierz Fechner, *A characterization of quadratic-multiplicative mappings*, Monatsh. Math. **164/4** (2011), 383–392.

[F19] Włodzimierz Fechner, Eszter Gselmann, *General and alien solutions of a functional equation and of a functional inequality*, Publ. Math. Debrecen **80/1–2** (2012), 143–154 (procentowy udział określony w oświadczeniu współautorki).

[F20] Włodzimierz Fechner, Justyna Sikorska, *On a separation for the Cauchy equation on spheres*, Nonlinear Anal. **75** (2012), 6306—6311 (procentowy udział określony w oświadczeniu współautorki).

[F21] Włodzimierz Fechner, *On a composite functional equation satisfied almost everywhere*, Indagationes Math. **24/1** (2013), 103—110.

[F22] Włodzimierz Fechner, *Quadratic operators on AM-spaces*, Glasnik Mat. (przyjęta do druku).

(B) Publikacje naukowe inne niż w czasopismach znajdujących się w bazie Journal Citation Reports (Edycja 2011).

[F23] Włodzimierz Fechner, *On functions with the Cauchy difference bounded by a functional*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **52/3** (2004), 265–271.

[F24] Włodzimierz Fechner, *On functions with the Cauchy difference bounded by a functional. Part II*, Int. J. Math. Sci. **2005/12** (2005), 1889–1898.

[F25] Włodzimierz Fechner, *Separation theorems for conditional functional equations*, Ann. Math. Sil. **21** (2007), 31–40.

[F26] Włodzimierz Fechner, *Some inequalities connected with the exponential function*, Arch. Math. (Brno) **44** (2008), 217–222.

[F27] Włodzimierz Fechner, Justyna Sikorska, *Sandwich theorems for orthogonally additive functions*, C. Bandle et al. (eds.), Inequalities and Applications 2007, International Series of Numerical Mathematics, **157** (2009), 269–281 (procentowy udział określony w oświadczeniu współautorki).

[F28] Włodzimierz Fechner, Justyna Sikorska, *On the stability of orthogonal additivity*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **58** (2010), 23–30 (procentowy udział określony w oświadczeniu współautorki).

[F29] Włodzimierz Fechner, Roman Ger, *Some stability results for equations and inequalities connected with the exponential functions*, J.M. Rassias (edt.), Functional Equations and Difference Inequalities and Ulam Stability Notions (F.U.N.), Mathematics Research Developments, Nova Science Publishers, Inc., New York 2010, pp. 37–46 (procentowy udział określony w oświadczeniu współautora).

[F30] Włodzimierz Fechner, *Functional equations motivated by the Lagrange's identity*, Demonstratio Math. **44/1** (2011), 91–98.

[F31] Włodzimierz Fechner, *On some functional-differential inequalities related to the exponential mapping*, Tokyo J. Math. **34/2** (2011), 345–352.

[F32] Włodzimierz Fechner, *Functional inequalities and equivalences of some estimates*, C. Bandle et al. (eds.), Inequalities and Applications 2010, dedicated to the Memory of Wolfgang Walter. International Series of Numerical Mathematics **161** (2012), 231–240.

(b) Opis dorobku naukowego habilitanta uzyskanego po doktoracie i nie wchodzącego w skład jednotematycznego cyklu publikacji:

Pozostały dorobek naukowy habilitanta dotyczy szeroko rozumianej teorii równań i nierówności funkcyjnych oraz jej związków z innymi gałęziami matematyki. Można go podzielić na kilka grup. Prace [F9], [F10], [F13], [F16], [F28], [F29] dotyczą problemów stabilności w sensie Hyersa-Ulama równań i nierówności funkcyjnych. Problemy tego typu są aktualnie intensywnie badane przez wielu matematyków i łączą się z innymi gałęziami matematyki. Podkreślmy, że praca [F9], która dotyczy stabilności następującej nierówności funkcyjnej:

$$\|2f(x) + 2f(y) - f(x-y)\| \leqslant \|f(x+y)\|,$$

jest najczęściej cytowaną pracą habilitanta i posiada aktualnie 50 cytowań (bez autocytowań) zgodnie z bazą Google Scholar.

Prace [F15], [F26], [F32] poświęcone są tematyce porównywania średnich i powiązanym nierównościom funkcyjnym. Niech litery A, G oraz L oznaczają odpowiednio średnią arytmetyczną, geometryczną oraz logarytmiczną. Znane są oszacowania:

$$G(s,t) \leqslant L(s,t) \leqslant A(s,t), \tag{29}$$

oraz

$$G^{\frac{2}{3}}(s,t) \cdot A^{\frac{1}{3}}(s,t) \leqslant L(s,t) \leqslant \frac{2}{3}G(s,t) + \frac{1}{3}A(s,t) \tag{30}$$

dla wszystkich $s, t > 0$.

Ustalmy dowolnie takie $x, y \in \mathbb{R}$, że $x \neq y$ i przyjmijmy $s := e^x$ i $t := e^y$ w (29) oraz (30). Widzimy zatem, że funkcja wykładnicza spełnia następujące nierówności:

$$e^{\frac{x+y}{2}} \leqslant \frac{e^y - e^x}{y - x} \leqslant \frac{e^x + e^y}{2} \tag{31}$$

oraz

$$6e^{\frac{2}{3}\cdot\frac{x+y}{2}}\left[\frac{e^x + e^y}{2}\right]^{\frac{1}{3}} \leqslant 6\frac{e^y - e^x}{y - x} \leqslant 4e^{\frac{x+y}{2}} + e^x + e^y. \tag{32}$$

Powyższe dwa szacowania stanowią motywacje dla prowadzonych przez habilitanta we wspomnianych wyżej pracach rozważań następujących czterech nierówności funkcyjnych:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \cdot \frac{f(x)+f(y)}{2} \leqslant \left[\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right]^3,$$

$$6\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant 4f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(x) + f(y),$$

dla x, y należących do pewnego przedziału I. Rozwiązania powyższych nierówności są, pod odpowiednimi założeniami, postaci

$$f(x) = m(x) \cdot \exp(x), \qquad x \in I,$$

gdzie $m\colon I \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją monotoniczną.

Trzecią grupę prac stanowią artykuły [F20], [F25], [F27], w których badane są problemy oddzielania funkcji i twierdzenia kanapkowe dla rozwiązań warunkowych równań funkcyjnych. Załóżmy, że X jest zbiorem niepustym i dana jest pewna relacja dwuargumentowa $\mathcal{R}$ na X. Dalej, niech $p\colon X \to \mathbb{R}$ i $q\colon X \to \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami, że

$$\mathcal{R}(x,y) \Longrightarrow p(x+y) \leqslant p(x) + p(y),$$
$$\mathcal{R}(x,y) \Longrightarrow q(x+y) \geqslant q(x) + q(y).$$

Pojęciem *twierdzenie kanapkowe* nazywać będziemy wynik, który podaje warunki wystarczające dla istnienia funkcji $f\colon X \to \mathbb{R}$ spełniającej warunkowe równanie funkcyjne:

$$\mathcal{R}(x,y) \Longrightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$$

oraz $p \leqslant f \leqslant q$ lub $q \leqslant f \leqslant p$.

W pracy [F27] napisanej wspólnie z Justyną Sikorską uzyskaliśmy twierdzenia kanapkowe dla ortogonalnej addytywności, tzn. badaliśmy przypadek, gdy $\mathcal{R}$ jest relacją prostopadłości w przestrzeni unitarnej lub w ogólniejszej strukturze. Zatem, udowodniliśmy, że odwzorowanie ortogonalnie podaddytywne oraz odwzorowanie ortogonalnie nadaddytywne mogą być oddzielone funkcją ortogonalnie addytywną.

W pracach [F20] i [F25] rozważaliśmy sytuację gdy X jest przestrzenią unormowaną oraz $\mathcal{R}(x,y)$ zachodzi gdy $\|x\| = \|y\|$. Bardziej ogólna sytuacja była również badana. Podaliśmy warunki, pod którymi odwzorowania, które są odpowiednio podaddytywne i nadaddytywne na wektorach o równej długości mogą być oddzielone funkcją addytywną.

Praca [F14] jest poświęcona następującemu równaniu funkcyjnemu ze złożeniami:

$$f(f(x) - f(y)) = f(x+y) + f(x-y) - f(x) - f(y),$$

dla funkcji niewiadomej $f\colon G \to G$ działającej na grupie abelowej $(G,+)$. Wyniki tej pracy posłużyły również jako częściowa motywacja badań opublikowanych w artykułach [F2] oraz [F16].

W pracy [F17] habilitant badał działania dwuargumentowe postaci:

$$x \oplus y := xf(y) + yf(x)$$

określone na dowolnym przedziale zawierającym zero. Ponadto, rozwiązane zostało równanie Jensena wraz z równaniem derywacji ze zwykłym dodawaniem występującym w tych równaniach zastąpionym operacją $\oplus$.

Praca [F18] jest poświęcona zagadnieniu alienacji dla odwzorowań kwadratowych i multyplikatywnych. Podane są warunki, pod którymi rozwiązania następującego równania funkcyjnego:

$$af(xy) + bf(x)f(y) + cf(x+y) + df(x-y) + k(f(x) + f(y)) = 0$$

są odwzorowaniami kwadratowo-multyplikatywnymi. Jest to wynik, który powiązany jest również z pracą [F4] jednotematycznego cyklu publikacji.

Celem pracy [F19] napisanej wspólnie z Eszter Gselmann było rozwiązanie równania

$$g(x+y) - g(x) - g(y) = xf(y) + yf(x).$$

Po wyznaczeniu ogólnego rozwiązania, rozważyliśmy problem alienacji, tzn. opisaliśmy przypadki, w których powyższe równanie implikuje

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

oraz

$$xf(y) + yf(x) = 0.$$

Ponadto, zbadaliśmy powiązaną nierówność funkcyjną:

$$g(x+y) - g(x) - g(y) \geqslant xf(y) + yf(x).$$

Praca [F30] jest poświęcona następującym dwóm równaniom funkcyjnym:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} f(b_i)\right) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f(a_i b_j - a_j b_i)$$

oraz

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} f(b_i)\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(a_i b_j - a_j b_i).$$

Oba równania są motywowane identycznością Lagrange'a, która mówi, że dla każdej liczby naturalnej n i dla dowolnych a_i, b_i z pewnego pierścienia przemiennego R, gdzie $i = 1, \ldots, n$ mamy

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

lub równoważnie

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

W pracy [F31] habilitant rozważa dwukrotnie różniczkowalne funkcje rzeczywiste określone na przedziale otwartym. Główny wynik pracy mówi, że jeśli funkcja f jest rozwiązaniem odpowiednich nierówności funkcyjno-różniczkowych, to odwzorowanie $x \mapsto f(x)\exp(-cx)$ jest wypukłe, gdzie c jest dowolnym punktem zbioru $\mathbb{R} \setminus (c_1, c_2)$ dla pewnych rzeczywistych c_1, c_2.

Ostatnią grupę stanowi praca [F22] wraz z maszynopisami habilitanta znajdującymi się w przygotowaniu lub w recenzji, dotyczącymi pewnych zagadnień teorii operatorów. W szczególności habilitant uzyskał analogony twierdzeń o reprezentacji operatorów liniowych w AM-przestrzeniach dla operatorów kwadratowych. Ponadto, wykazane zostały pewne uogólnienia twierdzeń faktoryzacyjnych Arendta (rozszerzenie twierdzenia Luxemburga-Schepa oraz twierdzenia dualnego, które są operatorowymi wersjami twierdzenia Radona-Nikodyma). Planowane jest dalsze badanie tej tematyki wspólnie z Tomaszem Kochankiem w ramach zakwalifikowanego do finansowania przez MNiSW w ramach programu Iuventus Plus 2012 projektu badawczego pt. *Liniowe i nieliniowe faktoryzacje operatorów oraz ich własności stabilnościowe w C^*-algebrach i w kratach.*

Włodzimierz Fechner