Warszawa, 4 grudnia 2015

prof. dr hab. Leszek Plaskota
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Recenzja rozprawy habilitacyjnej oraz ocena pozostałego dorobku dr. Tomasza Szostoka

w związku z postępowaniem w sprawie przyznania stopnia dr. hab. prowadzonym w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach.

1. ROZPRAWA

1.1 Wstęp

Rozprawę habilitacyjną dr. Tomasza Szostoka stanowi pięćdziesięciokilkustronicowy artykuł jego autorstwa pt.

Functional equations stemming from numerical analysis,

opublikowany w "Dissertationes Mathematicae", Warszawa 2015. W artykule tym habilitant podsumowuje dotychczasową wiedzę oraz dodaje istotnie nowe, własne wyniki na temat dokładnych rozwiązań pewnych równań funkcyjnych. Równania te można w ogólnej postaci zapisać jako

$$\sum_{l=0}^{\ell}(y-x)^i[f_{1,i}(\alpha_{1,i}x+\beta_{1,i}y)+\cdots+f_{k_i,i}(\alpha_{k_i,i}x+\beta_{k_i,i}y)]=0, \tag{1}$$

gdzie $f_{j,i}$ są dowolnymi funkcjami zdefiniowanymi na prostej rzeczywistej i przyjmującymi wartości w $\mathbb{R}$. Inspirację do tych równań autor czerpie z formuł kwadraturowych stosowanych w analizie numerycznej do aproksymacji całki oznaczonej funkcji jednej zmiennej, formuł przybliżających pochodne, czy formuł związanych z różnicami dzielonymi. Schemat postępowania jest zwykle następujący. Punktem wyjścia jest formuła funkcyjna, np. $Q(f)=\sum_{j=0}^{n}a_jf(x_j)$ (kwadratura) stosowana do numerycznej aproksymacji innej wielkości, np. całki $S(f)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$, gdzie $F'=f$. Formuła ta jest zwykle dokładna dla wielomianów f odpowiedniego stopnia. Zasadnicze pytanie brzmi, czy istnieją inne, poza wielomianowymi, rozwiązania równania $F(b) - F(a) = Q(f)$ albo równań pokrewnych, powstających po tzw. *peksideryzacji*.

Habilitant daje pełne odpowiedzi na zasadnicze pytanie w wielu przypadkach. Przedstawione rozumowania nie są proste i opierają się przede wszystkim na dwóch aspektach: pokazaniu, że rozwiązania są funkcjami wielomianowymi (w odróżnieniu od wielomianów) oraz pokazaniu ciągłości rozwiązań. Te dwie własności, jeśli występują, implikują już, że rozwiązania są wielomianami.

Na wstępie warto jeszcze dodać, że chociaż rozpatrywane równania są motywowane analizą numeryczną to nie widać jaki pożytek może mieć analiza numeryczna z ich ogólnych rozwiązań. Ostatnia uwaga nie ma charakteru krytycznego, a jej celem jest jedynie podkreślenie, że związek rozprawy z analizą numeryczną istnieje właściwie jedynie poprzez inspiracje.

1.2 Wyniki

Rozprawa składa się z sześciu rozdziałów. Rozdział pierwszy (1. Introduction) zawiera charakterystykę rozpatrywanych równań, ich motywację oraz krótką historię, począwszy od pracy Jánosa Aczéla z roku 1985. Następnie autor dokonuje przeglądu dotychczas stosowanych technik, gdzie ważną rolę odgrywa lemat Sablika, by w końcu scharakteryzować nowe wyniki zaprezentowane w rozprawie.

Zasadnicza część matematyczna rozpoczyna się rozdziałem drugim (2. Preliminaries), gdzie zdefiniowano podstawowe pojęcia takie jak *funkcje wielomianowe* oraz sformułowano pomocnicze lematy. Najważniejsze w tym rozdziale twierdzenie 2.6 autorstwa dr. Szostoka, chociaż bedące konsekwencją wcześniej znanych wyników, posłuży do pokazania, że rozwiązania równania (1) są w wielu przypadkach funkcjami wielomianowymi.

Najdłuższy rozdział trzeci (3. Continuity of functions satisfying (1.1)) poświęcony jest w większości ciągłości rozwiązań równania

$$F(y) - F(x) = (y - x)[f_1(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \cdots + f_n(\alpha_n x + \beta_n y)], \tag{2}$$

które jest szczególnym przypadkiem (1) i jest motywowane formułami kwadraturowymi, takimi jak kwadratura Simpsona. Jak wspomniano wcześniej, stwierdzenie ciągłości rozwiązań (2) jest istotne, gdyż implikuje, że są one wielomianami. Użyta technika dowodowa zasadniczo sprowadza zagadnienie do badania rozwiązań jednomianowych (rozumianych w trochę innym sensie niż zwykłe jednomiany). Główny wynik, twierdzenie 3.5, dotyczy nawet ogólniejszego równania niż (2) i dowodzi, że funkcja F jest przy pewnych mało ograniczających warunkach wielomianem. Jeszcze w tym rozdziale autor pokazuje konsekwencje udowodnionych faktów, m.in. odpowiada na pewien otwarty problem Sablika. Natomiast twierdzenie 3.10 dotyczy bardziej szczegółowego niż (2) (i bezpośrednio kojarzonego z kwadraturami) równania

$$F(y) - F(x) = (y - x)[a_1 f(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \cdots + a_n f(\alpha_n x + \beta_n y)]. \tag{3}$$

Okazuje się, że równanie (3) wymusza, iż f jest wielomianem stopnia co najwyżej $2n - 1$ oraz $F' = (\sum_{i=1}^{n} a_i) f$. Ten ciekawy wynik pokazuje w szczególności, że jeśli funkcja nie jest wielomianem to nie istnieje kwadratura dająca dokładną wartość całki na każdym przedziale. Twierdzenie 3.1 znane było już wcześniej z pracy, gdzie T. Szostak był współautorem, ale tam zostało udowodnione przy użyciu innych technik. Podobnie, habilitant pokazuje prostsze od autorskiego rozwiązanie jeszcze innego równania.

Ten sam rozdział trzeci zawiera też inne pokrewne rozważania i wyniki takie jak ten, że maksymalny stopień wielomianu f w równaniu odpowiadającym regule 3/8 Simpsona wynosi 3. Analizowane są i pokazane twierdzenia z tezą jak w twierdzeniu 3.10 dla równań odpowiadającyh kwadraturom Hermite'a i Birkhoffa.

Rozdział czwarty (4. Functional equations connected with numerical differentiation) dotyczy równań pochodzących z numerycznej aproksymacji pochodnych funkcji,

$$g(\alpha x + \beta y)(y-x)^k = a_1 f(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \cdots + a_n f(\alpha_n x + \beta_n y).$$

W zasadzie schemat postępowania jest jak uprzednio. Najpierw pokazuje się wielomianowość rozwiązań, a potem ciągłość. Uzyskane warunki ciagłości są jednak w tym przypadku dalece bardziej skomplikowane, ale pozwalają pokazać w szczególnych przypadkach, że rozwiązania są wielomianami.

Rozdział ten zawiera również rozważania na temat rozwiązań równania

$$g(x_1 + \cdots + x_n) = f[x_1, \ldots, x_n], \tag{4}$$

gdzie $f[x_1, \ldots, x_n]$ oznacza różnicę dzieloną funkcji f opartą na punktach $x_1, \ldots, x_n$, motywowanego tym, że z jednej strony różnice dzielone można wykorzystać do aproksymacji pochodnych dowolnych rzędów, a z drugiej znanym faktem, że dla jednomianu $x \mapsto x^n$ równanie (4) jest spełnione z $g(x) = x$. Wkład habilitanta do rozwiązania tego problemu jest zawarty w twierdzeniu 4.20 i polega na uszczegółowieniu postaci rozwiązań równania (4), wcześniej bowiem było wiadomo jedynie, że g musi być wielomianem stopnia pierwszego, a f wielomianem stopnia n.

W następnym rozdziale piątym (5. Generalizations of quadrature type functional equations) autor powraca do wyjściowego równania Aczéla

$$F(y) - F(x) = (y-x) f\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{5}$$

Stosując własną, nową technikę, opartą na sformułowanym w abstrakcyjnym jezyku półgrup twierdzeniu 5.1, habilitant pokazuje prosty dowód twierdzenia Aczéla, że wszystkie rozwiązania równania (5) są postaci $F(x) = ax^2 + bx + c$ i $f(x) = F'(x) = 2ax + b$. Technika ta jest też zastosowana do rozwiązania kilku równań pokrewnych równaniu (5).

Habilitant kończy rozprawę rozdziałem szóstym (6. Some open problems) zawierającym listę kilku problemów otwartych, w tym pytaniem o rozwiązania równań związanych z metodami Runge-Kutta numerycznej aproksymacji rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych.

1.3 Uwagi

Rozprawa habilitacyjna dr. T. Szostoka jest zwartym, oryginalnym i samodzielnym opracowaniem tematu równań funkcyjnych z wieloma zmiennymi (funkcjami). Szczególność rozpatrywanych równań wynika stąd, że są one inspirowane metodami przybliżonymi stosowanymi w analizie numerycznej. Habilitant cytuje wcześniej opublikowane wyniki, w tym uzyskane wspólnie z innymi badaczami, oraz dopisuje do tematu istotnie nowe rozdziały. Pokazuje również jak niektóre znane wyniki można wywieść z bardziej ogólnych faktów oraz uzyskać ich uogólnienia. Wykazuje przy tym dużą dojrzałość matematyczną. Drobne błędy 'palcowe', jak umieszczenie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ zamiast $\beta_1, \ldots, \beta_n$ w treści twierdzenia 3.10, czy zamiana rolami funkcji f i g w twierdzeniu 4.11 nie podważają tej oceny.

Drobna uwaga krytyczna może dotyczyć fizycznej objętości rozprawy. Autor recenzji byłby bardziej usatysfakcjonowany gdyby nowych wyników było w rozprawie trochę więcej. Ten brak rekompensowany jest tym, że część wyników cytowanych (współ-)autorstwa habilitanta, zostały opublikowane w innych pracach i faktycznie mieszczą się ściśle w temacie rozprawy.

2. DOROBEK

Dorobek publikacyjny dr. T. Szostoka obejmuje ogółem 21 prac, w tym 18 opublikowanych po uzyskaniu stopnia doktora. Są to przeważnie prace współautorskie. Habilitant wskazuje na swój istotny wkład w każdą z tych prac, formalnie brakuje jednak oświadczeń współautorów. Przedłożone prace dotyczą przede wszystkim szeroko pojętej tematyki równań i nierówności funkcyjnych (oczywiście, nie tylko tych analizowanych w rozprawie) i ich związków z geometrią przestrzeni. Należy podkreślić, że pozycje te są opublikowane w dobrych czasopismach należących do bazy JCR, m.in. w *Applied Mathematics Letters*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *Results in Mathematics*, *Aequationes Mathematicae*, czy *Kybernetika.* Łączny *impact factor* habilitanta 6,128 nie jest jednak imponujący.

Wyniki habilitanta są cytowane przez innych autorów. Podaje on 21 cytowań w bazie *MathSciNet* oraz 13 w *Web of Science*, ale większość z nich to autocytowania, odpowiednio 15 i 9. Warto dodać, że w chwili pisania tej recenzji liczba cytowań jest już wyraźnie wyższa i wynosi 32 w *MathSciNet* i 21 w *Web of Science. Indeks Hirscha* habilitanta wynosi 3.

Dr. T. Szostak dociera ze swoimi wynikami do społeczności międzynarodowej nie tylko poprzez publikacje, ale również przez uczestnictwo w tematycznych, międzynarodowych konferencjach naukowych takich jak cykliczne "International Symposium on Functional Equations" czy "International Conference on Functional Equations and Inequalities". Pisze też recenzje i omówienia innych prac dla kilku czasopism naukowych, w tym dla *Mathematical Reviews.* Współorganizuje cykliczną konferencję "Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations". Za wyniki naukowe został uhonorowany medalem na "40-tym Międzynarodowym Sympozjum z Równań Funkcyjnych" w roku 2003.

Habilitant prowadzi również działalność dydaktyczną i popularyzatorską na Uniwersytecie Śląskim i poza nim. Jest promotorem 26 prac magisterskich i 18 licencjackich, opiekował się Kołem Naukowych Matematyków i brał czynny udział w imprezach popularyzujących matematykę.

3. KONKLUZJA

Publikacja przedłożona przez DR. T. SZOSTOKA jako rozprawa habilitacyjna na temat rozwiązań równań funkcyjnych motywowanych analizą numeryczną nie jest obszerna, ale reprezentuje poziom naukowy uzasadniający wystąpienie o przyznanie stopnia doktora habilitowanego. Biorąc pod uwagę również pozostały dorobek habilitanta oceniam, pomimo wskazanych zastrzeżeń, że przedłożony wniosek spełnia wymogi formalne i stanowi istotny wkład w badaną tematykę. **Postuluję skierowanie wniosku do dalszych etapów postępowania habilitacyjnego.**