Rzeszów, 30 listopada 2015

dr hab. Jacek Chudziak, prof. UR
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy
Uniwersytet Rzeszowski

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym doktora Tomasza Szostoka

1. Sylwetka habilitanta

Pan doktor Tomasz Szostok ukończył studia magisterskie na kierunku matematyka, specjalność teoretyczna, na Uniwersytecie Śląskim w Katowicach w 1997 roku. Pracę magisterską, zatytułowaną *Własność Radona-Nikodyma przestrzeni Banacha*, przygotował pod opieką prof. dra hab. Romana Gera. W czerwcu 2002 roku uzyskał stopień doktora nauk matematycznych. Promotorem rozprawy doktorskiej pt. *Modyfikacje i uogólnienia pewnych warunkowych równań funkcyjnych* również był prof. dr hab. Roman Ger.

Całą swoją dotychczasową działalność zawodową doktor Szostok związał z Instytutem Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach. W latach 1997-1998 oraz 2000-2002 pracował na stanowisku asystenta. Od października 2002 roku do chwili obecnej jest zatrudniony na stanowisku adiunkta.

Zainteresowania naukowe habilitanta dotyczą równań i nierówności funkcyjnych. Jego aktywność naukowa w całości poświęcona jest tej tematyce.

2. Ocena przedstawionego osiągnięcia naukowego

Pan doktor Tomasz Szostok jako rozprawę habilitacyjną przedstawił pracę ***Functional equations stemming from numerical analysis, Dissertationes Math. 508 (2015), 57 pp.*** Podzielona na sześć rozdziałów praca poświęcona jest równaniom funkcyjnym postaci

$$(1)\qquad \sum_{i=0}^{l}(y-x)^i[f_{1,i}(\alpha_{1,i}x+\beta_{1,i}y)+\ldots+f_{k_i,i}(\alpha_{k_i,i}x+\beta_{k_i,i}y)]=0.$$

W rozdziale I habilitant przedstawia przykłady problemów, prowadzących do rozważanych przez niego równań funkcyjnych. Omawia istniejące wyniki, dotyczące równań funkcyjnych związanych z analizą numeryczną oraz prezentuje metody stosowane do badania ich rozwiązań. Rozdział kończy krótki opis najważniejszych wyników uzyskanych w tym zakresie przez habilitanta, które są przedstawione w dalszej części rozprawy.

W rozdziale II doktor Szostok podaje definicje pojęć stosowanych w pracy. Pomija niestety definicję funkcji jednomianowej. Pojęcie to pojawia się wielokrotnie w dalszej części pracy, a w kilku fragmentach wykorzystywane są własności funkcji jednomianowych. Ponadto brak jakiejkolwiek wzmianki o związku między własnością

$$\Delta_{h_1,\ldots,h_n}f(x)=0,$$

występującą w tezie twierdzenia 2.3, a faktem, że f jest funkcją wielomianową określonego stopnia. Tę lukę habilitant uzupełnił w autoreferacie.

W dalszej części rozdziału przedstawiony jest m. in. lemat, udowodniony przez M. Sablika w pracy [33], jak również jego uogólnienie (por. lemat 2.5), pochodzące z pracy [26] (w całej recenzji przyjmuję numerację prac przedstawioną we wniosku). Ten ostatni wynik odgrywa kluczową rolę w dowodzie twierdzenia 2.6, dotyczącego rozwiązań równania (1). Twierdzenie 2.6 znajduje szereg zastosowań w dalszej części pracy i, według mnie, jest jednym z istotniejszych rezultatów w niej zamieszczonych. Sądzę więc, że warto je w tym miejscu przytoczyć. Załóżmy, że funkcje $f_{j,i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla $i \in \{0, ..., l\}$, $j \in \{1, ..., k_i\}$ spełniają równanie (1) i przyjmijmy oznaczenie

$$J_i := \{(\alpha_{j,i}, \beta_{j,i}) : j \in \{1, ..., k_i\}, \alpha_{j_0,i_0}\beta_{j,i} = \alpha_{j,i}\beta_{j_0,i_0}\} \text{ dla } i \in \{0, ..., l\}.$$

Wtedy, dla dowolnych $i_0 \in \{0, ..., l\}$, $j_0 \in \{1, ..., k_i\}$, spełniających warunki:

1. $\alpha_{j_0,i_0} + \beta_{j_0,i_0} \neq 0$,
2. $J_{i_0} = \{(\alpha_{j_0,i_0}, \beta_{j_0,i_0})\}$,
3. $J_i = \emptyset$ dla $i \in \{i_0 + 1, ..., l\}$,

funkcja f_{j_0,i_0} jest funkcją wielomianową stopnia równego co najwyżej

$$\sum_{i=0}^{l} \operatorname{card}\left(\bigcup_{s=i}^{l}(\{(\alpha_{1,s}, \beta_{1,s}), ..., (\alpha_{k_s,s}, \beta_{k_s,s})\} \setminus J_s)\right) - 1.$$

Następnie habilitant przedstawia inny pomysł na wyznaczanie rozwiązań równania postaci

$$F(y) - F(x) = (y - x)[a_1 f(\alpha_1 x + \beta_1 y) + ... + a_n f(\alpha_n x + \beta_n y)], \tag{2}$$

będącego szczególnym przypadkiem równania (1). Polega on na zastosowaniu odpowiednich podstawień i przekształceń. W uwadze 2.12 przedstawione jest jego zastosowanie w przypadku równania

$$F(y) - F(x) = (y - x) f\left(\frac{x + y}{2}\right). \tag{3}$$

W końcowej części rozdziału autor pokazuje dalsze możliwe zastosowania tego pomysłu do badania rozwiązań równania (2).

Rozdział III poświęcony jest problemowi ciągłości rozwiązań równania

$$F(y) - F(x) = (y - x)[f_1(\alpha_1 x + \beta_1 y) + ... + f_n(\alpha_n x + \beta_n y)], \tag{4}$$

które jest kolejnym rozpatrywanym w pracy szczególnym przypadkiem równania (1), a jednocześnie jest uogólnieniem równania (2). Głównym wynikiem tego rozdziału jest twierdzenie 3.5, pokazujące, że jeżeli funkcje $F, f_1, ..., f_n$ spełniają równanie (4), to przy pewnych dodatkowych założeniach każda z nich jest funkcją wielomianową, a ponadto funkcja F jest ciągła, czyli jest wielomianem. Twierdzenie 3.5 odgrywa kluczową rolę w dowodzie twierdzenia 3.8, które z kolei znajduje zastosowanie m. in. w dowodach wniosku 3.9 oraz twierdzeń 3.10 i 3.15. We wniosku 3.9 autor udziela pozytywnej odpowiedzi na pytanie postawione przez M. Sablika, dotyczące istnienia nietrywialnego rozwiązania równania

$$g_1(\alpha_1 x + \beta_1 y) + ... + g_n(\alpha_n x + \beta_n y) = 0$$

w przypadku, gdy równanie (4) posiada takie rozwiązanie, że jedna z funkcji $f_1, ..., f_n$ jest nieciągła. W twierdzeniu 3.10 habilitant pokazuje, że jeżeli para funkcji (F, f) jest rozwiązaniem równania (2) oraz spełnione są następujące założenia:

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$,
2. $\alpha_i + \beta_i = 1$ dla $i \in \{1, ..., n\}$,
3. $\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i \neq 0$ dla $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$,

to f jest wielomianem stopnia co najwyżej $2n - 1$, F jest wielomianem stopnia co najwyżej $2n$, a ponadto $F' = (\sum_{i=1}^{n} a_i) f$.

Z kolei twierdzenie 3.15 dotyczy rozwiązań równania (2) w klasie par funkcji (f, F), gdzie f jest postaci

$$f(x) = A(\overbrace{x, ...x}^{k})$$

z pewną k-addytywną funkcją symetryczną $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$, spełniającą układ warunków

$$A(\alpha_i x_1, x_2, ..., x_k) = \alpha_i A(x_1, x_2, ..., x_k) \text{ dla } i \in \{1, ..., n\},$$

$$A(\beta_i x_1, x_2, ..., x_k) = \beta_i A(x_1, x_2, ..., x_k) \text{ dla } i \in \{1, ..., n\},$$

zaś F jest funkcją jednomianową stopnia $k + 1$. Autor pokazuje w tym twierdzeniu, że jeżeli równanie (2) posiada w opisanej powyżej klasie takie rozwiązanie, w którym funkcja f jest nieciągła, to

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i^k = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i^{k-1} \beta_i = ... = \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i^k = 0. \tag{5}$$

Jeżeli zaś równanie (2) posiada w opisanej powyżej klasie takie rozwiązanie, w którym funkcja f jest ciągła i $f \neq 0$, to

$$\binom{k}{l} \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i^{k-l} \beta_i^l = \binom{k}{m} \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i^{k-m} \beta_i^m \quad \text{dla} \quad l, m \in \{0, ...k\}, \tag{6}$$

przy czym w wersji podanej w rozprawie w równości (6) występują dwie usterki, które szczegółowo opiszę w dalszej części recenzji. Druga część tego twierdzenia mówi, że jeżeli spełniony jest warunek (5), to para (F, f), gdzie F jest dowolną funkcją stałą, zaś f jest dowolną funkcją jednomianową stopnia k, spełnia równanie (2). Podobnie, jeżeli spełniony jest warunek (6), to para (F, f), gdzie f jest dowolną funkcją jednomianową stopnia k, zaś F jest postaci

$$F(x) = x \sum_{i=1}^{n} a_i f(\alpha_i x) + c,$$

spełnia równanie (2). Rozważanie równania (2) właśnie w takiej klasie funkcji jest w pełni uzasadnione. Mianowicie, na mocy udowodnionego wcześniej lematu 3.2, badanie własności rozwiązań równania (4), którego (2) jest szczególnym przypadkiem, można w istocie sprowadzić do przypadku, gdy funkcje niewiadome w nim występujące, są jednomianowe. W końcowej części rozdziału zaprezentowane zostały zastosowania twierdzenia 3.5 do opisu rozwiązania równań wywodzących się z reguł Hermite'a i Birkhoffa. Głównymi wynikami są tu, odpowiednio, twierdzenia 3.27 oraz 3.34.

W rozdziale IV badane są rozwiązania równań funkcyjnych postaci

$$g(\alpha x + \beta y)(y - x)^k = a_1 f(\alpha_1 x + \beta_1 y) + ... + a_n f(\alpha_n x + \beta_n y), \tag{7}$$

związanych ze wzorami wykorzystywanymi do przybliżonego wyznaczania wartości pochodnych. Podobnie jak w poprzednim rozdziale, korzystając z twierdzenia 2.6, wykazuje się, że przy pewnych założeniach funkcje f i g, spełniające równanie (7), są funkcjami wielomianowymi. Następnie (por. twierdzenie 4.6), przy dodatkowych założeniach o współczynnikach występujących w równaniu (7), otrzymuje się ciągłość funkcji f i g. W rezultacie, funkcje te są wielomianami. Uzyskane wyniki są ilustrowane przykładami. Ponadto habilitant pokazuje, że otrzymane przez niego rezultaty znajdują zastosowanie w wyznaczaniu rozwiązań równań funkcyjnych związanych z ilorazami różnicowymi. Głównym wynikiem tej części pracy jest twierdzenie 4.20.

Rozdział V, liczący niespełna 4 strony, otwiera twierdzenie 5.1, którego dowód sprowadza się w istocie do pomysłowego zastosowania podstawień i przekształceń, które zostały już wcześniej omówione przez habilitanta w rozdziale II. Rezultat ten pozwala w łatwy sposób wyznaczyć rozwiązania równania

$$F(y) - F(x) = (y - x) f(x + y). \tag{8}$$

W dalszym ciągu tego rozdziału habilitant pokazuje przykłady innych zastosowań twierdzenia 5.1. Dotyczą one jednak równań, które przez bardzo proste podstawienia dają się sprowadzić do równania (8). Do wyznaczenia ich rozwiązań nie jest konieczne zastosowanie twierdzenia 5.1 w tak ogólnej postaci, w jakiej zostało ono sformułowane. Według mojej oceny, ten fragment rozprawy jest pod względem merytorycznym znacznie słabszy od jej wcześniejszych części.

W rozdziale VI doktor Szostok prezentuje kilka otwartych problemów, odnoszących się do równań omawianych w pracy lub do ich uogólnień (jeden problem otwarty został zamieszczony już na końcu poprzedniego rozdziału). Rozważania kończy wynik, dotyczący stabilności równania (4). Jego dowód jest oparty na pomyśle zastosowanym w poprzednim rozdziale, w dowodzie twierdzenia 5.1. Pomysł wyeliminowania funkcji F z nierówności (6.8), choć stosunkowo prosty, wydaje się obiecujący. Habilitant stwierdza (por. s. 55, wiersze 1-6), że jego zastosowanie prowadzi do problemu stabilności bardziej skomplikowanego, przynajmniej na pierwszy rzut oka, równania, które w konkretnych sytuacjach aż tak skomplikowane nie jest. Niestety, poza przykładem dotyczącym problemu stabilności równania (3), który był już wcześniej rozważany w pracy [40], i krótką wzmianką (por. uwaga 6.9) na temat stabilności równania

$$F(y) - F(x) = (y - x)(f(x) + f(y)),$$

w rozprawie nie znajdujemy dalszych przykładów świadczących o tym, że pomysł ten da się efektywnie zastosować w badaniu stabilności równań funkcyjnych związanych z analizą numeryczną. W konsekwencji, przedstawiony wynik pozostawia niedosyt i nie daje jednoznacznej odpowiedzi na pytanie o jego znaczenie w badaniu stabilności równań rozważanych we wcześniejszych częściach rozprawy.

We wstępie do rozprawy habilitant zauważa, że dotychczasowa strategia wyznaczania rozwiązań równań funkcyjnych związanych z analizą numeryczną najczęściej polegała na doborze odpowiednich, wymagających mniejszej lub większej pomysłowości, podstawień i dokonywaniu prostych przekształceń. Wyjątek stanowi metoda przedstawiona przez Zs. Pálesa (por. [28]). W rozprawie zaproponowane zostało zupełnie inne podejście do tego problemu, zapoczątkowane w pracach [20] i [21]. Polega ono na zastosowaniu lematu 2.5 do wykazania, że występujące w równaniu funkcje są wielomianowe, a następnie na pokazaniu, że ich składniki jednomianowe również spełniają dane równanie. Tym samym, problem sprowadza się do badania rozwiązań równania w klasie funkcji jednomianowych. W mojej ocenie, uzyskane tą metodą wyniki, przedstawione w rozprawie, są interesujące i na tyle ogólne, że mogą być stosowane do badania rozwiązań szerokiej klasy równań, mających źródła w zagadnieniach związanych z analizą numeryczną.

Kończąc omawianie rozprawy habilitacyjnej pana doktora Szostoka, chciałbym zauważyć, że zawiera ona zaskakująco dużą liczbę usterek, które nie tylko sprawiają trudności w śledzeniu niektórych rozumowań, ale mogą też powodować problemy związane ze stosowaniem pewnych wyników przedstawionych w rozprawie. Ograniczę się do omówienia jedynie najistotniejszych usterek.

Na s. 28, w równości (3.35), będącej częścią tezy twierdzenia 3.15, zamiast $\binom{n}{l}$ po lewej stronie oraz $\binom{n}{m}$ po prawej stronie, powinno być, odpowiednio, $\binom{k}{l}$ i $\binom{k}{m}$. Na tej samej stronie, w wierszu pierwszym powinno być $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. W dowodzie twierdzenia 3.15 znajdujemy szereg dalszych usterek. Na s. 28, w ostatnim składniku równości, występującej w piątym wierszu od dołu, zamiast x powinno być y. Na s. 29, w wierszu drugim, zamiast $g(\alpha_i x)$ powinno być $g(\beta_i y)$. Z kolei w wierszu 12, na tej samej stronie, zamiast α_i powinno być β_i, a w wierszu czternastym, dla odmiany, zamiast β_i powinno być α_i. Podobna zamiana występuje w wierszu szesnastym oraz po lewej stronie równości (3.37). Z kolei po prawej stronie tej samej równości $\binom{n}{1}$ i $\binom{n}{n-1}$ powinny być zamienione, odpowiednio, na $\binom{k}{1}$ i $\binom{k}{k-1}$. Po lewej stronie równości, występującej w ostatnim wierszu, na s. 29, zamiast β_i powinno być α_i, zaś po jej prawej stronie, zamiast $\binom{n}{1}$, powinno być $\binom{k}{1}$. Na s. 30, w wierszu drugim, $\binom{n}{0}$ i $\binom{n}{1}$ powinny być zamienione, odpowiednio, na $\binom{k}{0}$ i $\binom{k}{1}$, zaś w wierszu czwartym $\binom{n}{1}$ i $\binom{n}{2}$ powinny być zamienione, odpowiednio, na $\binom{k}{1}$

i $\binom{k}{2}$. Warto w tym miejscu zauważyć, że w przykładzie omawianym na s. 30 habilitant stosuje poprawną wersję równości (3.35).

Druga grupa usterek występuje w części rozprawy, dotyczącej równań związanych z regułą Birkhoffa. Założenia Proposition 3.30 powinny być uzupełnione w taki sposób, aby twierdzenie 2.6 można było zastosować do pokazania, że g jest funkcją wielomianową. Podobna uwaga dotyczy twierdzenia 3.34. W jego dowodzie korzysta się z twierdzenia 3.5, jednocześnie nie czyniąc żadnych założeń o współczynnikach, występujących w równaniu.

Kilka usterek pojawia się również na s. 54-55. W nierówności (6.9), na s. 54, powinno być 3ε. Po zastosowaniu nierówności trójkąta stała w oszacowaniu (6.10) powinna zostać podwojona. Ponadto w (6.10) pominięte zostały wszystkie te składniki, które występują (i słusznie) w pierwszym wierszu nierówności (6.9). Na s. 55, na końcu piątego wiersza należy usunąć fragment „$= 0$".

Porównując pozostałe publikacje habilitanta z rozprawą, można zauważyć różnicę w poziomie prezentacji wyników, niestety na niekorzyść tej ostatniej. Jednak, według mojej oceny, usterki, choć liczne, nie wpływają w sposób istotny na ocenę merytorycznej zawartości rozprawy. Uważam, że przedstawione w niej wyniki spełniają kryteria znacznego wkładu w rozwój dyscypliny naukowej.

3. Ogólna ocena osiągnięć naukowo-badawczych habilitanta

Na dorobek naukowy pana doktora Tomasza Szostoka, zgłoszony przez niego do oceny, łącznie z omawianą rozprawą habilitacyjną, składają się 22 prace, z których 9 to publikacje samodzielne, a 13 to prace, których doktor Szostok jest współautorem. Spośród wszystkich artykułów, 19 ukazało się po uzyskaniu przez habilitanta stopnia doktora. Ponadto 10 prac ukazało się w czasopismach znajdujących się w bazie JCR, przy czym sumaryczny impact factor wynosi 6,128. Z dokumentacji dostarczonej przez habilitanta wynika, że liczba cytowań według bazy Web of Science wynosi 13, z czego 9 stanowią autocytowania. Z kolei, według tej samej bazy, liczba cytowań na dzień 30 listopada 2015 roku wynosi 21, z czego 16 to autocytowania. Indeks Hirscha, według bazy Web of Science, wynosi 3. Nie są to wartości zbyt wysokie, zwłaszcza jeśli chodzi o liczbę cytowań po odjęciu autocytowań. Z drugiej zaś strony na uwagę zasługuje fakt, że liczba cytowań rośnie stosunkowo szybko (13 spośród wszystkich cytowań pochodzi z lat 2014-2015).

Cały dorobek naukowy doktora Szostoka można zakwalifikować do teorii równań i nierówności funkcyjnych. Prace [Sz1], [Sz2] i [Sz3] ukazały się przed uzyskaniem przez habilitanta doktoratu. Pierwsza z nich, motywowana zagadnieniami wywodzącymi się z teorii przestrzeni Orlicza, dotyczy wzmocnionej nierówności Jensena. Dwie kolejne poświęcone są związkom warunkowych równań funkcyjnych z równaniami, mającymi swe źródła w pewnych zagadnieniach z teorii przestrzeni Orlicza. Pozostałe prace ukazały się po doktoracie. Dwie z nich, mianowicie [Sz4] i [Sz15], są tematycznie blisko związane z pracami, odpowiednio, [Sz2]-[Sz3] oraz [Sz1]. Prace [Sz5] i [Sz19] dotyczą własności pewnej funkcji, związanej z prostopadłością Birkhoffa-Jamesa i zastosowaniem jej m. in. do charakteryzacji przestrzeni unitarnych. W pracach [Sz6] i [Sz7] badane są odwzorowania zachowujące trójkąty równoboczne. Z kolei prace [Sz8]-[Sz14] i [Sz17] dotyczą zagadnień, którym poświęcona jest rozprawa habilitacyjna. W pracach [Sz18] i [Sz21] rozważane są metody dowodzenia nierówności spełnionych przez funkcje wypukłe.

Według dokumentacji, dostarczonej przez habilitanta, brał on udział w 37 konferencjach naukowych, z których zdecydowaną większość stanowiły konferencje z zakresu równań i nierówności funkcyjnych. Rangę tych konferencji oceniam wysoko. W 2002 roku doktor Szostok został laureatem Medalu „For outstanding contribution", przyznanego przez Komitet Naukowy 40-go Międzynarodowego Sympozjum z Równań Funkcyjnych. Rok później jego praca zdobyła trzecią nagrodę w Konkursie im. M. Kuczmy na najlepszą polską pracę z równań funkcyjnych.

W tym samym roku otrzymał nagrodę Rektora Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach za wyróżniającą rozprawę doktorską. Wszystkie te fakty świadczą o tym, że aktywność naukowa habilitanta jest zauważana i pozytywnie oceniana zarówno przez polskich, jak i zagranicznych ekspertów z dziedziny równań funkcyjnych.

4. **Ocena w zakresie dorobku dydaktycznego i popularyzatorskiego oraz współpracy międzynarodowej habilitanta**

Doktor Szostok był recenzentem 7 artykułów naukowych oraz 27 omówień do Mathematical Reviews. Współorganizował kilka konferencji naukowych z cyklu Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations. Uczestniczył w sesjach Koła Naukowego Matematyków Uniwersytetu Śląskiego i współorganizował konferencje z serii International Student's Conference on Analysis. Wielokrotnie brał udział w pracach Jury Międzynarodowego Konkursu Matematycznego im. V. Jarnika. Na uwagę zasługuje fakt wypromowania przez habilitanta 18 licencjatów i 26 magistrów. Ponadto doktor Szostok sprawował opiekę nad klasami uniwersyteckimi Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Żywcu oraz prowadził zajęcia w ramach współpracy Uniwersytetu Śląskiego z IV Liceum Ogólnokształcącym im. gen. Stanisława Maczka w Katowicach.

Moim zdaniem, zarówno dorobek dydaktyczny i popularyzatorski habilitanta, jak i jego wkład we współpracę międzynarodową, zasługują na uznanie.

5. **Konkluzja**

Na podstawie wszystkich przedstawionych przeze mnie argumentów, dotyczących poszczególnych aspektów działalności akademickiej doktora Tomasza Szostoka, stwierdzam, że osiągnięcia naukowe habilitanta, po uzyskaniu przez niego stopnia doktora, spełniają kryteria znacznego wkładu w rozwój dyscypliny naukowej, aktywności naukowej, współpracy międzynarodowej oraz dorobku dydaktycznego i popularyzatorskiego zawarte w *Ustawie o stopniach i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki.*

Wnioskuję zatem o dopuszczenie doktora Tomasza Szostoka do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Jacek Chudziak