dr Teresa Rajba

2. ZAŁĄCZNIK do Wniosku

AUTOREFERAT w języku polskim

AUTOREFERAT

1. Imię i Nazwisko: Teresa Rajba

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe

- 1981 – uzyskanie stopnia doktora nauk matematycznych,
  Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski,
  rozprawa doktorska:
  O półgrupach rozkładalności miar probabilistycznych na prostej,
  promotor: prof. dr hab. Kazimierz Urbanik,
- 1976 – uzyskanie stopnia magistra matematyki,
  Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski,
  praca magisterska: *Półgrupy rozkładalności miar probabilistycznych na prostej*,
  promotor: prof. dr hab. Kazimierz Urbanik,
  Nagroda I STOPNIA, w KONKURSIE POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO na najlepszą pracę studencką z teorii prawdopodobieństwa i zastosowań matematyki.

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- od września 2013 r.: starszy wykładowca w Katedrze Matematyki, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej,
- październik 2001 r. – lipiec 2013 r.: adiunkt w Katedrze Matematyki i Informatyki, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej,
- październik 1999 r. – wrzesień 2001 r.: adiunkt w KMiI, WBMiI, filia PŁ w Bielsku-Białej,
- październik 1981 r. – wrzesień 1999 r.: adiunkt w Zakładzie Rachunku Prawdopodobieństwa, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii, Uniwersytet Wrocławski,
- październik 1976 r. – wrzesień 1981 r.: asystent w Zakładzie Rachunku Prawdopodobieństwa, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii, Uniwersytet Wrocławski.

4. Wskazanie osiągnięcia* wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):

a) tytuł osiągnięcia naukowego

Funkcje wypukłe i ich uogólnienia

b) Rozprawa składa się z następujących publikacji:

[R1] T. Rajba, On strong delta-convexity and Hermite-Hadamard type inequalities for delta-convex functions of higher order. *Math. Inequal. Appl.*, 18 (1) (2015), 267–293.
[R2] T. Rajba, On the Ohlin lemma for Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities, *Math. Inequal. Appl.*, 17, (2) (2014), 557–571.
[R3] T. Rajba, On some relative convexities, *J. Math. Anal. Appl.*, 411 (2) (2014), 876–886.
[R4] T. Rajba, A generalization of multiple Wright–convex functions via randomization. *J. Math. Anal. Appl.*, 388 (1) (2012), 548–565.
[R5] T. Rajba, K. Nikodem and W. Wąsowicz, On the classes of higher-order Jensen-convex functions and Wright-convex functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 396 (2012), 261–269.
[R6] T. Rajba, New integral representations of nth order convex functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 379 (2) (2011), 736–747.

c) omówienie celu naukowego/artystycznego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

Celem naukowym przedłożonego cyklu prac jest zbadanie wybranych problemów teorii funkcji wypukłych i ich uogólnień wraz z ich możliwymi zastosowaniami oraz związkami z innymi gałęziami matematyki. Rozwiązania postawionych problemów stanowią wkład habilitantki w rozwój teorii funkcji wypukłych i ich uogólnień. Narzędzia i techniki dowodowe, które autorka wypracowała w trakcie swoich badań, oparte są w znacznym stopniu na metodach probabilistycznych. Wykraczają one znacznie poza wachlarz standardowych metod stosowanych do rozwiązania podobnych problemów i stanowią dodatkowy wkład habilitantki w rozwój dziedziny. Ponadto, w pracach przedłożonego cyklu odkryte są nowe związki teorii funkcji wypukłych i ich uogólnień z elementami teorii operatorów oraz teorii nierówności funkcyjnych. Osiągnięte wyniki mogą mieć zastosowanie w badaniu nierówności między operatorami kwadraturowymi, które są operatorami związanymi z całkowaniem przybliżonym.

Spis treści

Wstęp 3

Rozdział 1. Wprowadzenie 7
1. Funkcje wypukłe, Jensen-wypukłe, Wright-wypukłe. 7
2. Nierówności typu Hermite'a–Hadamarda 7
3. Funkcje n-Jensen-wypukłe oraz n-Wright-wypukłe 8
4. Funkcje n-wypukłe. Reprezentacja całkowa 10
5. Randomizacja funkcji n-Wright-wypukłych 13
6. Funkcje delta-wypukłe wyższych rzędów 15
7. Pewne relacje względnej wypukłości 17

Rozdział 2. Funkcje n-Jensen-wypukłe oraz n-Wright-wypukłe 21
1. n-Wright-wypukłość implikuje n-Jensen-wypukłość 21
2. Jensen-wypukłość implikuje Wright-wypukłość 21
3. n-Jensen-wypukłość 21
4. Funkcja, która jest n-Jensen-wypukła i nie jest n-Wright-wypukła 21
5. Dwa przypadki szczególne 22
6. Dowód Twierdzenia 3 23

Rozdział 3. Funkcje n-wypukłe 25
1. Reprezentacja całkowa 25
2. n-wypukłość i wielokrotna monotoniczność 26
3. Względna n-wypukłość 27
4. Silna n-wypukłość. 28
5. Interpolacja funkcji przez n-wypukłe funkcje 29

Rozdział 4. Randomizacja funkcji n-Wright-wypukłych 31
1. Klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ – definicja 31
2. Klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ 31
3. Klasa $\mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_1)$. Przypadek wykładniczy, $\Theta \sim \mathrm{Exp}(1)$ 32
4. Klasa $\mathcal{W}_\infty(\Theta, \mathcal{M}_1)$. Przypadek wykładniczy $\Theta \sim \mathrm{Exp}(1)$ 34
5. Klasa $\mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_j)$. Przypadek wykładniczy, $\Theta \sim \mathrm{Exp}(1)$ 34
6. Klasa $\tilde{\mathcal{W}}_n(\tilde{\Theta}, \mathcal{M}_1((-\infty, 0))$. Przypadek multiplikatywny 35
7. Klasa $\mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_1)$. Przypadek dyskretny 36

Rozdział 5. Nierówności typu Hermita-Hadamarda dla funkcji wypukłych 39
1. Pewne uogólnienia nierówności typu Fejèra. 39
2. Pewne wyniki związane z nierównością Brennera-Alzera. 40
3. Przypadek n-tego rzędu 41
4. Nierówności pomiędzy operatorami kwadraturowymi. 43

Rozdział 6. Funkcje delta-wypukłe wyższych rzędów 45
1. Reprezentacja całkowa 45
2. Względna delta-wypukłość n-tego rzędu. Silna delta-wypukłość n-tego rzędu. 48
3. Nierówności typu Hermita-Hadamarda-Fejéra dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów. Nierówności pomiędzy operatorami kwadraturowymi. 49

Rozdział 7. Pewne względne wypukłości 51
1. Kryteria różniczkowe 52
2. Charakteryzacja probabilistyczna 56
3. Pewne silne wypukłości 57

Rozdział 8. Krótkie omówienie pozostałych wyników niewchodzących w skład rozprawy 59

Rozdział 9. O autorze 71

Bibliografia 77

Wstęp

Niniejsze opracowanie stanowi omówienie wyników wchodzących w skład mojej rozprawy habilitacyjnej *Funkcje wypukłe i ich uogólnienia* oraz moich pozostałych prac. Obiektem moich zainteresowań są funkcje wypukłe jak również funkcje które są ich uogólnieniem, w szczególności funkcje wypukłe wyższych rzędów i ich uogólnienia. Celem naukowym przedłożonego cyklu prac jest zbadanie wybranych problemów teorii funkcji wypukłych i ich uogólnień wraz z ich możliwymi zastosowaniami oraz związkami z innymi gałęziami matematyki.

Klasyczne pojęcie wypukłości w ciągu upływu czasu doczekało się wielu uogólnień idących w różnych kierunkach. Sa one ważne w wielu działach matematyki.

Tak zwane Jensen-wypukłe funkcje (funkcje wypukłe w sensie Jensena) zostały wprowadzone przez J.L.W.V. Jensena [**74, 75**], jakkolwiek funkcje spełniające podobne warunki były już badane przez O. Höldera [**68**], J. Hadamarda [**62**] oraz O. Stolza [**191**]. Podstawowe własności funkcji Jensen-wypukłych w jednowymiarowym przypadku zostały udowodnione przez samego Jensena oraz przez F. Bernsteina i G. Doetscha [**14**]. Uogólnienia na wielowymiarowy przypadek zostały zrobione przez H. Blumberga [**22**] i E. Mohra [**139**]. Warto zaznaczyć, że funkcje zwane wypukłymi pokrywają się z klasa funkcji Jensen-wypukłych ciągłych. Funkcje wypukłe są bardzo dobrze zbadane, np. Rockafellar [**173**]. Roberts-Varberg [**172**] i Kuczma [**96**].

W roku 1926 Hopf w rozprawie doktorskiej [**69**] rozważał funkcje o nieujemnych ilorazach różnicowych (divided differences) ustalonego rzędu. W pracach Popoviciu [**165, 167**] na określenie tego rodzaju wypukłości proponowana jest nazwa *funkcje wypukłe wyższych rzędów.* W 1954 E.M. Wright [**235**] wprowadził funkcje zwane Wright-wypukłymi funkcjami. W pracy [**53**], A. Gilányi i Zs. Páles, wprowadzili funkcje Wright–wypukłe wyższych rzędów.

W pracy [**9**] po raz pierwszy pojawiły się funkcje delta-wypukłe, jako funkcje ktore sa różnicą dwóch funkcji wypukłych. Fundamentalną z tej tematyki jest praca [**64**]. W pracy R. Gera [**51**] zostały wprowadzone odwzorowania delta-wypukłe wyższych rzędów.

W dysertacji zajmuję się porównywaniem klas n–Wright–wypukłych funkcji i n–Jensen–wypukłych funkcji. Rozważając operatory odwrotne do operatorów różnicowych oraz wprowadzając nowe narzędzia związane z teorią miary otrzymuję twierdzenia dotyczące istnienia nietrywialnych funkcji należących tylko do jednej z tych klas.

Zastosowanie metod probabilistycznych prowadzi do znalezienia nowej reprezentacji całkowej funkcji n-wypukłych. Reprezentacja ta jest następnie wykorzystana do dalszej charakteryzacji funkcji n-wypukłych.

W rozprawie definiuję i badam uogólnienie poprzez randomizację funkcji wielokrotnie Wright–wypukłych.

Badam również funkcje delta-wypukłe wyższych rzędów. Otrzymuję reprezentację całkową funkcji delta-wypukłej wyższych rzędów, która jest użyteczna w dalszym badania badaniu delta-wypukłości, w szczególności minimalnych funkcji kontrolnych. Podaję również nowe probabilistyczne narzędzia użyteczne w otrzymywaniu i dowodzeniu nierówności typu Hermita-Hadamarda zarówno dla funkcji wypukłych jak i delta-wypukłych wyższych

Moim zdaniem do najistotniejszych wyników rozprawy należą:

- dowód, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ nieparzystych, istnieje funkcja, która jest n-Jensen wypukła, ale nie jest n–Wright wypukła: [**R5**], **Th. 2.3**; otrzymanie operatora, który jest operatorem odwrotnym do operatora różnicowego: [**R5**], **Prop. 4.2 – 4.3**;
- charakteryzacja n–wypukłości: reprezentacje całkowe funkcji n–wypukłej: [**R6**], **Th. 2.9, 2.10**; wzór na reprezentację funkcji n–wypukłej w postaci sumy funkcji $(n+1)$–krotnie monotonicznych i wielomianu stopnie co najwyżej n: [**R6**], **Th. 3.2**; definicja i charakteryzacja względnej n–wypukłości: [**R6**], **Th. 4.3 – 4.7, , Th. 4.10 – 4.12**; definicja i charakteryzacja silnej n-wypukłości: [**R6**], **Th. 4.15, Cor. 4.16 – 4.17**; zasada o podparciach typu Wąsowicza funkcjami n–wypukłymi: [**R6**], **Th. 5.4**;

- randomizacja funkcji n-Wright wypukłych: definicja i charakteryzacja klasy $\mathcal{W}(\Theta, Q)$ – klasy funkcji Wright-wypukłych zrandomizowanych względem zmiennej losowej Θ oraz zbioru Q: [**R4**], **Th. 2.6**, w szczególności zasada rozkładalności względem zrandomizowanego operatora przesunięcia: [**R4**], **Th. 2.6 (iv)** oraz zasada generowania funkcji przy pomocy operatora J: [**R4**], **Th. 2.6 (v)**; definicja i charakteryzacja klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$, klasy funkcji n-krotnie Wright-wypukłych, zrandomizowanych względem zmiennej losowej Θ oraz zbioru Q, w szczególności zasada generowania funkcji przy pomocy operatora J^n: [**R4**], **Th. 2.8** oraz reprezentacja całkowa: [**R4**], **Lem 2.12**; charakteryzacja klas $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ w przypadku wykładniczym, $\Theta \sim \text{Exp}(1)$: reprezentacja całkowa: [**R4**], **Th. 3.6, Th. 5.2**, związek z funkcjami wielokrotnie monotonicznymi: [**R4**], **Th. 3.6, Th. 3.9**, dowód, że
$$\mathcal{W}_\infty(\text{Exp}(1), \mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_\infty,$$
tzn., że zbiór funkcji całkowicie Exp(1)-Wright wypukłych pokrywa się ze zbiorem funkcji całkowicie monotonicznyc [**R4**], **Th. 4.1**; charakteryzacja klas $\mathcal{W}_n(X_p, Q)$ w przypadku dyskretnym, gdy zmienna losowa Θ ma rozkład Bernouliego, $\Theta = X_p$: otrzymanie reprezentacji całkowej funkcji n-krotnie X_p-Wright wypukłej i całkowicie X_p-Wright wypukłej: [**R4**], **Th. 7.1, Th. 7.4**, dowód, że w tym przypadku
$$\mathcal{W}_\infty(X_p, \mathcal{M}_1) \neq \mathcal{M}_\infty$$
.
- Opis i badanie nierówności typu Hermita-Hadamarda przy użyciu wypukłych stochastycznych porządków. Korzystając z lematu Ohlina [**150**] o wypukłych stochastycznych porządkach, podaję proste dowody znanych nierówności typu Hermita-Hadamarda ([**R2**], **p. 3**), jak również otrzymuję nowe nierówności typu Hermita-Hadamarda ([**R2**], **Th. 2.1, Th. 3.1, Th. 3.2**). Wykorzystując twierdzenie o s-wypukłych stochastycznych porządkach [**39**], podaję uogólnienia znanych nierówności typu Hermita-Hadamarda w przypadku funkcji wypukłych wyższych rzędów ([**R2**], **Th. 4.1, Th. 4.2, Th. 4.3**). Otrzymamane wyniki są użyteczne w dowodzeniu nierówności między operatorami kwadraturowymi dla funkcji wypukłych wyższych rzędów ([**R2**], **Th. 5.1, Th. 5.2**).
- Charakteryzacja **funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów**: otrzymuję reprezentację całkową funkcji delta-wypukłej n-tego rzędu f, która jest użyteczna przy badaniu jej dalszych własności ([**R1**], **Th. 2.1**); charakteryzuję funkcje kontrolne odpowiadające funkcji delta-wypukłej n-tego rzędu f, w szczególności definiuję i podaję charakteryzację minimalnych funkcji kontrolnych odpowiadających funkcji f ([**R1**], **Th. 2.4, Def. 2.2, Th. 2.5, Th. 2,6**); definiuję i podaję własności silnej delta-wypukłości n-tego rzędu ([**R1**], **Th. 4.1**); podaję probabilistyczną charakteryzację delta-wypukłości ([**R1**], **Th. 4.1**); podaje również probabilistyczne narzędzia do otrzymywania i dowodu nierówności typu Hermita-Hadamardadla funkcji delta-wypukłych wyzszych rzędów ([**R1**], **Th. 4.3, Th. 4.4, Th. 4.5,**), wyniki te sa stosowane do dowodu nierówności pomiędzy operatorami kwadraturowymi dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów ([**R1**], **Th. 5.1, 5.2**),
- Charakteryzacja pewnych **relacji względnej wypukłości** $\succ_{(1)}$ i $\succ_{(2)}$: podaję **kryteria różniczkowe**, które są użyteczne w badaniu własności relacji $\succ_{(1)}$ ([**R3**], **Th. 2.7, Th. 2.10**), otrzymuję **probabilistyczną charakteryzację** relacji $\succ_{(1)}$ i $\succ_{(2)}$ w terminach luki Jensena ([**R3**], **Prop. 3.2, Th. 3.3, Th. 3.5, Rem. 3.6**) jak również definicję i charakteryzację **silnej wypukłości względem relacji** $\succ_{(1)}$ ([**R3**], **Th. 4.5**), podaję twierdzenia **o porównywaniu relacji** $\succ_{(1)}$ i $\succ_{(2)}$ ([**R3**], **Th. 2.21, Th. 2.24**)

W rozdziale 1 przedstawiam zarys idei oraz ogólne sformułowanie wyników, a także wskazuję na trudności związane z ich uzyskaniem. W rozdziale 2 są porównywane klasy funkcji n–Wright–wypukłych oraz n–Jensen–wypukłych. Pokazuje się, że dla każdej liczby naturalnej n nieparzystej pierwsza z nich jest właściwą podklasą drugiej. Żeby to pokazać rozwijane są nowe narzędzie związane z teorią miary. W rozdziale 3 przedstawiam nową reprezentację całkową funkcji n-wypukłych, którą wykorzystuję do znalezienia związku funkcji n–wypukłej z funkcjami wielokrotnie monotonicznymi, charakteryzacji silnej n–wypukłości i badania własności typu podparciowego dla funkcji n–wypukłych. W rozdziale 4 definiuję badam funkcje wielokrotnie Wright–wypukłe uogólnienione poprzez randomizację. W rozdziale 5 wprowadzam nowe narzędzia użyteczne do otrzymywania i dowodzenia nierówności typu Hermita-Hadamarda dla funkcji wypukłych jak również dla funkcji wypukłych wyższych rzędów. W rozdziale 6 przedstawiam reprezentację całkową funkcji delta-wypukłej n-tego rzędu, ktora następnie wykorzystuję do dalszego badania delta-wypukłości wyższych rzędów, do wprowadzenia badania minimalnych funkcji kontrolnych i do charakteryzacji silnej delta-wypukłości n-tego rzędu. Wprowadzam również nowe narzędzia użyteczne do otrzymywania i dowodzenia nierówności typu Hermita-Hadamarda dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów. W rozdziale 7, są scharakteryzowane relacje $\succ_{(1)}$ i $\succ_{(2)}$. Podaję kryteria różniczkowe jak również czarakteryzacje probabilistyczne. Relacje te są również porównywane z sobą. Natomiast w rozdziale 8 krótko omawiam wyniki naukowe, które nie wchodzą w skład rozprawy. Rozdział 9 zawiera podstawowe informacje o autorze.

ROZDZIAŁ 1

Wprowadzenie

W całym autoreferacie $I \subset \mathbb{R}$ oznaczać będzie dowolny, ale ustalony przedział.

1. Funkcje wypukłe, Jensen-wypukłe, Wright-wypukłe.

Funkcja wypukła. Funkcję $f : I \to \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą*, jeśli

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) \tag{1}$$

dla wszystkich $x, y \in I$ i dla każdego $t \in [0,1]$.

Funkcje Jensen-wypukłe. Funkcję $f : I \to \mathbb{R}$ nazywamy *Jensen-wypukłą* (cf. [**172**]), jeśli

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{2}$$

dla wszystkich $x, y \in I$.

Funkcja Wright-wypukła. W 1954 r. E. M. Wright [**235**] wprowadził nowy rodzaj wypukłości funkcji rzeczywistych: funkcję f nazywamy *Wright–wypukłą* (porównaj [**172**]), jeśli

$$f\big(tx + (1-t)y\big) + f\big((1-t)x + ty\big) \leqslant f(x) + f(y) \tag{3}$$

dla wszystkich $x, y \in \mathcal{I}$ i $t \in [0,1]$. Oczywiście , jeżeli funkcja f jest wypukła, to nierówność (1), która zachodzi dla każdego $t \in [0,1]$, zachodzi w szczególności dla $t = \frac{1}{2}$, tzn. spełniona jest nierówność (2), czyli f jest Jensen-wypukła. Ponadto, jeżeli f jest wypukła , to z (1) dostajemy dwie nierówności:

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y),$$

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Dodając te nierówności stronami dostajemy (3), czyli f jest Wright-wypukła. Natomiast, gdy w (3) weźmiemy $t = \frac{1}{2}$, to otrzymujemy (2). Czyli, jeżeli f jest Wright-wypukła, to f jest Jensen-wypukła.

2. Nierówności typu Hermite'a–Hadamarda

Nierówność Hermite'a–Hadamarda. Jeśli funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest wypukła, to jest ciągła w przedziale (a,b) i ograniczona w $[a,b]$, w szczególności jest więc całkowalna. Zachodzi wtedy nierówność

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{4}$$

zwana *nierównością Hermite'a–Hadamarda.* Jej idące w różnych kierunkach uogólnienia są intensywnie badane przez wielu autorów. Szeroki przegląd zawiera monografia [**42**]. Uwagi poświęcone historii tej nierówności można znaleźć w pracy [**137**]. Warto dodać, że w klasie funkcji ciągłych z każdej z obu powyższych nierówności wynika wypukłość (zob. np. [**42, 63, 143**], a także [**96**, Exercise 8, str. 205] lub [**172**, Problem Q, str. 15]). Zagadnieniom tego rodzaju charakteryzacji funkcji wypukłych wyższych rzędów poświęcona jest praca [**20**].

Nierówność (4) ma związek z przybliżonym obliczaniem całek, a dokładnie z metodami prostokątów i trapezów. Wynikają z niej znane w analizie numerycznej oszacowania błędów tych metod.

Nierówność Hermite'a–Hadamarda–Fejéra. W pracy [**46**] Fejér podał następujące uogólnienie nierówności (4):

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot\int_a^b g(x)\,dx, \tag{5}$$

która zachodzi, jeśli f jest wypukła i g jest nieujemna i symetryczna względem punktu $(a+b)/2$ (patrz [**137**], [**42**] i [**158**] dla rysu historycznego).

(i) Zauważmy, że dla $g(x)=w(x)$ takiej że $\int_a^b w(x)dx = 1$, nierówność (5) może być przepisana w postaci

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(x)w(x)dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{6}$$

(ii) Odwrotnie, z nierówności (6) wynika (5). Rzeczywiście, jeżeli $\int_a^b g(x)dx > 0$, to wystarczy wziąć $w(x)=\left(\int_a^b g(x)dx\right)^{-1} g(x)$. Jeżeli $\int_a^b g(x)dx = 0$, to (5) jest oczywista

Wiele modyfikacji nierówności (4) i (5) można znaleźć np. w [**17**], [**18**], [**20**], [**36**], [**37**], [**42**], i w innych pracach tam podanych. W ostatniej pracy [**94**] M. Klaričić Bakula, J. Pečarić i J. Perić pewne ulepszenia wielu form nierówności typu Hermita-Hadamarda można znaleźć, mianowicie nierówności podanych przez Fejéra, Lupasa, Brennera-Alzera, Beesacka-Pečarića. Te ulepszenia implikują nierówność podaną przez Hammera-Bullena. W pracy [**R2**], używając lematu Ohlina [**150**] o wypukłym stochastycznym porządku, otrzymuję prosty dowód znanych nierówności typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra. Podaję również nowe nierówności. Wykorzystując własności s-wypukłego stochastycznego porządku [**39**], podaję również pewne nierówności typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra w przypadku funkcji wypukłych wyższych rzędów. Otrzymane wyniki są użyteczne przy badaniu nierówności między operatorami kwadraturowymi [**219**], [**220**]. W pracy [**R2**] podajemy pewne użyteczne narzędzia dla otrzymywania i dowodu wielu nierówności typu Hermita-Hadamarda, również dla funkcji wypukłych wyższych rzędów.

Opisujemy nierówność (5) w terminach wypukłych porządków stochastycznych. Wykorzystując lemat Ohlina [**150**] otrzymujemy prosty dowód nierówności (5).

Otrzymujemy uogólnienie nierówności (6), w przypadku gdy funkcja w nie jest symetryczna. Podajemy uogólnienie nierówności Brennera i Alzera [**28**]. Rozważamy również uogólnienie nierówności (6) w przypadku funkcji wypukłych wyższych rzędów. Otrzymane nierówności stosujemy do dowodu nierówności pomiędzy operami kwadraturowymi. .

3. Funkcje n-Jensen-wypukłe oraz n-Wright-wypukłe

Operatory różnicowe. Zwykły *operator różnicowy (przedni, ang. forward difference)* jest oznaczany jako

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x),$$

gdzie $x\in\mathcal{I}$ i $h\in\mathbb{R}$ z $x+h\in\mathcal{I}$. Jego iteracje definiujemy w zwykły sposób, tzn.

$$\Delta_{h_1\dots h_n h_{n+1}} f(x) = \Delta_{h_1\dots h_n}\big(\Delta_{h_{n+1}} f(x)\big),$$

gdzie $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathcal{I}$ i $h_1,\dots,h_n,h_{n+1}\in\mathbb{R}$ zakładając, że wszystkie potrzebne argumenty należą do $\mathcal{I}$ (czasami będziemy pomijać oczywiste założenia tego rodzaju). Jeżeli zachodzi warunek $h_1=\dots=h_n=h$, używamy standardowo

$$\Delta_h^n f(x) = \Delta_{h\dots h} f(x)\,,$$

gdzie element h jest wzięty n razy. będziemy również używać *operatora różnicowego wstecznego (ang. backward difference)*, który jest zdefiniowany wzorem

$$\nabla_h f(x) = f(x) - f(x-h), \tag{7}$$

gdzie $x\in\mathcal{I}$, $h\in\mathbb{R}$ i $x-h\in\mathcal{I}$. Iteracje są zdefiniowane podobnie jak dla zwykłego operatora różnicowego. Oczywiście, zachodzi wzór $\nabla_h f(x+h) = \Delta_h f(x)$, przez indukcję otrzymujemy następującą zależność

$$\nabla_{h_1\dots h_{n+1}} f(x+h_1+\dots+h_{n+1}) = \Delta_{h_1\dots h_{n+1}} f(x)\,, \tag{8}$$

gdzie $n\in\mathbb{N}$. W dalszym ciągu zakładamy, że $n\in\mathbb{N}$.

Funkcje n–Jensen–wypukłe. Funkcja f jest nazywana *Jensen–wypukłą rzędu* n (n–Jensen–wypukłą, w skrócie), jeśli

$$\Delta_h^{n+1} f(x) \geqslant 0 \tag{9}$$

dla wszystkich $x \in \mathcal{I}$ i $h > 0$ takich, że $x + nh \in \mathcal{I}$ (patrz również np. [**96**]). Oczywiście dla $n = 1$ otrzymujemy warunek

$$\Delta_h^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \geqslant 0$$

dla wszystkich $x \in \mathcal{I}$ i $h > 0$ z $x + h \in \mathcal{I}$, co jest równoważne warunkowi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x, y \in \mathcal{I},$$

tzn. Jensen–wypukłości funkcji f.

Funkcja n-Wright-wypukła. Nietrudno pokazać, że warunek (3) jest równoważny warunkowi

$$\Delta_{h_1 h_2} f(x) \geqslant 0$$

dla wszystkich $x \in \mathcal{I}$, $h_1, h_2 > 0$ z $x + h_1 + h_2 \in \mathcal{I}$ (patrz [**118**]). Na podstawie tej obserwacji, w pracach [**53**] i [**118**], została zdefiniowana Wright–wypukłość wyższych rzędów: funkcja f jest *Wright–wypukła rzędu* n (n–Wright–wypukła, w skrócie), gdy

$$\Delta_{h_1 \dots h_{n+1}} f(x) \geqslant 0 \tag{10}$$

dla wszystkich $x \in \mathcal{I}$ and $h_1, \dots, h_{n+1} > 0$ z $x + h_1 + \dots + h_{n+1} \in \mathcal{I}$. Oczywiście, rozważając wyżej $h_1 = \dots = h_{n+1} = h$, otrzymujemy $\Delta_h^{n+1} f(x) \geqslant 0$, co oznacza, że każda funkcja n–Wright wypukła jest n–Jensen wypukła.

Powstaje naturalne pytanie, czy jest prawdziwe zdanie odwrotne, tzn. czy funkcje n–Jensen–wypukłe są również funkcjami n–Wright–wypukłymi. Dla $n = 1$ nie jest trudno dać negatywną odpowiedź. mianowicie, funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = |a(x)|$, gdzie $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nieciągłą addytywną funkcją jest Jensen–wypukła, ale nie jest Wright–wypukła (por. [**147**]). w wielu pracach (patrz np. [**53, 54, 118**]) można znaleźć intensywne badania dotyczące Wright-wypukłości wyższych rzędów. Jakkolwiek, wspomniany wyżej problem nie był tam rozważany. W pracy [**R5**] wypełniamy tę lukę poprzez podanie negatywnej odpowiedzi dla wszystkich n dodatnich całkowitych (praca [**R5**] jest cytowana, bez samocytowań, w [**89, 90, 153**]). Należy podkreślić, że dla $n > 1$ (nieparzystych) odpowiedni przykład nie jest łatwo skonstruować, tak jak to było w przypadku $n = 1$, tzn. w przypadku zwykłej Jensen–wypukłości i Wright–wypukłości. Żeby osiągnąć nasz cel wprowadzamy nowe narzędzia związane z teorią miary, które, mamy nadzieję, mogą okazać przydatne w dalszych badaniach. Przeprowadzamy również pewne rozważania dla $n = 2$ żeby pokazać, że dla n parzystych nasz problem wydaje się być dość trudny. Należy wspomnieć, że w pracy [**153**] można znaleźć inne przykłady funkcji, które są n-Jensen wypukłe, ale nie są n-Wright wypukłe dla $n > 1$ nieparzystych, jakkolwiek nasza praca [**R5**] była pierwszą pracą, w której były podane przykłady takich funkcji. Dla n parzystych rozważany problem długo pozostawał otwarty. Ostatnio, Jacek Mrowiec [**140**] daje przykłady rozważanych funkcji również dla wszystkich $n > 1$ parzystych.

Niech n będzie naturalną liczbą nieparzystą i niech $H \subset \mathbb{R}$ będzie bazą Hamela, taką że $h_1, \dots, h_{n+1} \in H$ są różne i dodatnie. Niech $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie addytywną funkcją, taką że
$a(h_1) = -1, \quad a(h_2) = \dots = a(h_{n+1}) = 1$. My dowodzimy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \big(a(x)\big)_+^n \tag{11}$$

jest n–Jensen–wypukła, ale nie jest n–Wright–wypukła (patrz [**R5**], Theorem 2.3). Jest to jeden z głównych wyników rozprawy.

Faktycznie, ponieważ funkcja a jest addytywna, otrzymujemy, że funkcja f is n–Jensen–wypukła (patrz [**R5**], Corollary 2.2). Żeby udowodnić, że f nie jest n–Wright–wypukła wystarczy pokazać, że

$$\Delta_{h_1 \dots h_{n+1}} f(0) = \nabla_{h_1 \dots h_{n+1}} f(h_1 + \dots + h_{n+1}) = -1. \tag{12}$$

Jednakże to zadanie nie jest trywialne. Wymaga wprowadzenia nowych narzędzi i jest raczej długie. Wstępnie, żeby rzucić nieco światła na charakter naszej głównego problemu, rozważamy równość (12) dla $n = 3$ (see [**R5**], p. 263-264). W ogólnym przypadku, dowód równości (12) jest trudny. Rozważamy pewien operator $\mathcal{J}_{h_1 h_2 \dots h_{n+1}}$ ([**R5**], p. 266), który, jak pokazujemy, jest operatorem odwrotnym do operatora $\nabla_{h_1 \dots h_{n+1}}$. Następnie, używając tego operatora, definiujemy pewne miary $\mu_i = \mathcal{J}_{h_1 \dots h_{n+1}} \delta_{h_i}$, $i = 1, \dots, n+1$, oraz miarę znakowaną μ określoną wzorem $\mu = \mu_2 + \dots + \mu_{n+1} - \mu_1$, dla której mamy równość

$$\nabla_{h_1 \dots h_{n+1}} f(h_1 + \dots + h_{n+1}) = \nabla_{h_1 \dots h_{n+1}} (\mu + \delta_{h_1})^n (h_1 + \dots + h_{n+1}), \tag{13}$$

(patrz [**R5**], Theorem 4.5). Dalej, dowodzimy, że zachodzą następujące równości:

- $f(x) = (\mu + \delta_{h_1})^n(x), \quad x \in A,$
- $(\mu + \delta_{h_1})^n(x) = \mu^n(x) - (-1)^n \delta_{h_1}(x), \quad x \in A,$
- $\nabla_{h_1, \dots, h_{n+1}} \mu^n (h_1 + \dots + h_{n+1}) = 0,$
- $\nabla_{h_1, \dots, h_{n+1}} \delta_{h_1} (h_1 + \dots + h_{n+1}) = (-1)^n,$

gdzie A jest pewnym podzbiorem $\mathbb{R}$ (patrz [**R5**], Theorem 4.5, Lemma 4.6), z których, w połączeniu z (13), wynika ostatecznie nasza równość (12).

4. Funkcje n-wypukłe. Reprezentacja całkowa

Ilorazy różnicowe. Dla $n+1$ parami różnych punktów $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$ określamy rekurencyjnie *iloraz różnicowy n–tego rzędu* (w skrócie iloraz różnicowy)funkcji $f : I \to \mathbb{R}$:

$$[x_1; f] := f(x_1), \quad [x_1, \dots, x_{n+1}; f] := \frac{[x_2, \dots, x_{n+1}; f] - [x_1, \dots, x_n; f]}{x_{n+1} - x_1}.$$

W szczególności

$$[x_1, x_2; f] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

więc zwykły iloraz różnicowy jest ilorazem różnicowym pierwszego rzędu.

Na określenie tego pojęcia literatura angielskojęzyczna używa terminu *divided differences.* Ilorazy różnicowe mają podstawowe znaczenie w analizie numerycznej. Ich własności są dobrze zbadane (zob. np. [**69, 96, 165**]).

Funkcje n-wypukłe – definicja. Można zauważyć, że funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych trzech parami różnych punktów $x_1, x_2, x_3 \in I$, iloraz różnicowy $[x_1, x_2, x_3; f]$ jest nieujemny. Śladem takiego rozumienia wypukłości podążył jako pierwszy niemiecki matematyk Hopf. W swojej rozprawie doktorskiej [**69**] z roku 1926 rozważał funkcje z nieujemnymi ilorazami różnicowymi dowodząc m. in. podstawowych własności regularnościowych. Nie użył jednak żadnej nazwy dla klasy badanych przez siebie funkcji. Dopiero osiem lat później rumuński matematyk Popoviciu w swojej rozprawie doktorskiej [**165**] wprowadził nazwy „funkcje wypukłe wyższych rzędów" oraz „funkcje n–wypukłe".

Niech $n \in \mathbb{N}$. Funkcję $f : I \to \mathbb{R}$ nazywamy *n–wypukłą* (*wypukłą n–tego rzędu*), jeśli

$$[x_1, \dots, x_{n+2}; f] \geqslant 0$$

dla każdych $n+2$ parami różnych punktów $x_1, \dots, x_{n+2} \in I$. Funkcja f jest *n–wklęsła*, jeśli funkcja $-f$ jest n–wypukła.

W ten sposób funkcje 1–wypukłe są wypukłe w zwykłym sensie.

Funkcje n-wypukłe – własności. Wiele wyników o funkcjach n-wypukłych można znaleźć, między innymi, w [**172, 96**]. W szczególności, wiemy że, funkcja $f(x)\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest n-wypukła ($n \geqslant 1$) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna prawostronna $f_R^{(n)}(x)$ (lub lewostronna $f_L^{(n)}(x)$) istnieje i jest nie-malejąca na odcinku (a,b). W dalszym ciągu pracy $f^{(n)}(x)$ będziemy używać do oznaczenia $f_R^{(n)}(x)$.

Funkcje n-wypukłe – reprezentacja całkowa. Jeżeli $f(x)$ jest wystarczająco gładka na $[a,b]$ (tzn. jest $(n+1)$-razy różniczkowalna na $[a,b]$ w sposób ciągły, przy czym na końcach przedziału zakłada się różniczkowalność z lewej, bądź odpowiednio z prawej strony), wtedy ze wzoru Taylora otrzymujemy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_a^b (x-t)_+^n f^{(n)}(t) dt$$

($x \in (a,b)$), gdzie $(x-t)_+^{n-1} = \max\{(x-t)^{n-1}, 0\}$ (patrz [**160**]).

Załóżmy, że $f(x)$ jest n-wypukła na (a,b) ($n \geqslant 1$). Wtedy pochodne lewo i prawostronne n-tego rzędu ($f_L^{(n)}(x)$ and $f_R^{(n)}(x)$) istnieją na (a,b). Dodatkowo, obie te funkcje są niemalejące. Z taką funkcją f związujemy pewną miarę μ zdefiniowaną na (a,b) następującym wzorem

$$\mu([x,y]) = f_R^{(n)}(y) - f_L^{(n)}(x),$$

dla $a < x \leqslant y < b$. Jest to nieujemna borelowska miara na (a,b). Jeśli granica prawostronna $f_R^{(n)}(a) = \lim_{x\to a+} f_R^{(n)}(x)$ jest skończona, wtedy miara μ może być rozszerzona do ograniczonej (skończonej) miary na całym odcinku $[a,c]$, dla wszystkich $c < b$. W tym przypadku funkcja $f(x)$ ma reprezentację

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_R^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_a^b (x-t)_+^n d\mu(t),$$

dla wszystkich $x \in (a,b)$. Jeśli nie możemy rozszerzyć miary μ do punktu końcowego a, wtedy będziemy mieć te reprezentacje tylko na domkniętych podprzedziałach przedziału (a,b). Twierdzenie odwrotne również zachodzi. Wyniki te można znaleźć w Popoviciu [**165**] (patrz też Karlin i Studden [**93**], Bullen [**30**], Brown [**29**], Granata [**58**], Pinkus i Wulbert [**160**]). Inaczej mówiąc, powyższa reprezentacja jest prawdziwa dla $x \in (a,b)$, jeżeli μ jest o wahaniu skończonym na (a,b), w przeciwnym razie mamy te reprezentację tylko na podprzedziałach domkniętych (a,b).

W pracy [**R6**], podaję analogiczną reprezentację całkową, w ogólnym przypadku. Reprezentacja, którą otrzymuję ([**R6**], Theorem 2.9, Theorem 2.10) dotyczy miar μ z niekoniecznie skończonymi wahaniami. Jest to jeden z głównych wyników rozprawy. Niech $\xi \in (a,b)$. Dowodzę, że n-wypukła funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma reprezentację dana wzorem

$$f(x) = \int_{(a,\xi]} (-1)^{n+1} \frac{[-(x-u)]_+^n}{n!} \mu_{(n)\xi-}(du) + \int_{[\xi,b)} \frac{(x-u)_+^n}{n!} \mu_{(n)\xi+}(du) + Q_\xi(x), \tag{14}$$

gdzie $\mu_{(n)\xi-}(du) = d[f^{(n)}(u) - f^{(n)}(\xi+)]_-$, $\mu_{(n)\xi+}(du) = d[f^{(n)}(u) - f^{(n)}(\xi+)]_+$, $Q_\xi \in \Pi_n$ ([**R6**], Theorem 2.10). Ponadto. miara $\mu_{(n)} = \mu_{(n)\xi-} + \mu_{(n)\xi+}$ jest niezależna od ξ oraz zachodzi wzór $\mu_{(n)}(du) = df^{(n)}(u)$. Miara $\mu_{(n)}$ jest nazywana miarą spektralną odpowiadającą funkcji f. Jeżeli przynajmniej jedna z granic jednostronnych $\lim_{x\to a+} f_R^{(n)}(x)$ lub $\lim_{x\to b-} f_L^{(n)}(x)$ jest skończona, to w powyższej reprezentacji, może występować tylko jedna z całek, pierwsza (z $\xi = b$) lub druga (z $\xi = a$), odpowiednio ([**R6**], Theorem 2.9). Natomiast, jeżeli obie powyższe granice jednostronne są nieskończone to w reprezentacji (14) muszą być dwie całki (z $\xi \in (a,b)$).

n-wypukłość i wielokrotna monotoniczność. Zgodnie z klasyczną definicją (patrz Williamson [**223**]), funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest nazywana $(n+1)$-*krotnie monotoniczną nierosnącą* ($n \geqslant 1$), gdy $(-1)^k f^{(k)}(x)$ jest nieujemna, nierosnąca i wypukła dla $x \in (a,b)$ i dla wszystkich $k = 0,1,\ldots,n-1$. Gdy $n = 1$, $f(x)$ jest zwykłą funkcją nieujemną i nierosnącą. Zbiór wszystkich takich funkcji będziemy oznaczać jako $\mathcal{M}_{(n+1)-}((a,b))$. Każda $f \in \mathcal{M}_{(n+1)-}((a,b))$ jest dana wzorem

$$f(x) = \int_a^b \frac{[-(x-u)]_+^n}{n!} d\beta(u), \tag{15}$$

dla $x \in (a,b)$, gdzie $\beta(u)$ jest funkcją niemalejącą (patrz Williamson [**223**]).

Funkcja f jest nazywana $(n+1)$-*krotnie monotoniczną niemalejącą* (w skrócie $(n+1)$-*krotnie monotoniczną*) ($n \geqslant 1$), gdy $f^{(k)}(x)$ jest nieujemna, niemalejąca i wypukła dla $x \in (a,b)$ i dla wszystkich $k = 0,1,2,\ldots,n-1$. Gdy $n = 1$, $f(x)$ jest zwykłą nieujemną funkcją niemalejącą. Zbiór wszystkich takich funkcji będziemy oznaczać jako $\mathcal{M}_{(n+1)+}((a,b))$. Każda $f \in \mathcal{M}_{(n+1)+}((a,b))$ ma reprezentację

$$f(x) = \int_a^b \frac{(x-u)_+^n}{n!} d\beta(u), \tag{16}$$

dla $x \in (a,b)$, gdzie $\beta(u)$ jest funkcją niemalejącą. Gdy f jest postaci (16), wtedy będziemy pisać $f = I_n(\beta)$, i powiemy, że f jest generowana przez funkcję β.

Korzystając z reprezentacji (14), otrzymujemy, że n-wypukła funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ może być przedstawiona w postaci sumy dwóch $(n+1)$-krotnie monotonicznych funkcji oraz wielomianu stopnia co najwyżej n ([**R6**], Theorem 3.2)

$$f(x) = M_1(x) + M_2(x) + Q(x),$$

dla $x \in (a,b)$, gdzie $(-1)^{n+1}M_1(x) \in \mathcal{M}_{(n+1)-}((a,\xi))$, $M_2(x) \in \mathcal{M}_{(n+1)+}((\xi,b))$, z $a \leqslant \xi \leqslant b$ oraz $Q(x) \in \Pi_n$.

Jednym z zastosowań powyższego twierdzenia jest uzyskanie twierdzenia o reprezentacji funkcji n-Wright-wypukłej ([**R6**], Theorem 3.6), które uzupełnia i uogólnia wyniki Maksy i Pálesa [**118**].

Względna n-wypukłość. Reprezentację dana wzorem (14) będę dalej stosować przy badaniu względnej n-wypukłości ([**R6**], Theorem 4.3-4.7 i 4.10-4.12), silnej n-wypukłości ([**R6**], Theorem 4.15, Corollary 4.16) oraz interpolacji funkcji przez funkcje n-wypukłe ([**R6**], Theorem 5.4). Wyniki te uzupełniają i uogólniają wyniki o silnej n-wypukłości podane przez Gera i Nikodema w [**52**] oraz wyniki Wąsowicza podane w pracy [**217**], o własnościach typu podparciowego dla funkcji n-wypukłych, między innymi.

Niech $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją n-wypukłą. Mówimy, że funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest *n-wypukła względem g*, jeśli $f-g$ jest n-wypukła, i oznaczamy to jako $f \succeq_n g$. Zauważmy, że jeżeli f jest n-wypukła względem g, to obie funkcje $f-g$ oraz g są n-wypukłe. Pisząc $f = g + (f-g)$, otrzymujemy, że f koniecznie musi być n-wypukła.

Znanych jest wiele uogólnień wypukłości poprzez względną wypukłość. Względna n-wypukłość zdefiniowana wyżej jest uogólnieniem względnej wypukłości (dla $n=1$) badanej w pracy [**93**] Karlina i Studdena (patrz również [**32**], [**63**], [**155**], [**158**]).

Względna n-wypukłość indukuje częściowy porządek w rodzinie pewnych podzbiorów zbioru funkcji n-wypukłych ([**R6**], Theorem 4.5). Badam miarę n-wypukłości funkcji n-wypukłej f, korzystając z miar n-spektralnych występujących w reprezentacji funkcji n-wypukłej ([**R6**], str. 743). Podaję charakteryzację względnej n-wypukłości w terminach miary n-wypukłości, jak również w języku pochodnych dystrybucyjnych n-tego rzędu, jak również w języku pochodnych Radona-Nikodyma ([**R6**], Theorem 4.7). Wykorzystując rozkład Lebesgue'a miary n-spektralnej odpowiadającej funkcji n-wypukłej f, rozważam odpowiadający mu rozkład funkcji f ([**R6**], Remark 4.8). Rozkład ten jest zastosowany do otrzymania pewnych użytecznych własności względnej n-wypukłości ([**R6**], Theorems 4.10 – 4.12).

Silna n-wypukłość. Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest nazywana *silnie wypukłą z modułem* $c>0$, gdy

$$f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2,$$

dla wszystkich $x,y \in (a,b)$ i $t \in [0,1]$. Silnie wypukłe funkcje były wprowadzone przez Polyaka w [**164**]. Pewne ich własności można znaleźć , między innymi, w [**172**], [**67**], [**163**]. Silną wypukłość można scharakteryzować w języku wypukłości. Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest silnie wypukła z modułem $c>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f(x) - cx^2$ jest wypukła. Funkcja silnie wypukła dwukrotnie różniczkowalna może być scharakteryzowana w języku drugiej pochodnej $f''(x)$, jako funkcja dla której $f''(x) \geqslant 2c$ $(x \in (a,b))$.

Jako uogólnienie silnej wypukłości z modułem c, w pracy [**R6**], definiuję silną n-wypukłość z modułem c ([**R6**], str. 745). Mówimy, że funkcja f jest *silnie n-wypukła z modułem c* ($n \geqslant 1$, $c>0$), gdy f jest n-wypukła względem funkcji $g(x) = \frac{cx^{(n+1)}}{(n+1)!}$. Wtedy silna wypukłość z modułem $2c$ (patrz Roberts and Varberg [**172**]) pokrywa się z naszą silną 1-wypukłością z modułem c. Pisząc $f(x) = \left(f(x) - \frac{cx^{(n+1)}}{(n+1)!}\right) + \frac{cx^{(n+1)}}{(n+1)!}$, otrzymujemy, że f jest silnie n-wypukła z modułem $c>0$, to f jest również n-wypukła. Zauważmy, że silna n-wypukłość była niezależnie zdefiniowana również przez R. Gera and K. Nikodema w [**52**] inaczej, mianowicie w języku ilorazów różnicowych, w ten sposób, że silna n-wypukłość z modułem c pokrywa się z silną n-wypukłością z modułem $\frac{c}{(n+1)!}$ według naszej definicji podanej w pracy [**R6**]. W pracy [**R6**] podaję charakteryzację silnej n-wypukłości funkcji f z modułem c bez żadnych dodatkowych warunków dotyczących różniczkowalności funkcji f, i jako wniosek otrzymuję charakteryzację silnej n-wypukłości dla funkcji $(n+1)$-krotnie różniczkowalnych. Funkcja n-wypukła f jest silnie n-wypukła z modułem c ([**R6**], Theorem 4.15) wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{(n+1)}(x) \geqslant c$ dla $x \in (a,b)$ λ p.w. (λ oznacza miarę Lebesgue'a). Inaczej mówiąc, funkcja f silnie n-wypukła jest to funkcja postaci $f(x) = f_{cont}(x) + R(x)$ $\quad (x \in (a,b))$, gdzie funkcja $f_{cont}\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna i silnie n-wypukła z modułem c, a funkcja $R\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest n-wypukła i taka że $R^{(n+1)}(x) = 0$ dla $x \in (a,b)$ λ p.w. ([**R6**], Corollary 4.16). Jako wniosek, otrzymuję charakteryzację funkcji f, które są silnie n-wypukłe z modułem c oraz $(n+1)$-krotnie różniczkowalne ([**R6**], Corollary 4.17) jako funkcji dla których $f^{(n+1)}(x) \geqslant c$ $\quad (x \in (a,b))$. Tę charakteryzację funkcji, które są silnie n-wypukłe i $(n+1)$-krotnie różniczkowalne można znaleźć również w pracy [**52**].

Własności typu podparciowego dla funkcji n-wypukłych. Wiadomo, że funkcji wypukłej $f\colon I \to \mathbb{R}$, w każdym punkcie wewnętrznym I odpowiada podparcie afiniczne (tzn. dla każdego $x_0 \in \mathit{Int}\, I$ istnieje funkcja afiniczna $a\colon I \to \mathbb{R}$ taka, że $a(x_0) = f(x_0)$ i $a \leqslant f$ on I). Funkcje wypukłe wyższych rzędów (dokładniej nieparzystych rzędów) mają podobną własność; są one podpierane przez wielomiany rzędu nie wyższego niż rząd wypukłości (patrz Kuczma [**96**], Popoviciu [**165**], Roberts and Varberg [**172**]). W pracy [**217**] Wąsowicz wprowadził podparcia wielomianowe typu $(l_1,\dots,l_k)$, i udowodnił, że n-wypukłe funkcje są podpierane przez wielomiany, które są podparciami typu $(l_1,\dots,l_k)$, w punktach $x_1,\dots,x_k \in I$, gdzie $l_1+\dots l_k = n+1$, $k \leqslant n$. Liczby $l_1,\dots,l_k$ mogą być interpretowane jako krotności punktów $x_1,\dots,x_k$, odpowiednio. W pracy [**R6**] wykorzystuję powyższe wyniki Wąsowicza [**217**], otrzymując ogólniejszy wynik, że dla każdych dwóch funkcji n-wypukłych f i g, takich, że f jest n-wypukła względem g, funkcja g jest podparciem typu $(l_1,\dots,l_k)$ dla funkcji f, z dokładnością do pewnego wielomianu $p\in\Pi_n$ ([**R6**], Theorem 5.4).

5. Randomizacja funkcji n-Wright-wypukłych

Klasy $\mathcal{W}_n(\Theta,Q)$. Oznaczmy, dla $n=1,2,\dots$

$\mathcal{M}_n=\mathcal{M}_{n+}((-\infty,\infty))=\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f$ jest n-krotnie monotoniczna (niemalejąca) $\}$. Niech $\mathcal{M}_0=\{f' : f\in\mathcal{M}_1\}$, gdzie f' oznacza tutaj pochodna dystrybucyjną. Funkcja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest *całkowicie monotoniczna* (niemalejąca), gdy $f^{(n)}(x)\geqslant 0$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$ i dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$. Niech $\mathcal{M}_\infty$ będzie klasą wszystkich funkcji całkowicie monotonicznych. Każda $f\in\mathcal{M}_\infty$ ma reprezentację ([**230**])

$$f(x)=\int_0^\infty e^{xu}d\beta(u),$$

dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$, gdzie $\beta(u)$ jest niemalejąca.

Niech $Q\in\{\mathcal{M}_0,\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2,\dots\}$. Niech $f\in Q$ i niech Θ będzie zmienną losową skoncentrowaną na $[0,\infty)$ $(\mu_\Theta\neq\delta_0)$. Niech $n\geqslant 1$. Niech $\Theta_1,\dots,\Theta_n$ będą niezależnymi kopiami zmiennej losowej Θ. Na podstawie (8) i (10) funkcja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest $(p-1)$-Wright-wypukła $(p\geqslant 2)$, gdy

$$\nabla_{h_1\dots h_p} f(x)\geqslant 0, \tag{17}$$

dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$ i $h_1,\dots,h_p>0$. Będziemy rozważać pewne uogólnienie funkcji spełniającej (17). Zamieniamy w (17) $h_1,\dots,h_p$ przez zmienne losowe $\Theta_1,\dots,\ \Theta_p$ $(p=1,2,\dots,n)$, a następnie bierzemy wartość oczekiwaną. Mówimy, że $f\in Q$ *jest n- krotnie Θ-Wright-wypukła względem Q* [**R4**], gdy

$$E\nabla_{\Theta_1\dots\Theta_p} f(x)\in Q,\ p=1,2,\dots,n.$$

Niech $\mathcal{W}_n=\mathcal{W}_n(\Theta,Q)$ $(n=1,2,\dots)$ będzie zbiorem wszystkich funkcji $f\in Q$ takich, że f jest n-krotnie Θ-Wright-wypukła względem Q. Definiujemy $\mathcal{W}_0(\Theta,Q)=Q,\ \ \mathcal{W}(\Theta,Q)=\mathcal{W}_1(\Theta,Q)$.

Rozważmy przypadek, gdy $Q=\mathcal{M}_0$. Mamy wtedy

$$f\in\mathcal{W}_n(\Theta,\mathcal{M}_0)\Longleftrightarrow E\nabla_{\Theta_1\dots\Theta_k}f(x)\geqslant 0,\ k=1,2,\dots,n.$$

Inaczej mówiąc, f może być uważana za zrandomizowaną wersję funkcji $(n-1)$-krotnie-Wright-wypukłej.

Zrandomizowane operatory różnicowe i przesunięcia. Niech $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją i niech $h>0$. Przypomnijmy definicję operatora przesunięcia i różnicowego (wstecznego) τ_h i ∇_h zdefiniowanych następująco

$$\tau_h f(x)=f(x-h),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{18}$$

$$\nabla_h f(x)=f(x)-f(x-h),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{19}$$

odpowiednio. Zamieniając w (18) i (19) liczbę rzeczywistą h przez zmienną losowa Θ i biorąc wartości oczekiwane, definiujemy zrandomizowane operatory przesunięcia i różnicowego U and Φ jako

$$Uf(x)=\ U_\Theta f(x)=\ E\tau_\Theta f(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{20}$$

$$\Phi f(x)=\ \Phi_\Theta f(x)=\ E\nabla_\Theta f(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{21}$$

odpowiednio. Iterując (20) i(21) definiujemy U^n i Φ^n dla $n=1,2,\dots$, następująco

$$U^n f(x)=U^n_\Theta f(x)=\ U_{\Theta_n\dots\Theta_1}f(x)=\ U_{\Theta_n}(U_{\Theta_{n-1}\dots\Theta_1}f(x)), \tag{22}$$

$$\Phi^n f(x)=\Phi^n_\Theta F(x)=\ \Phi_{\Theta_n\dots\Theta_1}f(x)=\ \Phi_{\Theta_n}(\Phi_{\Theta_{n-1}\dots\Theta_1}f(x)), \tag{23}$$

gdzie $\Theta_1,\dots,\Theta_n$ są niezależnymi kopiami zmiennej losowej Θ. Dla $n=0$ definiujemy $U^0f(x)=f(x)$ i $\Phi^0 f(x)\equiv 0$.

Generatory funkcji z klas $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$. Niech $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ będą niezależnymi kopiami Θ i niech $G \in Q$. Definiuję operator $J(G)$ następująco

$$J(G) = J_\Theta(G) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{\Theta_n \ldots \Theta_1} G = \sum_{n=0}^{\infty} U^n G. \tag{24}$$

Iterując (24), definiuję J^n ($n = 1, 2, \ldots$)

$$J^n(G) = J(J^{n-1}(G)), \tag{25}$$

przyjmując umowę, że $J^0(G) = G$. Wtedy $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ ([**R4**], Lemma 2.7, Theorem 2.8) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f = J^n(G_n), \tag{26}$$

gdzie $G_n \in Q$. Funkcja G_n opisana wyżej jest jedyna, ponadto mamy, że

$$G_n = \Phi^n f. \tag{27}$$

Inaczej mówiąc, używając operatora J^n, przy pomocy wzoru (25), można otrzymywać funkcje z klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$. Ponadto, dla danej $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$, na podstawie wzoru (27), używając operatora Φ^n, dostaje się funkcję G_n która jest funkcją generującą. Stąd, możemy powiedzieć, że f jest generowana przy pomocy funkcji G_n i będziemy nazywać G_n *generatorem* funkcji f. Operatory J^n and Φ^n są operatorami wzajemnie odwrotnymi. Wzory (25) i (27) są użyteczne przy otrzymywaniu reprezentacji całkowych funkcji należących do klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ ([**R4**], Lemma 2.12).

Przypadek wykładniczy, $\Theta \sim$ Exp(1).
Podaję reprezentację całkową funkcji z klas $\mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1), \mathcal{M}_j)$ ($n = 1, 2, \ldots,\ j = 0, 1, 2, \ldots.$) (see [**R4**], Theorem 3.3, Theorem 5.2, Remark 5.4). Dowodzę, że jeżeli $f \in \mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1), \mathcal{M}_1)$, to $U^n_{\mathrm{Exp}(1)} f \in \mathcal{M}_{n+1}$ ([**R4**], Theorem 3.6). Podaję również inny sposób generowania funkcji z klas $\mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1), \mathcal{M}_1)$. Pokazuję, że funkcja $f \in \mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1), \mathcal{M}_1)$ może być przedstawiona jako pewna suma generowana przez funkcję z klasy $\mathcal{M}_{n+1}$ ([**R4**], Theorem 3.9). Badam również klasę $\mathcal{W}_\infty(\Theta, Q)$ funkcji *całkowicie* Θ-*Wright-wypukłych*, zdefiniowaną następująco

$$\mathcal{W}_\infty(\Theta, Q) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n(\Theta, Q).$$

Dowodzę, że

$$\mathcal{W}_\infty(\mathrm{Exp}(1), \mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_\infty$$

(patrz [**R4**], Theorem 4.1). Jest to bardzo ciekawy wynik, którego pokazanie nie było proste. Trzeba było wykonać wiele przekształceń tak, żeby otrzymać pewien ciąg dążący w granicy do funkcji wykładniczej. Dowód wymagał użycia metod i twierdzeń z teorii miary (np. twierdzenie Helly'ego o wyborze).

Przypadek dyskretny, $\Theta = X_p$.
Rozważam zmienną losową $\Theta = X_p$ taką, że

$$\mu_{X_p} = q\delta_0 + p\delta_1 \quad (0 < p < 1,\ q = 1 - p).$$

Otrzymuję reprezentację całkową funkcji z klasy $\mathcal{W}_n(X_p, \mathcal{M}_j)$ ($n = 1, 2, \ldots,\ j = 0, 1$) oraz z klasy $\mathcal{W}_\infty(X_p, \mathcal{M}_j)$ ($n = 1, 2, \ldots,\ j = 0, 1$) (patrz [**R4**], Theorem 7.1, Theorem 7.4). W szczególności dowodzę, że

$$\mathcal{M}_\infty \subsetneq \mathcal{W}_\infty(X_p, \mathcal{M}_1).$$

Jak widzimy, w tym przypadku nie ma równości.

Wersja multiplikatywna. Badam również przypadek multiplikatywnej wersji funkcji wielokrotnej Wright-wypukłej, otrzymując reprezentacje całkowe (patrz [**R4**], Theorem 6.2, Theorem 6.3).

Problemy otwarte. W [**R4**] (Section 8, Remarks 8.1–8.10) podaję wiele otwartych problemów dotyczących zrandomizowanych funkcji wielokrotnie Wright-wypukłych. W szczególności mogłoby być interesujące, czy zachodzi równość $\mathcal{W}_\infty(X, \mathcal{M}_j) = \mathcal{M}_\infty$, w przypadku, gdy zmienna losowa X ma rozkład dyskretny, ale nie arytmetyczny, np. $P(X = 1) = p$ and $P(X = \sqrt{2}) = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

6. Funkcje delta-wypukłe wyższych rzędów

W pracy [**R1**] podaję reprezentację całkową funkcji f delta-wypukłych n-tego rzędu (wprowadzonych przez R. Gera (1994)) w [**51**]), które mogą być przedstawione w postaci różnicy dwóch n-wypukłych funkcji. Moja reprezentacja jest prawdziwa bez żadnych dodatkowych założeń o funkcji f, i uogólnia ona znane wyniki o reprezentacji funkcji delta-wypukłej (patrz np. Roberts i Varberg (1973) [**172**]). Dalej, reprezentację tę stosuję do otrzymania pewnej przydatnej charakteryzacji funkcji kontrolnych odpowiadających funkcji f, do zdefiniowania kanonicznego rozkładu funkcji f, do dowodu istnienia i do zbadania własności minimalnej funkcji kontrolnej związanej z funkcją f (co uogólnia charakteryzację Hartmana (1959) [**64**] minimalnej funkcji kontrolnej związanej z delta-wypukłą funkcją), oraz do zdefiniowania i zbadania silnej delta-wypukłości n-tego rzędu, która uogólnia silną n-wypukłość zdefiniowaną i badaną w pracach Rajba (2011) [**R6**], i Ger i Nikodem (2011) [**52**]. Proponuję również pewne użyteczne narzędzia do otrzymywania nierówności typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów, które uogólniają znane nierówności Dragomira i in. (2002) [**43**]. Wyniki te stosuję następnie do otrzymywania pewnych nierówności pomiędzy operatorami kwadraturowymi dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów.

Funkcje delta-wypukłe. Funkcje delta-wypukłe są funkcjami reprezentowalnymi jako różnice dwóch funkcji wypukłych (patrz [**172**]).

Funkcje delta-wypukłe n-tego rzędu . Pojęcie funkcji delta-wypukłej n-tego rzędu jest szczególnym przypadkiem pojęcia odwzorowania delta-wypukłego n-tego rzędu pomiędzy pomiędzy dwiema przestrzeniami liniowymi unormowanymi. Odwzorowania te zostaly wprowadzone przez R. Gera (1994) [**51**] jako rozszerzenie delta-wypukłch odwzorowań (patrz [**215**]). Funkcje delta-wypukłe n-tego rzędu są funkcjami, które są reprezentowalne jak różnica dwóch funkcji n-wypukłych (patrz [**51**]). Przypomnijmy, że funkcja $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ jest nazywana *delta-wypukłą n-tego rzędu* [[**51**]], gdy istnieje funkcja n-wypukła g taka, że dla wszystkich $x,y\in(a,b)$,

$$x\leqslant y \Rightarrow \left|\Delta^{n+1}_{\frac{y-x}{n+1}} f(x)\right| \leqslant \Delta^{n+1}_{\frac{y-x}{n+1}} g(x). \tag{28}$$

Funkcje kontrolne. Każda funkcja g spełniająca (28) jest nazywana *funkcją kontrolną dla f*, lub mowimy, że funkcja f jest *delta-wypukłą funkcją n-tego rzędu* z funkcją kontrolną g, jak również mówimy że f jest *g-wypukle zdominowana n-tego rzędu* (w skrócie *delta-wypukła* albo *g-wypukle zdominowana* gdy $n=1$).

Funkcje delta-wypukłe n-tego rzędu – wlasności. Niech $g\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będzie n-wypukła funkcją i niech $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją. Wtedy następujące zdania są równoważne:
(a) f jest delta-wypukła n-tego rzędu z funkcją kontrolną g,
(b) funkcje $g-f$ i $g+f$ są n-wypukłe na (a,b),
(c) istnieja dwie n-wypukłe funkcje $\varphi_1,\varphi_2\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ takie, że $f=\varphi_1-\varphi_2$ and $g=\varphi_1+\varphi_2$.

Reprezentacja całkowa. W pracy [**R1**] podaję reprezentacją całkowa funkcji delta-wypukłej f n-tego rzędu. Niech $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją i niech $\xi\in(a,b)$. Wtedy f jest delta-wypukła n-tego rzędu wtedy i tylko wtedy gdy f ma reprezentację ([**R1**], Th. 2.1)

$$f(x)=\int_{(a,\xi)}(-1)^{n+1}\frac{[-(x-u)]_+^n}{n!}\tau_{(n)}(du)+\int_{[\xi,b)}\frac{(x-u)_+^n}{n!}\tau_{(n)}(du)+Q_\xi(x), \tag{29}$$

gdzie $\tau_{(n)}$ jest miara znakowaną na $\mathcal{B}((a,b))$, teką że $-\infty<\tau_{(n)}((c,d))<\infty$ dla wszystkich $a<c<d<b$, i $Q_\xi\in\Pi_n$. Ponadto, miara$\tau_{(n)}$ jest jedyna, tzn., jeżeli ξ_1, $\xi_2\in(a,b)$ i dwie trójki $(\xi_1,\tau_{(n),1},Q_{\xi_1})$ i $(\xi_2,\tau_{(n),2},Q_{\xi_2})$ odpowiadają funkcji f w reprezentacji (29), to $\tau_{(n)1}=\tau_{(n)2}$. Jeżeli $f=\varphi_1-\varphi_2$, gdzie $\varphi_1,\varphi_2\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ są obie n-wypukłe, to $\tau_{(n)}=\mu_{(n)1}-\mu_{(n)2}$, $\mu_{(n)1}(du)=d\varphi_1^{(n)}(u)$ and $\mu_{(n)2}(du)=d\varphi_2^{(n)}(u)$. Będziemy nazywać $\tau_{(n)}$ *n-spektralną znakowaną miarą* funkcji delta-wypukłej f n-tego rzędu.

Zauważmy, że nasz wzór na reprezentację całkową ma zastosowanie bez żadnych dodatkowych założeń dla funkcji f, i uogólnie on i rozszerza wyniki Roberts and Varberg (1973)[**172**] dla funkcji wypukłej. Reprezentację te stosujemy do otrzymania użytecznej charakteryzacji funkcji kontrolnych odpowiadających f, do zdefiniowania kanonicznego rozkładu funkcji f, do pokazania istnienia i zbadania własności minimalnych funkcji kontrolnych dla funkcji f (co uogólnia odpowiadające im wyniki Hartmana (1959) [**64**] dla funkcji delta-wypukłych), oraz do zdefiniowania i zbadania silnej delta-wypukłości n-tego rzędu, co uogólnia silną n-wypukłość badaną w pracach Rajba (2011) [**R6**], oraz Ger i Nikodem (2011) [**52**]. Proponuję również pewne użyteczne narzędzia do otrzymywania i dowodzenia wielu postaci nierówności typu Hermita-Hadamarda-Fejéra dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów, które uogólniają wyniki Dragomira i inn. (2002) [**43**]. Wyniki te są stosowane do otrzymywania i dowodu nierówności między kwadraturami dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów.

Minimalne funkcje kontrolne. Przypomnijmy definicję minimalnych funkcji kontrolnych ([**R1**], Def. 2.2). Niech $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją delta wypukłą n-tego rzędu. Niech f będzie postaci $f=\varphi_1^*-\varphi_2^*$, gdzie φ_1^*, φ_2^* są obie funkcjami n-wypukłymi. Mówimy, że φ_1^* i φ_2^* są *minimalnymi n-wypukłymi funkcjami* w reprezentacji funkcji f jako różnicy dwóch n-wypukłych funkcji (krócej minimalnymi n-wypukłymi funkcjami, jeżeli dla każdych innych dwóch n-wypukłych funkcji φ_1 i φ_2 takich, że $f=\varphi_1-\varphi_2$, mamy, że $\varphi_1-\varphi_1^*$ i $\varphi_2-\varphi_2^*$ są obie n-wypukłe. Mówimy, że funkcja kontrolna $g^*\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ jest *minimalna funkcją kontrolną* dla f, gdy

$$\left|\Delta^{n+1}_{\frac{y-x}{n+1}}f(x)\right|\leqslant\Delta^{n+1}_{\frac{y-x}{n+1}}g^*(x)\leqslant\Delta^{n+1}_{\frac{y-x}{n+1}}g(x),$$

dla każdej innej fukcji $g\colon (a,b)\to\mathbb{R}$, która jest funkcją kontrolną dla f i dla wszystkich $x,y\in(a,b)$ takich że $x<y$.

W pracy [**R1**] (Th. 2.3) dowodzimy, że dla każdej funkcji delta-wypukłej n-tego rzędu istnieje minimalna funkcja kontrolna. Niech $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją delta-wypukłą n-tego rzędu z trójką $(\xi,\tau_{(n)},Q_\xi)$ $(\xi\in(a,b))$ w reprezentacji całkowej (29). Rozpatrzmy rozkład Hahna-Jordana miary znakowanej $\tau_{(n)}$: $\tau_{(n)}=\tau^+_{(n)}-\tau^-_{(n)}$. Miara $var\left(\tau_{(n)}\right)=\tau^+_{(n)}+\tau^-_{(n)}$ jest nazywana *wariacją* miary znakowanej $\tau_{(n)}$. Niech $\varphi_1^*\colon (a,b)\to\mathbb{R}$, $\varphi_2^*\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będą n-wypukłymi miarami z trójkami $(\xi,\tau^+_{(n)},Q_\xi)$ i $(\xi,\tau^-_{(n)},0)$, odpowiednio, w reprezentacji całkowej funkcji n-wypukłej. Wtedy: $f=\varphi_1^*-\varphi_2^*$, φ_1^* i φ_2^* są minimalnymi n-wypukłymi funkcjami oraz $g^*=\varphi_1^*+\varphi_2^*$ jest mnimalną funkcja kontrolną odpowiadającą f.

W Twierdzeniach 2.4, 2.5 i 2.6 w [**R1**] podaję charakteryzacje funkcji kontrolnych i minimalnych funkcji kontrolnych w terminach znakowanych miar spektralnych odpowiadajacych funkcji delta-wypuklej n-tego rzędu. Niech $g\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ bedzie funkcją n-wypukłą z miarą $\mu_{(n)}$ w reprezentacji całkowej, i niech $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją delta-wypukłą n-tego rzędu z miara znakowaną$\tau_{(n)}$ w reprezentacji całkowej. Wtedy

(i) następujące warunki są równoważne ([**R1**], Th. 2.4): (a) f jest kontrolowana przez g, (b) $\mu_{(n)}-\tau_{(n)}\geqslant 0$ i $\mu_{(n)}+\tau_{(n)}\geqslant 0$, (c) $\left|\tau_{(n)}\right|\leqslant\mu_{(n)}$, (d) $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\leqslant g^{(n+1)}(x)$ $(x\in(a,b))$ gdy f i g sa obie klasy C^{n+1} w (a,b),

(ii) następujące warunki są równoważne([**R1**], Th. 2.5)): (e) g jest minimalną funkcją kontrolną dla f, (f) $var\left(\tau_{(n)}\right)=\mu_{(n)}$, (g) $\left|f^{(n+1)}(x)\right|=g^{(n+1)}(x)$ $(x\in(a,b))$ gdy f i g są obie klasy C^{n+1} in (a,b), (h) $g=g^*$ z dokładnością do wielomianu stopnia co najwyżej n, gdzie g^* jest minimalną funkcją kontrolną, którą wprowadziliśmy wyżej ([**R1**], Th. 2.3).

(iii) jeżeli g jest minimalną funkcją kontrolną to ([**R1**], Th. 2.6) $\left|f^{(n+1)}(x)\right|=g^{(n+1)}(x)$ dla $x\in(a,b)\quad\lambda\ a.e.$

Względna delta-wypukłość n-tego rzędu. Przypomnijmy definicję względnej delta-wypukłości wyższych rzędów ([**R1**], **Def. 3.4**). Niech $f,h\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będą funkcjami delta-wypukłymi n-tego rzędu z minimalnymi funkcjami kontrolnymi g_f^* i g_h^*, odpowiednio. Mówimy, że $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ jest *delta-wypukła n-tego rzędu względem h* (krótko n-delta-wypukła względem h), gdy

$$\Delta^{n+1}_{\frac{y-x}{n+1}}g_f^*(x)\geqslant\Delta^{n+1}_{\frac{y-x}{n+1}}g_h^*(x)$$

dla wszystkich $x,y\in(a,b)$ takich że $x<y$, i oznaczamy to przez $f\succeq_{dcn}h$. W pracy [**R1**] podajemy charakteryzację relacji względnej n-delta-wypukłości ([**R1**], **Th. 3.1**), która jest dalej stosowana w dowodzeniu własności silnej delta-wypukłości n-tego rzędu.

Silna delta-wypukłość n-tego rzędu. W pracy [**R1**] wprowadzamy pojęcie silnej delta-wypukłości wyższych rzędów. Niech $c>0$ i niech $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będzie delta-wypukłą funkcją n-tego rzędu. Mówimy, że f jest *silnie delta-wypukłą funkcją n-tego rzędu z modułem c* jeśli wszystkie funkcje kontrolne odpowiadające funkcji f są silnie n-wypukłe z modułem c ([**R1**], **Def. 3.8**). W [**R1**] podajemy charakteryzację silnej delta-wypukłości n-tego rzędu, która jest uogólnieniem chrakteryzacji silnej n-wypukłości. Niech $c>0$ i niech $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją delta-wypukłą n-tego rzędu. Wtedy f jest funkcją silnie delta-wypukłą n-tego rzędu z modułem

c wtedy i tylko wtedy gdy $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \geqslant c$, for $x \in (a,b)$ λ a.e. ([**R1**], **Th. 3.6**). Ponadto, jeśli f jest klasy C^{n+1} na (a,b), to f jest silnie delta-wypukła n-tego rzędu z modułem c wtedy i tylko wtedy gdy $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \geqslant c$ dla wszystkich $x \in (a,b)$ ([**R1**], **Cor. 3.3**).

Nierówności typu Hermita-Hadamarda-Fejéra dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów. Nierówności pomiędzy operatorami kwadraturowymi. Dajemy probabilistyczną chrakteryzację, delta-wypukłości, która jest uogólnieniem probabilistycznej charakteryzacji wypukłości. Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją i niech $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypykłą. Wtedy f jest g-wypukle zdominowana (albo delta-wypukła z funkcją kontrolną g) wtedy i tylko wtedy gdy

$$|\mathbb{E}f(X) - f(\mathbb{E}X)| \leqslant \mathbb{E}g(X) - g(\mathbb{E}X)$$

dla wszystkich zmiennych losowych X o wartościach w (a,b) ([**R1**], **Th. 4.1**). Z powyższej nierówności otrzymujemy nierówności typu Jensena dla funkcji delta-wypukłych ([**R1**], **Rem. 4.1, Cor. 4.2**). Podajemy uogólnienie nierówności typu Hermita-Hadamarda dla funkcji g-wypukle zdominowanychdanych w pracy Dragomir i inn. (2002) [**43**]. Następujące twierdzenie ([**R1**], **Th. 4.3**) dostarcza użyteczne narzędzia do otrzymywania i dowodu nierówności typu Hermita-Hadamarda-Fejéra dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów. Niech $n \geqslant 1$. Niech $g\colon I \to \mathbb{R}$ będzie n-wypukłą funkcją i niech $f\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją, która jest g-wypukle zdomonowana n-tego rzędu (albo delta-wypukła n-tego rzędu z funkcją kontrolną g). Niech X i Y będą dwiema zmiennymi losowymi o wartościach w I takimi, że $\mathbb{E}(X^j - Y^j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $S^-(F_X - F_Y) = n$ i ostatnia zmiana znaku funkcji $F_X - F_Y$ jest dodatnia. Wtedy $|\mathbb{E}f(Y) - \mathbb{E}f(X)| \leqslant \mathbb{E}g(Y) - \mathbb{E}g(X)$. Biorąc szczególne przypadki zmiennych losowych X, Y, z powyższego twierdzenia otrzymujemy ([**R1**], **Th. 4.4, Th. 4.5**) nierówności typu Hermita-Hadamarda-Fejéra dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów, które uogólniają wyniki of Dragomir i inn. (2002) [**43**]. Jako zastosowanie powyższych wyników dowodzimy pewne nierówności pomiędzy operatorami kwadraturowymi dla fynkcji delta-wypukłych wyższych rzędów([**R1**], **Th. 5.1, Th. 5.2**).

7. Pewne relacje względnej wypukłości

Wiele wyników o relacjach względnej wypukłości można znaleźć, między innymi, w pracach [**32, 45, 143, 144, 158, 93, 10, 166, 154, 155, 158, 92, 93, 172**]. W pracy [**R3**], badam dwa typy relacji względnej wypukłości funkcji f i g. Mówimy, że f jest wypukła względem g w sensie Palmera (2002,2003) [**154, 155**], jeśli f jest postaci $f = h(g)$, gdzie h jest funkcją ściśle rosnącą i wypukłą, i oznaczamy to przez $f \succ_{(1)} g$. Podobnie, gdy f jest wypukła względem g w sensie badanym w pracy Rajba (2011)[**R6**], tzn. gdy funkcja $f - g$ jest wypukła, to oznaczamy to przez $f \succ_{(2)} g$. Realacja względnej wypukłości $\succ_{(2)}$ funkcji f względem funkcji $g(x) = cx^2$ oznacza zwykłą silna wypukłość funkcji f. Analizuję związki pomiędzy tymi dwoma rodzajami względnej wypukłości. Charakteryzuję je w terminach pochodnych jednostronnych funkcji f i g, jak również pochodnych dystrybucyjnych, bez żadnych dodatkowych założeń o dwukrotnej różniczkowalności funkcji. Otrzymuję również probabilistyczne charakteryzacje. Podaję uogólnienia silnej wypukłości funkcji i otrzymuję pewne nierówności typu Jensena.

Kryteria różniczkowe. Następujące twierdzenia([**R3**], **Th. 2.7**) daje równoważne kryterium, które jest użytecznedo dowodzenia własności względnej wypukłości $\succ_{(1)}$ bez odwoływania się do funkcji h. Niech $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami. Wtedy $f \succ_{(1)} g$ gdy istnieje funkcja $\lambda\colon I \to [0, \infty)$ taka, że

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \lambda(x) \neq 0 \text{ dla każdego } x \in I \text{ takiego że } g(x) \in \mathit{int}(g(I)), \\ &\text{b)} \quad f(y) - f(x) \geqslant \lambda(x)(g(y) - g(x)) \text{ dla wszystkich } x, y \in I. \end{aligned} \tag{30}$$

Ponadto, $\lambda(x) \in \partial h(g(x))$, dla każdego $x \in I$, gdzie h rosnącą wypukłą funkcją, taką że $f = h(g)$. Zauważmy, że jako funkcja $\lambda(x)$ może być wzięta $\lambda(x) = \frac{f'_R(x)}{g'_R(x)}$, dla każdego $x \in I$ dla którego $g'_R(x) \neq 0$ (lub $\lambda(x) = \frac{f'_L(x)}{g'_L(x)}$, gdy $g'_L(x) \neq 0$). Jeżeli f i g są dukrotnie różniczkowalne na (a,b), to ([**R3**], **Prop. 2.9**)

$$f \succ_{(1)} g \textit{ wtedy i tylko wtedy gdy } \frac{f''(x)}{|f'(x)|} \geqslant \frac{g''(x)}{|g'(x)|}.$$

W następnym twierdzeniu ([**R3**], **Th. 2.10**) podajemy kryterium dla $f \succ_{(1)} g$ w terminach pochodnych dystrybucyjnych drugiego rzędu, bez żadnych dodatkowych warunków o dwukrotnej różniczkowalności f i g. Niech $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami wypukłymi. Wtedy $f \succ_{(1)} g$ wtedy i tylko wtedy gdy następujące warunki są spełnione:

(i) istnieje funkcja $h\colon g(I) \to \mathbb{R}$ taka,że $f = h(g)$,

(ii) $\frac{f'_R(x)}{g'_R(x)} > 0$, dla każdego $x \in I$ takiego, że $g'_R(x) \neq 0$,

(iii) $f''(x) \geqslant \frac{f'_R(x)}{g'_R(x)} g''(x)$, gdy $g'_R(x) \neq 0$, gdzie $f''(x), g''(x)$ oznaczają tutaj pochodne dystrybucyjne drugiego rzędu .

Podajemy kontrprzykłady (([**R3**], **Ex. 2.11**)), , które pokazują, że wymienione wyżej warunki (i), (ii) and (iii) są konieczne.

Dowodzimy użyteczne własności funkcji f i g dla których istnieje funkcja h taka, że $f = h(g)$ ([**R3**], **Ex. 2.12, Cor. 2.13, Ex. 2.14, Lem. 2.15, Lem. 2.16, Lem. 2.17**). Podajemy charakteryzację względnej wypukłości $\succ_{(2)}$. Niech $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami wypukłymi. Następujące warunki są równoważne:

(i) $f \succ_{(2)} g$,

(ii) $f'' \geqslant g''$, gdzie f'', g'' oznaczają tu pochodne dystrybucyjne,

(iii) Istnieje funkcja $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$ taka, że $f(y) - f(x) \geqslant \lambda(x)(y-x)$, $\forall x, y \in I$, i $\lambda(x) \in \partial(f-g)(x)$, $\forall x \in I$,

(iv) $f(y) - f(x) \geqslant (f'_R(x) - g'_R(x))(y-x)$, $\forall x, y \in I$,

(v) $f(y) - f(x) \geqslant (f'(y) - f'(x))(y-x)$, $\forall x, y \in I$, gdy f i g są różniczkowalne,

(vi) $f''(x) \geqslant g''(x)$, $\forall x \in I$, gdy f i g są dwukrotnie różniczkowalne.

Badamy związki pomiędzy relacjami $\succ_{(1)}$ i $\succ_{(2)}$ ([**R3**], **Ex. 2.20, Th. 2.21, Rem. 2.22, Ex. 2.23, Th. 2.24, Ex. 2.25, Ex. 2.26**).

Probabilistyczne charakteryzacje. Podajemy probabilistyczną charakteryzację relacji $\succ_{(2)}$ ([**R3**], **Prop. 3.2**). Niech $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami wypukłymi. Wtedy $f \succ_{(2)} g$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$Ef(X) - f(EX) \geqslant Eg(X) - g(EX), \tag{31}$$

dla wszystkich zmiennych losowych X o wartościach w I. Równość (31) oznacza, że Jensen gap funkcji f jest niemniejszy niż Jensen gap funkcji g. Podajemy probabilistyczną charakteryzację relacji $\succ_{(1)}$ ([**R3**], **Th. 3.3**). Niech $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami wypukłymi takimi, że $f \succ_{(1)} g$. Wtedy istnieje funkcja $\lambda\colon I \to [0, \infty)$ taka, że

$$Ef(X) - f(EX) \geqslant \lambda(EX)(Eg(X) - g(EX)), \tag{32}$$

dla wszystkich zmiennych losowych X o wartościach w I. Podajemy kontrprzykłady, które pokazują że warunek (32) nie jest wystarczający. Podajemy również następującą charakteryzację relacji $\succ_{(1)}$ ([**R3**], **Th. 3.5**). Niech $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami wypukłymi takimi, że $f \succ_{(1)} g$. Wtedy

$$[Ef(X) - f(EX)] \geqslant \frac{f'_R(EX)}{g'_R(EX)} [Eg(X) - g(EX)], \tag{33}$$

dla wszystkich zmiennych losowych X o wartościach w I, takich że $g'_R(EX) \neq 0$. Można zauważyć, że warunek (33) może być przepisany w postaci

$$\frac{1}{|f'_R(EX)|}[Ef(X) - f(EX)] \geqslant \frac{1}{|g'_R(EX)|}[Eg(X) - g(EX)], \tag{34}$$

c, takich że $g'_R(EX) \neq 0$ and $f'_R(EX) \neq 0$. Podajemy nierówności typu Jensena dla relacji względnej wypukłości $\succ_{(1)}$ and $\succ_{(2)}$ ([**R3**], **Cor. 3.7, Cor. 3.8, Cor. 3.9**).

Pewne silne wypukłości. W pracy [**R3**] definiuję silną wypukłość względem relacji $\succ_{(i)}$ ($i = 1, 2$). Mówimy, że funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest silnie wypukła (z modułem $c > 0$) względem relacji $\succ_{(i)}$ ($i = 1, 2$) (lub krócej f jest silnie wypukła względem $\succ_{(i)}$) jeśli $f \succ_{(i)} cx^2$ ([**R3**], **Def. 4.1**). Wtedy silna wypukłość względem $\succ_{(2)}$ jest zwykłą silną wypukłością. Przypomnijmy probabilistyczną charakteryzację silnej wypukłości podaną w pracy [**P21**]. Funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest silnie wypukła (z modułem $c > 0$) wtedy i tylko wtedy gdy

$$Ef(X) - f(EX) \geqslant cD^2(X), \tag{35}$$

dla wszystkich zmiennych losowych X o wartościach w I. Nierówność (35) oznacza, że Jensen gap funkcji f jest niemniejszy niż wariancja zmiennej losowej X pomnożona przez c. W następującym twierdzeniu ([**R3**], **Th. 4.5**) podajemy probabilistyczną charakteryzację silnej wypukłości względem relacji $\succ_{(1)}$. Niech $f\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą i niech $c > 0$. Jeżeli f jest silnie wypukła względem $\succ_{(1)}$ (z modułem c), to

$$Ef(X) - f(EX) \geqslant f'_R(EX)\frac{D^2(X)}{2EX}, \tag{36}$$

dla wszystkich zmiennych losowych X o wartościach w I, takich że $EX \neq 0$. Zauważmy, że $D^2(X)/EX$ jest stosunkiem wariancja do wartości oczekiwanej zmiennej losowej X (VMR(X)). Nierówność (36) oznacza, że Jensen gap funkcji f jest nie mniejszy, niż połowa stosunku wariancja do wartości oczekiwanej zmiennej losowej X pomnożonego przez $f'_R(EX)$. Zauważmy, że prawa strona (36) jest niezależna od modułu c. Biorąc szczególne przypadki rozkładów zmiennej losowej X, z nierówności (36) otrzymujemy nierówności typu Jensena dla silnej wypukłości względem relacji $\succ_{(1)}$ ([**R3**], **Cor. 4.6, Cor. 4.7**).

ROZDZIAŁ 2

Funkcje n-Jensen-wypukłe oraz n-Wright-wypukłe

1. n-Wright-wypukłość implikuje n-Jensen-wypukłość

Przypomnijmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest n–Wright–wypukła, gdy

$$\Delta_{h_1 \dots h_{n+1}} f(x) \geqslant 0 \tag{37}$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i $h_1, \dots, h_{n+1} > 0$. Oczywiście, biorąc wyżej $h_1 = \cdots = h_{n+1} = h$, otrzymujemy $\Delta_h^{n+1} f(x) \geqslant 0$, co oznacza, że każda n–Wright wypukła funkcja jest n–Jensen wypukła.

2. Jensen-wypukłość implikuje Wright-wypukłość

Powstaje naturalne pytanie, czy odwrotna implikacja jest prawdziwa, tzn., czy n–Jensen–wypukłe funkcje są również n–Wright–wypukłe. Dla $n = 1$ nie jest trudno dać negatywną odpowiedź. Mianowicie, funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = |a(x)|$, gdzie $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nieciągłą addytywną funkcją jest Jensen–wypukła i nie jest Wright–wypukła (patrz [**147**]). Rzeczywiście, ze znanego twierdzenia Ng'ego o reprezentacji (patrz. [**141**]) wiemy, że jeżeli funkcja jest Wright–wypukła, to jest ona sumą funkcji addytywnej i wypukłej. Gdyby f była Wright-wypukła, to wtedy albo f musiałaby być ciągła albo jej wykres byłby gęsty na całej płaszczyźnie (patrz np. [**96**]). Ale ani f nie jest ciągła, ani wykres f nie jest gęsty na całej płaszczyźnie. Stąd f nie jest Wright-wypukła.

Funkcje Wright–wypukłe wyższych rzędów badane są w wielu pracach [**53, 54, 118**], ale w żadnej z nich (przed naszą pracą) nie był rozważany przedstawiony wyżej problem. W pracy [**R5**] podajemy negatywną odpowiedź dla n naturalnych nieparzystych.

3. n-Jensen-wypukłość

Przypomnijmy, że dla $x \in \mathbb{R}$ mamy $x_+ = \max\{x, 0\} = \frac{x+|x|}{2}$ i $x_+^n = (x_+)^n$. Nietrudno pokazać następujący lemat.

Lemat 1. *Niech $n \in \mathbb{N}$, $c \geqslant 0$. Funkcja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ given by $\varphi(x) = cx_+^n$ jest n–Jensen–wypukła.*

W pracy [**R5**] dowodzimy ogólniejsze twierdzenie, dla funkcji addytywnych.

Twierdzenie 2. ([**R5**], **Cor. 2.2**) *Jeżeli $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcja addytywna i n jest naturalną liczbą nieparzystą, to $f(x) = a(x)_+^n$ jest n–Jensen–wypukła.*

4. Funkcja, która jest n-Jensen-wypukła i nie jest n-Wright-wypukła

W pracy [**R5**] wykorzystujemy funkcje addytywne skonstruowane w oparciu o bazę Hamela. Wiadomo, że funkcja addytywna $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest jednoznacznie wyznaczona przez jej wartości na bazie Hamela (patrz np [**96**]). W poniższym twierdzeniu podajemy przykład funkcji, która jest n-Jensen wypukła, ale nie jest n-Wright wypukła. Jest to jeden z głównych wyników rozprawy.

Twierdzenie 3. ([**R5**], **Th. 2.3**) *Niech n będzie naturalną liczba naturalną i niech $H \subset \mathbb{R}$ będzie bazą Hamela, taką że $h_1, \dots, h_{n+1} \in H$ są dodatnie. Niech $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie addytywną funkcją, taką że*

$$a(h_1) = -1, \quad a(h_2) = \cdots = a(h_{n+1}) = 1.$$

Wtedy funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \big(a(x)\big)_+^n \tag{38}$$

jest n–Jensen–wypukła i nie jest n–Wright–wypukła.

f **jest** n–**Jensen wypukła.** Z twierdzenia 2 funkcja f jest n–Jensen wypukła.
f **nie jest** n–**Wright–wypukła.** Żeby udowodnić, że f nie jest n–Wright–wypukła, wystarczy sprawdzić, że $\Delta_{h_1 \dots h_{n+1}} f(0) = -1$ (patrz (10)). Jakkolwiek to zadanie nie jest trywialne. Wymaga to wprowadzenia nowych narzędzi i jest raczej długie.

5. Dwa przypadki szczególne

Przypadek $n = 3$. Jak już o tym wspomnieliśmy, dowód Twierdzenia 3 jest trudny. Żeby zilustrować zagadnienie, najpierw przedstawimy prostszy dowód w szczególnym przypadku $n = 3$.

Weźmy bazę Hamela H taką, że $h_1, h_2, h_3, h_4 \in H$ są dodatnie. Niech $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie addytywną funkcją, taką że $a(h_1) = -1$, $a(h_2) = a(h_3) = a(h_4) = 1$. Niech $f(x) = \big(a(x)\big)_+^3$. Na podstawie Twierdzenia 2, funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest 3–Jensen–wypukła. Chcemy pokazać, że f nie jest 3–Wright–wypukła. Żeby to udowodnić, wystarczy sprawdzić, że $\Delta_{h_1 h_2 h_3 h_4} f(0) = -1 < 0$, wtedy nierówność (37) nie zachodziłaby dla $n = 3$. Mamy

$$f(0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4) = \big(a(0) + a(h_1) + a(h_2) + a(h_3) + a(h_4)\big)_+^3 = 8\,.$$

Podobnie

$$\begin{aligned} f(0 + h_1 + h_2 + h_3) = f(0 + h_1 + h_2 + h_4) = f(0 + h_1 + h_3 + h_4) &= 1\,,\\ f(0 + h_2 + h_3 + h_4) &= 27\,,\\[1ex] f(0 + h_1 + h_2) = f(0 + h_1 + h_3) = f(0 + h_1 + h_4) &= 0\,,\\ f(0 + h_2 + h_3) = f(0 + h_2 + h_4) = f(0 + h_3 + h_4) &= 8\,,\\[1ex] f(0 + h_1) &= 0\,,\\ f(0 + h_2) = f(0 + h_3) = f(0 + h_4) &= 1\,,\\[2ex] f(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

Wtedy otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Delta^4_{h_1 h_2 h_3 h_4} f(x) &= f(0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4)\\ &\quad - \big[f(0 + h_1 + h_2 + h_3) + f(0 + h_1 + h_2 + h_4)\\ &\qquad + f(0 + h_1 + h_3 + h_4) + f(0 + h_2 + h_3 + h_4)\big]\\ &\quad + \big[f(0 + h_1 + h_2) + f(0 + h_1 + h_3) + f(0 + h_1 + h_4)\\ &\qquad + f(0 + h_2 + h_3) + f(0 + h_2 + h_4) + f(0 + h_3 + h_4)\big]\\ &\quad - \big[f(0 + h_1) + f(0 + h_2) + f(0 + h_3) + f(0 + h_4)\big]\\ &\quad + f(0) = 8 - 30 + 24 - 3 + 0 = -1\,. \end{aligned}$$

Podobny dowód powtórzyliśmy dla $n \in \{5, 7, 9, 11\}$, chociaż obliczenia były przeprowadzone przy pomocy komputera.

Przypadek $n = 2$. Przeprowadzimy teraz dyskusję przypadku $n = 2$, żeby przekonać się, że w przypadku n parzystych nasz problem nie jest łatwy do rozwiązania. Dokładniej chcemy porównać klasę 2–Jensen–wypukłych funkcji z klasą 2–Wright–wypukłych funkcji.

Być może funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = |Q(x)|$, gdzie funkcja $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie funkcyjne kwadratowe

$$Q(x + y) + Q(x - y) = 2Q(x) + 2Q(y), \tag{39}$$

mogłaby być dobrym przykładem funkcji 2–Jensen–wypukłej, która nie jest 2–Wright–wypukła. Niestety, taka funkcja f może nie być 2–Jensen–wypukła. Żeby się o tym przekonać weźmy bazę Hamela H zawierającą wektory 1, $\sqrt{2}$ i $\sqrt[4]{2}$. Następnie rozpatrzmy funkcję addytywną $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną na H równościami $a(1) = -9$, $a(\sqrt{2}) = 4$ oraz $a(h) = 0$ dla $h \in H \setminus \{1, \sqrt{2}\}$. Wtedy funkcja $Q(x) = a(x^2)$ spełnia równanie kwadratowe (39). Ostatecznie, dla $x = 1$, $h = \sqrt[4]{2} - 1 > 0$ mamy $Q(x) = -9$, $Q(x + h) = 4$, $Q(x + 2h) = 7$, $Q(x + 3h) = 0$, zatem

$$\Delta_h^3 f(x) = \Delta_h^3 |Q(x)| = |Q(x + 3h)| - 3|Q(x + 2h)| + 3|Q(x + h)| - |Q(x)| = -18 < 0,$$

co, zgodnie z (9), dowodzi, że f nie może być 2–Jensen–wypukła.

Mając na względzie Twierdzenie 3, można byłoby oczekiwać, że funkcja $f(x) = \big(a(x)\big)_+^2$ (dla odpowiednio wybranej funkcji $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) mogłaby być dobrym przykładem funkcji 2–Jensen–wypukłej, która nie jest 2–Wright–wypukła. Jakkolwiek, takie funkcje nie są 2–Jensen–wypukłe dla dowolnej nieciągłej addytywnej a i dla dowolnej funkcji postaci $a(x) = cx$ z $c < 0$, co pokazujemy niżej. Jeżeli $a(x) = cx$ z pewnym $c \geqslant 0$, to f jest ciągła, f jest 2–Jensen–wypukła. stąd, z ciągłości, otrzymujemy, że f jest również 2–Wright–wypukła (patrz [**96**, Theorem 15.7.1]), zatem nie jest ona dobrym kandydatem dla naszego przykładu.

Stwierdzenie 4. ([**R5**], **Prop. 3.1**) *Jeżeli $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nieciągłą addytywną funkcją, to $f(x) = \big(a(x)\big)_+^2$ nie jest 2–Jensen–wypukła.*

Dowód. Ponieważ a jest nieciągła addytywna, to jej wykres jest gęsty na całej płaszczyźnie (patrz np. [**96**]). Wtedy w otoczeniu punktu $(0, 1)$ istnieje punkt $\big(x, a(x)\big)$, taki że

$$0.9 < a(x) < 1.1\,. \tag{40}$$

Podobnie, w otoczeniu punktu $(1, -2)$ istnieje punkt $\big(h, a(h)\big)$ z $h > 0$ taki że

$$-2.1 < a(h) < -1.9\,.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
-5.4 < a(x + 3h) = a(x) + 3a(h) < -4.6 &\implies \big(a(x + 3h)\big)_+ = 0,\\
-3.3 < a(x + 2h) = a(x) + 2a(h) < -2.7 &\implies \big(a(x + 2h)\big)_+ = 0,\\
-1.2 < a(x + h) = (x) + a(h) < -0.8 &\implies \big(a(x + h)\big)_+ = 0.
\end{aligned}$$

Z (40) otrzymujemy $\big(a(x)\big)_+ = a(x) > 0$, stąd, na podstawie $f(x) = \big(a(x)\big)_+^2$,

$$\Delta_h^3 f(x) = f(x + 3h) - 3f(x + 2h) + 3f(x + h) - f(x) = -\big(a(x)\big)^2 < 0,$$

czyli nierówność (9) nie zachodzi dla $n = 2$ i dla pewnych $x \in \mathbb{R}$ i $h > 0$. □

Stwierdzenie 5. ([**R5**], **Prop. 3.2**) *Jeżeli $a(x) = cx$ dla pewnego $c \geqslant 0$, to $f(x) = \big(a(x)\big)_+^2$ jest 2–Jensen–convex.*

Stwierdzenie 6. ([**R5**], **Prop. 3.3**) *Jeżeli $a(x) = cx$ dla pewnego $c < 0$, to $f(x) = \big(a(x)\big)_+^2$ nie jest 2–Jensen–wypukła.*

6. Dowód Twierdzenia 3

W pracy [**R5**] podaję nowe narzędzia z teorii miary i stosuję je do dowodu, że funkcja f zdefiniowana w Twierdzeniu 3 nie jest n–Wright–wypukła. Zgodnie z naszą najlepszą wiedzą, przy badaniu tego typu funkcji, takie podejście nie było dotychczas stosowane.

Operatory $\mathcal{J}_h$, $\mathcal{J}_{h_1 h_2 \dots h_n}$. Niech $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ będzie zbiorem wszystkich miar borelowskich ν na $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, takich że $\nu\big((-\infty, x)\big) < \infty$, $x \in \mathbb{R}$. Niech $\nu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$. Definiuję

$$\mathcal{J}_h \nu(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_h^n \nu(B)\,, \quad h > 0\,,\ B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\,,$$

gdzie $\tau_h^0 \nu(B) = \nu(B)$, $\tau_h^{n+1}(B) = \tau_h\big(\tau_h^n \nu\big)(B)$.

Stwierdzenie 7. ([**R5**], **Prop. 4.2**) *Niech $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ i $h > 0$.*

1. *Jeżeli*

$$\nabla_h\, \mu \geqslant 0\,, \tag{41}$$

to istnieje $\nu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ taka, że μ ma postać

$$\mu = \mathcal{J}_h \nu\,. \tag{42}$$

Ponadto, miara ν jest jedyna i jest ona postaci

$$\nu = \nabla_h\, \mu\,. \tag{43}$$

2. *Jeżeli μ jest postaci (42) z $\nu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$, wtedy warunki (41) i (43) zachodzą.*

Dla $\nu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ i $h_1, \dots, h_n > 0$ oznaczamy $\mathcal{J}_{h_1 h_2 \dots h_n}\nu = \mathcal{J}_{h_1}\mathcal{J}_{h_2}\dots\mathcal{J}_{h_n}\nu$. Jako konsekwencję Stwierdzenia 7 otrzymujemy

STWIERDZENIE 8. ([**R5**], **Prop. 4.3**) *Niech $h_1, \dots, h_n > 0$.*
(a) *Jeżeli $\nu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ spełnia warunek $\mathcal{J}_{h_1 \dots h_n}\nu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$, to $\nabla_{h_1 \dots h_n}\big(\mathcal{J}_{h_1 \dots h_n}\nu\big) = \nu$.*
(b) *Jeżeli $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ spełnia warunek $\nabla_{h_1 \dots h_n}\mu \geqslant 0$, to $\mathcal{J}_{h_1 \dots h_n}\big(\nabla_{h_1 \dots h_n}\mu\big) = \mu$.*

Przygotowania do szkicu dowodu Twierdzenia 3. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i rozważmy bazę Hamela $H \subset \mathbb{R}$ taka, że $h_1, \dots, h_{n+1} \in H$ są dodatnie. Zachowujemy te konwencję do końca dowodu tego twierdzenia. Definiujemy miary $\mu_1, \dots, \mu_{n+1} \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ wzorem

$$\mu_i = \mathcal{J}_{h_1 \dots h_{n+1}}\delta_{h_i}\,, \quad i = 1, \dots, n+1\,, \tag{44}$$

gdzie δ_x jest miarą probabilistyczną skupioną w punkcie x. Dalej, definiujemy miarę znakowaną μ jako

$$\mu = \mu_2 + \dots + \mu_{n+1} - \mu_1\,. \tag{45}$$

Elementy $h_1, \dots, h_{n+1}$, jako elementy bazy Hamela są niewspółmierne, i nietrudno jest sprawdzić, że zachodzą wzory

$$\mu_i = \sum_{j_1, \dots, j_{n+1}=0}^{\infty} \delta_{h_i + j_1 h_1 + \dots + j_{n+1}h_{n+1}}\,, \quad i = 1, \dots, n+1\,. \tag{46}$$

Następnie rozważamy zbiory $A, A_1, \dots, A_{n+1} \subset \mathbb{R}$ zdefiniowane jako

$$A_i = \Bigg\{ h_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \varepsilon_j h_j \ : \ \varepsilon_j \in \{0,1\},\ j = 1, \dots, n+1 \Bigg\}, \quad i = 1, \dots, n+1\,,$$
$$A = A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}\,.$$

Będziemy używać oznaczenia $\mu(x) = \mu\big(\{x\}\big)$.

TWIERDZENIE 9. ([**R5**], **Th. 4.5**) *Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana jak w Twierdzeniu 3 i μ będzie miarą znakowaną daną przez* (45). *Wtedy*

$$f(x) = (\,\mu + \delta_{h_1})^n(x) \quad \text{dla każdego } x \in A\,. \tag{47}$$

W szczególności,

$$\nabla_{h_1 \dots h_{n+1}} f(h_1 + \dots + h_{n+1}) = \nabla_{h_1 \dots h_{n+1}}(\,\mu + \delta_{h_1})^n(h_1 + \dots + h_{n+1})\,. \tag{48}$$

Twierdzenie 9 pozwala nam pracować z miarami zamiast oryginalnej funkcji f. Niżej podajemy trzy użyteczne wzory.

LEMAT 10. ([**R5**], **Lem. 4.6**) *Niech $\mu = \mu_2 + \dots + \mu_{n+1} - \mu_1$ będzie miarą znakowaną daną wzorem* (45). *Wtedy*

$$(\,\mu + \delta_{h_1})^n(x) = \big(\,\mu(x)\big)^n - (-1)^n\delta_{h_1}(x) \quad \text{dla każdego } x \in A\,, \tag{49}$$

$$\nabla_{h_1 \dots h_{n+1}}\big(\,\mu(h_1 + \dots + h_{n+1})\big)^n = 0\,, \tag{50}$$

$$\nabla_{h_1 \dots h_{n+1}}\delta_{h_1}(h_1 + \dots + h_{n+1}) = (-1)^n\,. \tag{51}$$

Szkic końcowego kroku dowodu Twierdzenia 3.
Przypomnijmy, że rozważaliśmy nieparzyste $n \in \mathbb{N}$ i że mieliśmy wybraną bazę Hamela $H \subset \mathbb{R}$ taką, że $h_1, \dots, h_{n+1} \in H$ były dodatnie. Zdefiniowaliśmy funkcję addytywną $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że $a(h_1) = -1$ i $a(h_2) = \dots = a(h_{n+1}) = 1$ oraz funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako $f(x) = \big(a(x)\big)_+^n$. Pokazaliśmy, że f jest n–Jensen–wypukła. Pozostało do udowodnienia, że f nie jest n–Wright–wypukła. Żeby to pokazać wystarczy sprawdzić, że $\Delta_{h_1 \dots h_{n+1}} f(0) = -1$. Z (8) jest to równoważne równości $\nabla_{h_1 \dots h_{n+1}} f(h_1 + \dots + h_{n+1}) = -1$. Używając (48) – (51) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\nabla_{h_1 \dots h_{n+1}} f(h_1 + \dots + h_{n+1}) &= \nabla_{h_1 \dots h_{n+1}}(\,\mu + \delta_{h_1})^n(h_1 + \dots + h_{n+1}) \\
&= \nabla_{h_1 \dots h_{n+1}}\Big(\big(\,\mu(h_1 + \dots + h_{n+1})\big)^n - (-1)^n\delta_{h_1}(h_1 + \dots + h_{n+1})\Big) \\
&= \nabla_{h_1 \dots h_{n+1}}\big(\,\mu(h_1 + \dots + h_{n+1})\big)^n + \nabla_{h_1 \dots h_{n+1}}\delta_{h_1}(h_1 + \dots + h_{n+1}) = -1,
\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

ROZDZIAŁ 3

Funkcje n-wypukłe

W tym rozdziale, w Części 1 podaję całkową reprezentację n-wypukłej funkcji f bez żadnych dodatkowych założeń o f. Jest ona następnie stosowana do dalszego badania n-wypukłości, do charakteryzacji silnej n-wypukłości, n-Wright-wypukłości, i względnej n-wypukłości funkcji, między innymi. Również wykorzystuję tę reprezentację do badania własności typu podparciowego funkcji n-wypukłych.

W Części 2, dowodzę, że n-wypukła funkcja może być przedstawiona w postaci sumy dwóch $(n+1)$-krotnie monotonicznych funkcji i wielomianu stopnia co najwyżej n. Ten wynik jest odpowiednikiem charakteryzacji funkcji wypukłej podanej przez Robertsa i Varberga w [**172**]). Używając tego rozkładu otrzymuję nowy rozkład funkcji n-Wright-wypukłej, co uogólnia wyniki Maksy i Pálesa [**118**].

W Części 3, definiuję i badam względną n-wypukłość funkcji n-wypukłych. Względna n-wypukłość indukuje częściowy porządek w zbiorze funkcji n-wypukłych. Definiuję miarę n-wypukłości funkcji n-wypukłej f używając n-spektralnych miar występujących w jej reprezentacji całkowej. Podaję charakteryzację względnej n-wypukłości w terminach miar n-wypukłości, używając pochodnych dystrybucyjnych n-tego rzędu jak rownież w terminologii pochodnych Radona-Nikodyma. Używając rozkładu Lebesgue'a miar n-spektralnych odpowiadających funkcji n-wypukłej f, rozważam odpowiedni rozkład funkcji f. Rozkład ten jest stosowany do uzyskania użytecznej charakteryzacji względnej n-wypukłości.

W Części 4, definiuję i badam pojęcie silnej n-wypukłości, które uogólnia pojęcie silnej wypukłości. Wiemy, że silna wypukłość może być scharakteryzowana w terminach drugiej pochodnej $f''(x)$ dla funkcji f dwukrotnie różniczkowalnej. Ja podaję charakteryzację silnej n-wypukłości funkcji n-wypukłej f w terminach własności $f^{(n+1)}(x)$ prawie wszędzie względem miary Lebesgue'a ($f^{(n+1)}(x)$ istnieje prawie wszędzie dla n-wypukłej funkcji f), bez dodatkowych założeń o różniczko walności funkcji f.

W Części 5, dowodzę, że dla każdych dwóch n-wypukłych funkcji f and g, takich, że f jest n-wypukła względem g, funkcja g jest podparciem dla f, w sensie zdefiniowanym przez Wąsowicza [**217**], z dokładnością do wielomianu stopnia co najwyżej n. Jest to uogólnienie wyników Wąsowicza [**217**].

1. Reprezentacja całkowa

W [**R6**] podaję następującą reprezentację funkcji n-wypukłej f.

TWIERDZENIE 11. ([**R6**], **Th. 2.9, Th. 2.10**) *Niech $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będzie n-wypukłą funkcją.*

a) *Dla każdego $\xi\in(a,b)$, funkcja f ma reprezentację*

$$f(x)=\int_{(a,\xi]}(-1)^{n+1}\frac{[-(x-u)]_+^n}{n!}\mu_{(n)\xi-}(du)+\int_{[\xi,b)}\frac{(x-u)_+^n}{n!}\mu_{(n)\xi+}(du)+Q_\xi(x), \tag{52}$$

dla wszystkich $x\in(a,b)$, gdzie

$$\begin{aligned}\mu_{(n)\xi-}(du) &= d[f^{(n)}(u)-f^{(n)}(\xi+)]_-,\\ \mu_{(n)\xi+}(du) &= d[f^{(n)}(u)-f^{(n)}(\xi+)]_+,\\ Q_\xi &\in \Pi_n.\end{aligned} \tag{53}$$

Ponadto, miara $\mu_{(n)}$ dana wzorem

$$\mu_{(n)}(du)=\mu^f_{(n)}(du)=\mu_{(n)\xi-}(du)+\mu_{(n)\xi+}(du)=df^{(n)}(u) \tag{54}$$

jest niezależna od wyboru ξ. Będziemy nazywać $\mu_{(n)}$ n-spektralną miarą odpowiadającą f.

b) *Jeżeli* $\lim_{x\to a+} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(a+) = \alpha$ *jest skończona, to* $f(x)$ $(x \in (a,b))$ *może być przedstawiona w postaci*

$$f(x) = \int_a^b \frac{(x-u)_+^n}{n!}\mu_{(n)a+}(du) + Q_a(x), \tag{55}$$

gdzie $\mu_{(n)a+}(du) = d[f^{(n)}(u) - \alpha]_+$, $Q_a(x) \in \Pi_n$.

c) *Jeżeli* $\lim_{x\to b-} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(b-) = \beta$ *jest skończona, to* $f(x)$ $(x \in (a,b))$ *może być przedstawiona w postaci*

$$f(x) = \int_a^b (-1)^{n+1}\frac{[-(x-u)]_+^n}{n!}\mu_{(n)b-}(du) + Q_b(x), \tag{56}$$

gdzie $\mu_{(n)b-}(du) = d[f^{(n)}(u) - \beta]_-$, $Q_b(x) \in \Pi_n$.

Zachodzi również twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 12. ([**R6**], **Th. 2.9, Th. 2.10**)

a) *Jeżeli funkcja* $f(x)$ $(x \in (a,b))$ *dana jest wzorem* (54), *gdzie* $Q_\xi \in \Pi_n$ *i* $\mu_{(n)}((c,d)) < \infty$ *dla wszystkich* $a < c < d < b$, *to* f *jest* n*-wypukła.*
b) *Jeżeli funkcja* $f(x)$ $(x \in (a,b))$ *dana jest wzorem* (55), *gdzie* $Q_a(x) \in \Pi_n$ *i* $\mu_{(n)}((a,d)) < \infty$ *dla wszystkich* $a < d < b$, *to* f *jest* n*-wypukła.*
c) *Jeżeli funkcja* $f(x)$ $(x \in (a,b))$ *dana jest wzorem* (56), *gdzie* $Q_b(x) \in \Pi_n$ *i* $\mu_{(n)}((c,b)) < \infty$ *dla wszystkich* $a < c < b$, *to* f *jest* n*-wypukła.*

2. n-wypukłość i wielokrotna monotoniczność

Z Twierdzenia 11 o reprezentacji funkcji n-wypukłej f, oraz biorąc pod uwagę wzory na reprezentację funkcji $(n+1)$-krotnie monotonicznej nierosnącej i niemalejącej, (16) i (15), odpowiednio, otrzymujemy, że f może być reprezentowana jako suma dwóch funkcji $(n+1)$-krotnie monotonicznej nierosnącej i niemalejącej, oraz wielomianu stopnia co najwyżej n. Ten wynik uogólnia znane twierdzenie o reprezentacji funkcji wypukłej jako sumy pewnych dwóch funkcji nierosnącej i niemalejącej, i wielomianu stopnia co najwyżej 1, podanego przez Robertsa i Varberga w [**172**]). Niech $\mathcal{M}_{(n+1)+}((a,b))$ i $\mathcal{M}_{(n+1)-}((a,b))$ będą klasami funkcji $(n+1)$-krotnie monotonicznych niemalejących oraz nierosnących na (a,b), odpowiednio.

Twierdzenie 13. ([**R6**], **Th. 3.2**) *Niech* $n \geqslant 1$, $a \leqslant \xi \leqslant b$ *i niech* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. *Wtedy* f *jest* n*-wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy* f *jest postaci*

$$f(x) = M_1(x) + M_2(x) + Q(x),$$

gdzie $(-1)^{n+1}M_1(x) \in \mathcal{M}_{(n+1)-}((a,\xi))$, $M_2(x) \in \mathcal{M}_{(n+1)+}((\xi,b))$, $M_1(x)+M_2(x)$ *jest ciągła na* (a,b) *oraz* $Q(x) \in \Pi_n$.

Przy badaniu nierówności (9), funkcje, które spełniają (9) z równością odgrywają dużą rolę przy badaniu nierówności (patrz [**96**]). Dla $n \in \mathbb{N}$, funkcja $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nazywana *funkcją wielomianową stopnia co najwyżej* n, gdy spełnia ona równanie Frécheta , tzn. jeśli

$$(\Delta_h)^{n+1}P(x) = 0 \quad (h, x \in \mathbb{R}).$$

Wielomiany są dokładnie ciągłymi funkcjami wielomianowymi, jakkolwiek w terminach baz Hamela można skonstruować funkcje wielomianowe nieciągłe [**96**]). Maksa and Páles [**118**] udowodnili, że każda funkcja n-Wright-wypukła może być reprezentowana jako suma funkcji n-wypukłej i funkcji wielomianowej.

Stwierdzenie 14. ([**118**]) *Niech* $n \geqslant 1$ *i* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. *Wtedy* f *jest* n*-Wright-wypukłą funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy* f *jest postaci*

$$f(x) = C(x) + P(x) \quad (x \in (a,b)), \tag{57}$$

gdzie $C\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *jest ciągła* n*-wypukła i* $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją wielomianową stopnia co najwyżej* n *z* $P(\mathbb{Q}) = \{0\}$. *Przy dodatkowym założeniu* $P(\mathbb{Q}) = 0$, *rozkład (57) jest jedyny.*

Z Twierdzenia 13 i Stwierdzenia 14 otrzymujemy następujący rozkład funkcji n-Wright-wypukłej.

Twierdzenie 15. (**[R6], Theorem 3.6**) *Niech $n \geqslant 1$, $a < \xi < b$ i $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Wtedy f jest n-Wright-wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = M_1(x) + M_2(x) + Q(x) + P(x),$$

gdzie $(-1)^{n+1}M_1(x)$ jest $(n+1)$-krotnie monotoniczna niemalejąca na (a,ξ), $M_2(x)$ jest $(n+1)$-krotnie monotoniczna nierosnąca na (ξ,b), $M_1(x)+M_2(x)$ jest ciągła na(a,b), $Q(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej n (jak w Twierdzeniu 13) i $P(x)$ jest funkcją wielomianową stopnia co najwyżej n.

3. Względna n-wypukłość

Niech $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie n-wypukłą funkcją. Mówimy, że funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest *n-wypukła względem g*, gdy $f-g$ jest n-wypukła, i oznaczamy to jako $f \succeq_n g$.

Względna n-wypukłość zdefiniowana wyżej jest uogólnieniem względnej wypukłości badanej w pracy Karlina i Studdena [**93**] (dla $n=1$) (patrz również [**32**], [**63**], [**155**], [**158**]).

Gdy f jest n-wypukła względem g, to obie funkcje $f-g$ i g są n-wypukłe. Pisząc $f = g+(f-g)$, otrzymujemy, że f też musi być n-wypukła. Funkcje $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ i $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, które są niemalejące i nierosnące na tych samych przedziałach nazywają się *izotoniczne*, lub mówimy, że są elementami tej samej izotonicznej klasy.

Twierdzenie 16. (**[R6], Th. 4.3**)

$$f \succeq_n g \textit{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mu^f_{(n)} \geqslant \mu^g_{(n)}.$$

Na podstawie Twierdzenia 16, miara $\mu^f_{(n)}$ może być uważana jako *miara n-wypukłości funkcji f* (lub krócej *miara n-wypukłości*). Będziemy mówić, że funkcje $f,g\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ są równe *modulo* Π_n, albo że są elementami tej samej *modulo* Π_n *klasy*, gdy różnią się o wielomian $Q\in\Pi_n$. Relacja modulo Π_n jest relacją równoważności i stąd definiuje klasy równoważności. Dla n-wypukłej f i $g\colon (a,b)\to\mathbb{R}$, które są elementami tej samej modulo Π_n klasy otrzymujemy, że $f^{(n)}(x)$ i $g^{(n)}(x)$ różnią się na (a,b) o stałą. Stąd, na podstawie Twierdzenia 11, otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 17. (**[R6], Th. 4.4**)

$$f = g \ (mod\,\Pi_n) \quad \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \mu^f_{(n)} = \mu^g_{(n)}.$$

Relacja względnej n-wypukłości indukuje częściowy porządek.

Twierdzenie 18. (**[R6], Th. 4.5**) *Relacja względnej n-wypukłości indukuje częściowy porządek na modulo Π_n klasach równoważności funkcji n-wypukłych.*

Jako prosty przykład zastosowania Twierdzenia 11 można udowodnić następujące twierdzenie. Oznaczamy przez $d\mu/d\nu = \varphi$ pochodną Radona-Nikodyma miary μ względem miary ν (patrz [**175**]).

Twierdzenie 19. (**[R6], Th. 4.6**) *Niech $f,g\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będą n-wypukłe. Wtedy*

a) *istnieje funkcja n-wypukła f_{max}, taka że*

$$f_{max} \succeq_n f, \quad f_{max} \succeq_n g,$$

i dla każdej n-wypukłej funkcji h

$$(h \succeq_n f \ i \ h \succeq_n g) \Rightarrow h \succeq_n f_{max},$$

b) *istnieje funkcja n-wypukła f_{min}, taka że*

$$f \succeq_n f_{min}, \quad g \succeq_n f_{min},$$

i dla każdej n-wypukłej funkcji h

$$(f \succeq_n h \ and \ g \succeq_n h) \Rightarrow f_{min} \succeq_n h,$$

c) *gdy $f \succeq_n g$ i $f \neq g (mod\ \Pi_n)$, to istnieje funkcja n-wypukła w, taka że $f \neq w\ (mod\ \Pi_n)$, $g \neq w\ (mod\,\Pi_n)$ i*

$$f \succeq_n w \succeq_n g.$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o rozkładzie miary i o rozkładzie miary singularnej, każda σ-skończona miara μ może być przedstawiona w postaci sumy miary absolutnie ciągłej (względem miary Lebesgue'a), singularnej ciągłej oraz dyskretnej, tzn.

$$\mu = \mu_{cont} + \mu_{sing} + \mu_{pp},$$

gdzie μ_{cont} jest absolutnie ciągła, μ_{sing} jest singularna ciągła i μ_{pp} czysto punktowa (miara dyskretna, patrz Royden [**175**]). Miary te są wyznaczone jednoznacznie.

Rozkład miary n-spektralnej $\mu^f_{(n)}$ w postaci sumy miary absolutnie ciągłej, singularnej ciągłej oraz dyskretnej, implikuje analogiczne rozkład n-wypukłej funkcji f.

TWIERDZENIE 20. ([**R6**], **Th. 4.8**) *Każda n-wypukła funkcja f z miarą n-spektralną $\mu^f_{(n)}$ może być przedstawiona w postaci sumy*

$$f = f_{cont} + f_{sing} + f_{pp}, \tag{58}$$

gdzie f_{cont}, f_{sing} and f_{pp} odpowiadają absolutnie ciągłej, singularnej ciągłej oraz dyskretnej części rozkładu miary n-spectral measure $\mu^f_{(n)}$, odpowiednio ($\mu^f_{(n)} = \mu_{(n)cont} + \mu_{(n)sing} + \mu_{(n)pp}$). Funkcje f_{cont}, f_{sing} i f_{pp} są n-wypukłe. Poza tym, są one jednoznacznie wyznaczone, z dokładnością do wielomianów stopnia co najwyżej n.

Nietrudno jest udowodnić następujący lemat.

LEMAT 21. *Niech μ i ν będą dwiema σ-skończonymi miarami o następujących rozkładach na części absolutnie ciągłe, singularne ciągłe oraz dyskretne*

$$\mu = \mu_{cont} + \mu_{sing} + \mu_{pp} \quad i \quad \nu = \nu_{cont} + \nu_{sing} + \nu_{pp}.$$

Wtedy $\mu \geqslant \nu$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_{cont} \geqslant \nu_{cont}$, $\mu_{sing} \geqslant \nu_{sing}$ i $\mu_{pp} \geqslant \nu_{pp}$.

Biorąc pod uwagę rozkład (58) funkcji n-wypukłej, z Lematu 21, otrzymujemy natychmiast trzy twierdzenia użyteczne przy badaniu względnej n-wypukłości funkcji.

TWIERDZENIE 22. ([**R6**], **Th. 4.10**) *Niech f i $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będą n-wypukłymi funkcjami, mającymi rozkłady $f = f_{cont} + f_{sing} + f_{pp}$, $g = g_{cont} + g_{sing} + g_{pp}$ (patrz (58)), odpowiednio. Wtedy $f \succeq_n g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_{cont} \succeq_n g_{cont}$, $f_{sing} \succeq_n g_{sing}$ i $f_{pp} \succeq_n g_{pp}$.*

TWIERDZENIE 23. ([**R6**], **Th. 4.11**)

$$f_{cont} \succeq_n g_{cont} \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f^{(n+1)}_{cont}(x) \geqslant g^{(n+1)}_{cont}(x).$$

TWIERDZENIE 24. ([**R6**], **Th. 4.12**)

$$f_{pp} \succeq_n g_{pp} \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f^{(n+1)}_{pp} \geqslant g^{(n+1)}_{pp},$$

gdzie $f^{(n+1)}_{pp} = \sum_k a_k \delta_{x_k}$, $g^{(n+1)}_{pp} = \sum_k b_k \delta_{y_k}$.

4. Silna n-wypukłość.

Jednym z ważniejszych uogólnień wypukłości jest pojęcie silnej wypukłości. Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest nazywana *silnie wypukłą z modułem* $c > 0$, gdy

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2,$$

dla wszystkich $x, y \in (a,b)$ i $t \in [0,1]$. Silnie wypukłe funkcje były wprowadzone przez Polyaka w [**164**]. Pewne ich własności można znaleźć, między innymi, w [**172**], [**67**], [**163**]. Przypomnę teraz kilka ich własności, które będą istotne w dalszych rozważaniach (patrz [**172**]). Pierwsza, charakteryzuje silną wypukłość w terminach wypukłości, natomiast druga charakteryzuje funkcje silnie wypukłe dwukrotnie różniczkowalne w terminach drugiej pochodnej $f''(x)$.

STWIERDZENIE 25. *Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest silnie wypukła z modułem $c > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f(x) - cx^2$ jest wypukła.*

STWIERDZENIE 26. *Załóżmy, że $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i że $c > 0$. Wtedy f jest silnie wypukła z modułem c wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) \geqslant 2c$ ($x \in (a,b)$).*

Jako uogólnienie silnej wypukłości, definiuję silną n-wypukłość. Mówimy, że funkcja f jest *silnie n-wypukła zmodułem c* ($n \geqslant 1$, $c > 0$), gdy f jest n-wypukła względem funkcji $g(x) = \frac{cx^{n+1}}{(n+1)!}$.

Na podstawie Stwierdzenia 25, silna wypukłość z modułem $2c$ (por. Roberts i Varberg [**172**]) pokrywa się z naszą silną 1-wypukłością z modułem c. Pisząc $f(x) = \left(f(x) - \frac{cx^{n+1}}{(n+1)!}\right) + \frac{cx^{n+1}}{(n+1)!}$, otrzymujemy, że gdy f jest silnie n-wypukła z modułem $c > 0$, to f jest n-wypukła. Można zauważyć, że funkcja $g(x) = \frac{cx^{n+1}}{(n+1)!}$ jest n-wypukła z miarą n-wypukłości $\mu^g_{(n)}(dx) = dg^{(n)}(x) = cdx$ and $g^{(n)}(x) = cx$. Pisząc $g(x)$ w postaci (58), mamy $g = g_{cont}$. Stosując Twierdzenia 22 – 24 o względnej n-wypukłości funkcji, otrzymujemy następujące charakteryzacje silnie n-wypukłej funkcji f z modułem c, bez żadnych dodatkowych założeń dotyczących f. W szczególnym przypadku $n = 1$, charakteryzacje te podają własności funkcji silnie wypukłych i uogólniają własności funkcji silnie wypukłych zawarte w Stwierdzeniu 26.

TWIERDZENIE 27. ([**R6**], **Th. 4.15**) *Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją n-wypukłą i $c > 0$. Wtedy f jest silnie n-wypukła z modułem c wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f^{(n+1)}(x) \geqslant c \ dla\ x \in (a,b) \quad \lambda\ p.w.$$

TWIERDZENIE 28. ([**R6**], **Cor. 4.16**) *Niech $c > 0$, $n \in \mathbb{N}$ i $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Wtedy f jest silnie n-wypukła z modułem c wtedy i tylko wtedy, gdy f jest postaci*

$$f(x) = f_{cont}(x) + R(x) \quad (x \in (a,b)),$$

gdzie $f_{cont}\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna silnie n-wypukłą funkcją z modułem c, i $R\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest n-wypukłą funkcją taką, że $R^{(n+1)}(x) = 0$ dla $x \in (a,b)$ λ p.w.

Jako wniosek otrzymujemy charakteryzację funkcji f silnie n-wypukłych z modułem c, które są $(n+1)$-krotnie różniczkowalne.

WNIOSEK 29. ([**R6**], **Th. 4.17**) *Niech $c > 0$, $n \in \mathbb{N}$ i niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie $(n+1)$-krotnie różniczkowalną funkcją. Wtedy f jest silnie n-wypukła z modułem c wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f^{(n+1)}(x) \geqslant c \quad (x \in (a,b)).$$

Zauważmy, że silnie n-wypukłe funkcje zostały zdefiniowane również niezależnie przez R. Gera i K. Nikodema w [**52**], w inny sposób, mianowicie w terminach ilorazów różnicowych, tak że silna n-wypukłość z modułem c pokrywa się z silną n-wypukłością z modułem $\frac{c}{(n+1)!}$ według mojej definicji (z pracy[**R6**]). Powyższa charakteryzacja silnej n-wypukłości, dla funkcji $(n+1)$-krotnie różniczkowalnych, podana we Wniosku 29, jest również otrzymana w [**52**]).

5. Interpolacja funkcji przez n-wypukłe funkcje

Wiadomo, że każdej funkcji $f\colon I \to \mathbb{R}$ odpowiada w każdym punkcie wewnętrznym I podparcie afiniczne (tzn. dla każdego $x_0 \in IntI$ istnieje funkcja afiniczna $a\colon I \to \mathbb{R}$, taka że $a(x_0) = f(x_0)$ i $a \leqslant f$ na I). Funkcje wypukłe wyższych rzędów (dokładniej nieparzystych) mają podparcia wielomianami stopnia nie większego niż rząd wypukłości.

Następujące własności funkcji wypukłych są dobrze znane (patrz Kuczma [**96**], Popoviciu [**165**], Roberts and Varberg [**172**]): funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest n-wypukła ($I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ z $x_1 < \ldots x_{n+1}$ wykres wielomianu interpolacyjnego $p := P(x_1, \ldots, x_{n+1}; f)$ przechodząc przez punkty $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \ldots, n+1$, zmienia kolejno strony wykresu funkcji f z jednej na drugą (zawsze $p(x) \leqslant f(x)$ dla $x \in I$ takich, że $x > x_{n+1}$ o ile takie punkty istnieją). Dokładniej, $(-1)^{n+1}(f(x) - p(x) \geqslant 0)$ $x < x_1$, $x \in I$, $(-1)^{n+1-i}(f(x) - p(x)) \geqslant 0$, $x_i < x < x_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n$, $f(x) - p(x) \geqslant 0$, $x > x_{n+1}$, $x \in I$. Nietrudno zauważyć, że n-wypukłość redukuje się do zwykłej wypukłości, gdy $n = 1$.

W pracy Wąsowicza [**217**], dla funkcji wypukłych wyższych rzędów, jest rozwijana pewna metoda dotycząca podparć wielomianami. W pracy tej autor udowodnił następujące twierdzenie.

STWIERDZENIE 30. ([**217**]) *Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f\colon I \to \mathbb{R}$ będzie n-wypukłą funkcją. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, i weźmy $x_1, \ldots, x_k \in I$ takie, że $x_1 < \ldots < x_k$. Każdemu punktowi x_j ($j = 1, \ldots, k$) przyporządkowujemy wielokrotność $l_j \in \mathbb{N}$, tak że $l_1 + \ldots l_j = n+1$. Dodatkowo zakładamy, że $x_1 = \inf I$, gdy $l_1 = 1$, oraz jeżeli $x_k = \sup I$, to $l_k = 1$. Oznaczmy $I_0 = (-\infty, x_1)$, $I_j = (x_j, x_{j+1})$, $j = 1, \ldots, k-1$, and $I_k = (x_k, \infty)$. Przy tych założeniach, istnieje wielomian $p \in \Pi_n$, taki że $p(x_j) = f(x_j)$, $j = 1, \ldots, k$, oraz $(-1)^{n+1}(f(x) - p(x)) \geqslant 0$ dla $x \in I_0 \cap I$, $(-1)^{n+1-(l_1+\ldots l_j)}(f(x) - p(x)) \geqslant 0$ dla $x \in I_j$, $j = 1, \ldots, k-1$, $f(x) - p(x) \geqslant 0$ dla $x \in I_k \cap I$.*

Liczby $l_1, \ldots, l_k$ mogą być interpretowane jako wielokrotności punktów $x_1, \ldots, x_k$, odpowiednio. Wielomian $p(x)$ w powyższym stwierdzeniu będziemy nazywać *podparciem* $(l_1, \ldots, l_k)$*-typu.*

WNIOSEK 31. *Powyższa własność została pokazana przez Wąsowicza* [**218**] *również w ogólniejszej wersji, mianowicie dla funkcji wypukłych względem układu Czebyszewa (dla układu Czebyszewa* $(1, x, \ldots, x^n)$ *taka wypukłość redukuje się do* n*-wypukłości).*

UWAGA 32. Wielomian $p(x)$ opisany w Stwierdzeniu 30 ma następujące własności:

(i) $p(x) \leqslant f(x)$, $x > x_k$, $x \in I$,

(ii) if l_j (wielokrotność x_j) jest parzysta, to $p(x)$ przechodzi przez x_j pozostając po tej samej stronie wykresu funkcji f, natomiast zmienia stronę, gdy l_j jest nieparzysta.

W pracy [**R6**], stosując Stwierdzenie 30 i otrzymane wcześniej wyniki dotyczące względnej n-wypukłości, otrzymuję ogólniejszy wynik, że dla każdych dwóch n-wypukłych funkcji f i g, takich, że f jest n-wypukła względem g, funkcja g jest podparciem $(l_1, \ldots, l_k)$-typu dla funkcji f, z dokładnością do wielomianu należącego do Π_n.

TWIERDZENIE 33. ([**R6**], **Th. 5.4**) *Niech* $n \in \mathbb{N}$ *i niech* f *i* $g \colon I \to \mathbb{R}$ *będą dwiema* n*-wypukłymi funkcjami, takimi że* f *jest* n*-wypukła względem* g*. Ustalmy* $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, *i niech* $x_1, \ldots, x_k \in I$ *będą takie że* $x_1 < \ldots < x_k$*. Załóżmy, że* l_j, I_j *spełniają założenia Twierdzenia 30. Wtedy istnieje wielomian* $p \in \Pi_n$*, taki że*

$$f(x_j) = g(x_j) + p(x_j), \quad j = 1, \ldots, k, \tag{59}$$

i dodatkowo

$$\begin{gathered}(-1)^{n+1}[f(x) - (g(x) + p(x))] \geqslant 0 \quad \text{dla } x \in I_0 \cap I \\ (-1)^{n+1-(l_1+\ldots+l_j)}[f(x) - (g(x) + p(x))] \geqslant 0 \quad \text{dla } x \in I_j, j = 1, \ldots, k-1, \\ f(x) - (g(x) + p(x)) \geqslant 0 \quad \text{dla } x \in I_k \cap I.\end{gathered} \tag{60}$$

Funkcję $g(x) + p(x)$ *będziemy nazywać podparciem* $(l_1, \ldots, l_k)$*-typu dla funkcji* f*.*

ROZDZIAŁ 4

Randomizacja funkcji n-Wright-wypukłych

1. Klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ – definicja

Niech $Q \in \{\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots\}$ i niech Θ będzie zmienną losową skoncentrowaną na $[0,\infty)$ ($\mu_\Theta \neq \delta_0$). Niech $n \geqslant 1$. Niech $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ będą niezależnymi kopiami zmiennej losowej Θ. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją, taką że $f \in Q$. Mówimy, że f *jest n- krotnie Θ-Wright-wypukła względem Q* [**R4**] gdy

$$E\nabla_{\Theta_1\dots\Theta_p} f(x) \in Q,\ p = 1, 2, \dots, n.$$

Niech $\mathcal{W}_n = \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ ($n = 1, 2, \dots$) będzie zbiorem wszystkich funkcji $f \in Q$, takich że f jest n-krotnie Θ-Wright-wypukła względem Q. Definiuję $\mathcal{W}_0(\Theta, Q) = Q$, $\mathcal{W}(\Theta, Q) = \mathcal{W}_1(\Theta, Q)$. Najpierw rozpatruję przypadek, gdy $Q = \mathcal{M}_0$. Wtedy

$$f \in \mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_0) \Longleftrightarrow E\nabla_{\Theta_1\dots\Theta_k} f(x) \geqslant 0,\ k = 1, 2, \dots, n.$$

Inaczej mówiąc, f może być uważana jako zrandomizowana wersja $(n-1)$-krotnie-Wright-wypukłej funkcji.

2. Klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$

Zrandomizowane operatory przesunięcia i różnicowy. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Przypomnijmy definicje zrandomizowanych operatorów przesunięcia i różnicowego U, U^n, Φ i Φ^n ($n \in \mathbb{N}$):

$$Uf(x) = U_\Theta f(x) = E\tau_\Theta f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{61}$$

$$\Phi f(x) = \Phi_\Theta f(x) = E\nabla_\Theta f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{62}$$

$$U^n f(x) = U^n_\Theta f(x) = U_{\Theta_n\dots\Theta_1} f(x) = U_{\Theta_n}(U_{\Theta_{n-1}\dots\Theta_1} f(x)), \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \tag{63}$$

$$\Phi^n f(x) = \Phi^n_\Theta F(x) = \Phi_{\Theta_n\dots\Theta_1} f(x) = \Phi_{\Theta_n}(\Phi_{\Theta_{n-1}\dots\Theta_1} f(x)), \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \tag{64}$$

gdzie $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ ($n \in \mathbb{N}$) są niezależnymi kopiami zmiennej losowej Θ. Dla $n = 0$ definiujemy $U^0 f(x) = f(x)$ i $\Phi^0 f(x) \equiv 0$.

Klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ – charakteryzacja. Przypomnijmy definicje operatorów J i J^n ($n \in \mathbb{N}$). Niech $\Theta_1, \Theta_2, \dots$ będą niezależnymi kopiami zmiennej losowej Θ i niech $G \in Q$. Definiuję operator $J(G)$ następująco

$$J(G) = J_\Theta(G) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{\Theta_n\dots\Theta_1} G = \sum_{n=0}^{\infty} U^n G. \tag{65}$$

Iterując (24), definiuję J^n

$$J^n(G) = J(J^{n-1}(G)), \tag{66}$$

dla $n = 1, 2, \dots$, definiując dodatkowo $J^0(G) = G$.

TWIERDZENIE 34. ([**R4**], **Th. 2.6**) *Niech $f \in Q$. Następujące zdania są równoważne:*

(i) $f \in \mathcal{W}(\Theta, Q)$,
(ii) $\Phi f \in Q$,
(iii) $(I - U)f \in Q$,
(iv) $f = Uf + G$, *gdzie* $G \in Q$,
(v)

$$f = J(G), \tag{67}$$

gdzie $G \in Q$. Ponadto, funkcja G jest jedyna

$$G = \Phi f = (I - U)f. \tag{68}$$

Inaczej mówiąc, przy pomocy operatora J, ze wzoru (67), można otrzymywać funkcje z klasy $\mathcal{W}(\Theta, Q)$. Ponadto, dla danej funkcji $f \in \mathcal{W}(\Theta, Q)$, ze wzoru (68), otrzymuję funkcję G, która jest funkcją generującą. Stąd, możemy powiedzieć, że f jest generowana przez funkcję G i funkcję G będziemy nazywać *generatorem* funkcji f. Operatory J i $\Phi = I - U$ są operatorami wzajemnie odwrotnymi jeden do drugiego. Wzory (67) i (68) są bardzo użyteczne przy otrzymywaniu reprezentacji całkowej funkcji $f \in \mathcal{W}(\Theta, Q)$. Warunek (iv) charakteryzuje funkcję $f \in \mathcal{W}(\Theta, Q)$ w terminach tzw. rozkładalności funkcji f w zbiorze Q, tzn. mówimy, że f jest U-rozkładalna w zbiorze Q wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $G \in Q$ taka, że $f = Uf + G$.

TWIERDZENIE 35. ([**R4**], **Lem. 2.7, Th. 2.8**) *Niech $n = 1, 2, \ldots$. Wtedy $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f = J^n(G_n), \tag{69}$$

gdzie $G_n \in Q$. Funkcja G_n jest jedyna

$$G_n = \Phi^n f = (I - U)^n f. \tag{70}$$

Inaczej mówiąc, przy pomocy operatora J^n, ze wzoru (69), można otrzymywać funkcje z klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$. Ponadto, dla danej funkcji $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$, ze wzoru (70), otrzymujemy funkcję G_n która jest funkcją generującą. Stąd, można powiedzieć, że f jest generowana przez funkcję G_n i funkcję G_n będziemy nazywać *generatorem* funkcji f. Operatory J^n and Φ^n są operatorami wzajemnie odwrotnymi jeden do drugiego. Wzory (69) i (70) są bardzo użyteczne przy otrzymywaniu reprezentacji całkowej funkcji $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$. Z Twierdzenia 35 otrzymuję następujące cztery wnioski.

WNIOSEK 36. ([**R4**], **Cor. 2.9**) *Niech $n = 1, 2, \ldots$. Wtedy $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $G_1, G_2, \ldots, G_n \in Q$ takie, że $G_j = UG_j + G_{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $G_0 = F$. Ponadto, dla każdego $j = 0, 1, \ldots, n$ mamy*

a) $f = J^j G_j$,
b) $G_j = (I - U)^j f$,
c) $G_j = \Phi^j f$.
d) $G_{n-j} = J^j G_n$.

WNIOSEK 37. ([**R4**], **Cor. 2.10**) *Niech $n = 1, 2, \ldots$ and $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Wtedy $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $G_j \in \mathcal{W}_{n-j}(\Theta, Q)$ taka, że*

$$f = J^j(G_j).$$

Inaczej mówiąc, każda n-krotnie Θ-Wright wypukła funkcja f jest j-krotnie Θ-Wright wypukła $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ z $(n-j)$-krotnie Θ-Wright wypukłą funkcją generującą G_j.

WNIOSEK 38. ([**R4**], **Cor. 2.11**) *Niech $j, k = 0, 1, 2, \ldots$. Jeżeli $F \in \mathcal{W}_j(\Theta, Q)$ ma funkcję generującą G_j, taką że $G_j \in \mathcal{W}_k(\Theta, Q)$, to $F \in \mathcal{W}_{j+k}(\Theta, Q)$.*

WNIOSEK 39. ([**R4**], **Lem. 2.12**) *Niech $n = 1, 2, \ldots$, $d = 0, 1, \ldots$. Wtedy $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_{d+1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} J^n \left(\frac{[(x-u)_+]^d}{d!} \right) dG(u),$$

gdzie $G \in \mathcal{M}_1$.

3. Klasa $\mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_1)$. Przypadek wykładniczy, $\Theta \sim \mathbf{Exp}(1)$

Zakładam, że Θ ma rozkład wykładniczy, $\Theta \sim \mathrm{Exp}(1)$,

$$\mu_\Theta(dh) = e^{-h} \chi_{(0,\infty)}(h) dh.$$

Z definicji operatora J, po pewnych obliczeniach, otrzymuję następujący lemat.

LEMAT 40.

E1. $J_{Exp(1)}(\chi_{(0,\infty)}(x)) = \chi_{(0,\infty)}(x) + x_+$,
E2. $J_{Exp(1)} \left(\frac{x_+^n}{n!} \right) = \frac{x_+^n}{n!} + \frac{x_+^{n+1}}{(n+1)!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,
E3. $U_{Exp(1)}(x_+ + \chi_{(0,\infty)}(x)) = x_+$,

E4. $U_{Exp(1)}\left(\dfrac{x_+^{n+1}}{(n+1)!}\right)=\dfrac{x_+^{n+1}}{(n+1)!}-U_{Exp(1)}\left(\dfrac{x_+^n}{n!}\right)$, $n=0,1,2,\ldots$.

W dalszym ciągu będę często używać następującego technicznego lematu dotyczącego ciągów rzeczywistych. Niech $\{y_j\}_{j=0}^\infty$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Definiuję ciąg $\{Ry_j\}_{j=0}^\infty$

$$R(y_j)=y_j+y_{j+1}\quad (j=0,1,2,\ldots).$$

Ponadto, indukcyjnie, definiuję ciągi $\{R^n(y_j)\}_{j=0}^\infty$, $n=1,2,\ldots$, wzorem $R^n(y_j)=R(R^{n-1}(y_j))$ $(j=0,1,2,\ldots)$, z konwencją, że $R^0(y_j)=y_j$ $(j=0,1,2,\ldots)$.

Lemat 41. ([**R4**], **Lem. 3.1**)

$$R^n(y_j)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}y_{j+k}\quad (n=1,2,\ldots,j=0,1,2,\ldots)$$

Z Lematu 41 z $R^n=J^n_{\mathrm{Exp}(1)}$ i biorąc pod uwagę przykład E2, otrzymuję następujące twierdzenie.

Twierdzenie 42. ([**R4**], **Th. 3.2**)

$$J^n_{Exp(1)}(\chi_{(0,\infty)}(x))=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\frac{x_+^k}{k!}\quad (n=1,2,\ldots). \tag{71}$$

Oznaczam

$$K_n(x)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\frac{x_+^k}{k!}\quad (n=1,2,\ldots). \tag{72}$$

Zgodnie z Twierdzeniem 35, $f\in\mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1),\mathcal{M}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f=J^n_{\mathrm{Exp}(1)}(G_n)$, gdzie $G_n=(I-U_{\mathrm{Exp}(1)})^nf=\Phi^n_{\mathrm{Exp}(1)}f\in\mathcal{M}_1$. Dalej, pisząc funkcję G_n w postaci $G_n(x)=\int_{-\infty}^\infty\chi_{(0,\infty)}(x-u)dG_n(u)$ $(x\in\mathbb{R})$, z Twierdzenia 42, otrzymuję twierdzenie o reprezentacji funkcji z klasy $\mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1),\mathcal{M}_1)$.

Twierdzenie 43. ([**R4**], **Th. 3.3**) *Niech $n=1,2,\ldots$. Wtedy $f\in\mathcal{W}_n(Exp(1),\mathcal{M}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x)=\int_{-\infty}^\infty K_n(x-u)dG_n(u)\quad (x\in\mathbb{R}), \tag{73}$$

gdzie $G_n\in\mathcal{M}_1$. Ponadto, powyższa funkcja G_n jest jedyna

$$G_n=(I-U_{Exp(1)})^nf=\Phi^n_{Exp(1)}f. \tag{74}$$

Następnym etapem mojej analizy jest zbadanie własności operatora $U^n_{\mathrm{Exp}(1)}$. Stosując Lemat 41 z $U^{-1}_{\mathrm{Exp}(1)}$ zamiast R, biorąc pod uwage przykład E2 i na podstawie Twierdzenia 34 otrzymuję następujący lemat.

Lemat 44. ([**R4**], **Lem. 3.5**)

$$U^n_{Exp(1)}(K_n(x))=\frac{x_+^n}{n!}\quad (n=1,2,\ldots).$$

Z Twierdzeń 35, 43, Lematu 44 i biorąc pod uwagę wzór (16) o reprezentacji $(n+1)$-krotnie monotonicznej funkcji, otrzymuję następujące twierdzenie.

Twierdzenie 45. ([**R4**], **Th. 3.6**) *Niech $n=1,2,\ldots$. Jeżeli $f\in\mathcal{W}_n(Exp(1),\mathcal{M}_1)$, to $U^n_{Exp(1)}f\in\mathcal{M}_{n+1}$. Ponadto, jeżeli $f=J^n_{Exp(1)}(G)$, gdzie $G\in\mathcal{M}_1$, wtedy $U^n_{Exp(1)}f=I_n(G)$, gdzie*

$$I_n(G)(x)=\int_{-\infty}^\infty\frac{(x-u)_+^n}{n!}dG(u).$$

Innymi słowami, jeżeli funkcja f jest n-krotnie wykładniczo Exp(1)-Wright-wypukła względem $\mathcal{M}_1$, wtedy funkcja $U^n_{\mathrm{Exp}(1)}f\in\mathcal{M}_{n+1}$ (tzn. jest ona $(n+1)$-krotnie monotoniczna). Ponadto $f=J^n_{\mathrm{Exp}(1)}(G)$ i $U^n_{\mathrm{Exp}(1)}f=I_n(G)$ z ta samą funkcją generującą G.

W następnym twierdzeniu pokazuję, że funkcja $f\in\mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1),\mathcal{M}_1)$ może być reprezentowana jako suma pewnych funkcji generowanych przez funkcję z klasy $\mathcal{M}_{n+1}$.

TWIERDZENIE 46. (**[R4], Th. 3.9**) *Niech $f \in \mathcal{M}_1$ i niech $n = 1, 2, \ldots$. Wtedy $f \in \mathcal{W}_n(Exp(1), \mathcal{M}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $H \in \mathcal{M}_{n+1}$ taka, że*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H^{(k)}(x). \tag{75}$$

Inaczej mówiąc, funkcja $f \in \mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1), \mathcal{M}_1)$ może być otrzymana przy pomocy dwóch wzorów, ze wzoru (73) z funkcją generującą $G_n \in \mathcal{M}_1$ jak również ze wzoru (75) z funkcją generującą $H \in \mathcal{M}_{n+1}$.

4. Klasa $\mathcal{W}_\infty(\Theta, \mathcal{M}_1)$. Przypadek wykładniczy $\Theta \sim \mathrm{Exp}(1)$

Przechodzę teraz do opisania klasy $\mathcal{W}_\infty(\Theta, Q)$ funkcji *całkowicie Θ-Wright-wypukłych* zdefiniowanej jako

$$\mathcal{W}_\infty(\Theta, Q) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n(\Theta, Q).$$

Dowodzę, że w przypadku $\Theta \sim \mathrm{Exp}(1)$ klasa ta pokrywa się z klasą funkcji całkowicie monotonicznych.

TWIERDZENIE 47. (**[R4], Th. 4.1**)

$$\mathcal{W}_\infty(Exp(1), \mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_\infty.$$

5. Klasa $\mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_j)$. Przypadek wykładniczy, $\Theta \sim \mathrm{Exp}(1)$

Zwyczajowo, będę oznaczać pochodną dystrybucyjną przez by f' i punktową pochodną jako $f'(x)$ (patrz [**189**], [**195**]). Niech $\mathcal{M}_0 = \{f' \colon f \in \mathcal{M}_1\}$. Ponieważ $\mathcal{M}_1$ składa się z funkcji niemalejących, $\mathcal{M}_0$ składa się z nieujemnych dystrybucji pierwszego rzędu. Będę teraz badać własności klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Z Wniosku 36, funkcja $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \mathcal{M}_1$ takie, że $G_j = UG_j + G_{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ $(G_0 = f)$. Równoważnie, $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$G_k = \Phi^k f = E\nabla_{\Theta_1, \ldots, \Theta_k} f \in \mathcal{M}_1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{76}$$

Zapisując to w terminach operatorów różnicowych otrzymuję, że $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\nabla_h E\nabla_{\Theta_1 \ldots \Theta_k} f \geqslant 0, \quad h > 0, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{77}$$

Oczywiście (77) jest równoważne $E\nabla_{\Theta_1, \ldots, \Theta_k} \nabla_h f \geqslant 0$, co jest z kolei równoważne

$$E\nabla_{\Theta_1 \ldots \Theta_k} f' \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{78}$$

Dalej, ponieważ (76) jest równoważne (78), otrzymuję następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 48. (**[R4], Th. 5.1**)

$$f \in \mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_1) \textit{ wtedy i tylko wtedy, gdy } f' \in \mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_0).$$

Niech

$$K_{n,j}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x_+^{k+j}}{(k+j)!},$$

$n = 1, 2, \ldots$, $j = -1, 0, 1, 2, \ldots$, z konwencją, że $x_+^{-1}/(-1)! = \delta_0(x)$. Oczywiście $K_{n,0}(x) = K_n(x)$.

W następnym twierdzeniu podaję reprezentację całkową funkcji z klasy $\mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1), \mathcal{M}_j)$ dla dowolnego $j = 0, 1, 2, \ldots$.

TWIERDZENIE 49. (**[R4], Th. 5.2**) *Niech $n = 1, 2, \ldots$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Wtedy $f \in \mathcal{W}_n(Exp(1), \mathcal{M}_j)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{n,j-1}(x-u)dG(u), \tag{79}$$

gdzie $G \in \mathcal{M}_1$. Ponadto, $G(x) = [(I - U_{Exp(1)})^n f(x)]^{(j-1)}$ dla $j = 1, 2, \ldots$, oraz $G(x) = (I - U_{Exp(1)})^n f(x)$ dla $j = 0$.

WNIOSEK 50. (**[R4], Cor. 5.3**) *Niech $n = 1, 2, \ldots$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Wtedy*

(i) *$f \in \mathcal{W}_n(Exp(1), \mathcal{M}_{j+1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f' \in \mathcal{W}_n(Exp(1), \mathcal{M}_j)$,*
(ii) *$f \in \mathcal{W}_n(Exp(1), \mathcal{M}_{j+1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{(j)} \in \mathcal{W}_n(Exp(1), \mathcal{M}_1)$,*

(iii) $\mathcal{W}_\infty(Exp(1), \mathcal{M}_j) = \mathcal{M}_\infty$.

Uwaga 51. ([**R4**], **Rem. 5.4**) Z Twierdzenia 49 wynika, że funkcja $f \in \mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1), \mathcal{M}_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest postaci

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta_0(x-u) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-u)_+^k / k! \right) dG(u),$$

gdzie $G \in \mathcal{M}_1$. Ponadto $G = (I - U_{\mathrm{Exp}(1)})^n$. Z definicji, $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Phi_\Theta^k f(x) = E\nabla_{\Theta_1\Theta_2 \ldots \Theta_k} f(x) \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{80}$$

gdzie $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ są niezależnymi kopiami Θ. Z kolei, funkcja f jest $(k-1)$-krotnie Wright-wypukła $(k = 2, \ldots, n)$, gdy

$$\nabla_{h_1 \ldots h_k} f(x) \geqslant 0, \quad h_1, \ldots, h_k > 0. \tag{81}$$

Nierówności (80) i (81) sugerują, że można nazwać funkcję f spełniającą (80) funkcją $(n-1)$-*krotnie Wright-wypukłą losowo względem zmiennej losowej* Θ.

Ustalmy $u \in \mathbb{R}$. Można pokazać, że nie istnieją $h_1, h_2, \ldots, h_n > 0$ dla których

$$\nabla_{h_1 \ldots h_k} \left(\delta_0(x-u) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-u)^k / k! \right) \geqslant 0 \quad (x \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ale zachodzą nierówności

$$E\nabla_{\Theta_1\Theta_2 \ldots \Theta_k} \left(\delta_0(x-u) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-u)^k / k! \right) \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ są niezależnymi kopiami $\Theta \sim \mathrm{Exp}(1)$. Inaczej mówiąc, dystrybucja (funkcja uogólniona) $\delta_0(x-u) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (x-u)_+^k / k$ jest $(n-1)$-krotnie Wright-wypukła losowo względem zmiennej losowej $\Theta \sim \mathrm{Exp}(1)$, ale nie jest $(n-1)$-krotnie Wright wypukła.

6. Klasa $\tilde{\mathcal{W}}_n(\tilde{\Theta}, \mathcal{M}_1((-\infty, 0))$. Przypadek multiplikatywny

Można zauważyć, że wyniki otrzymane w poprzedniej części, dotyczące Θ-Wright wypukłości można zastosować, z niewielką modyfikacją, do przypadku multiplikatywnego. W tej części będziemy zajmować się reprezentacją całkową mulltiplikatywnie wypukłych funkcji.

Niech $\tilde{\Theta}$ będzie zmienną losową skoncentrowaną na $(0, 1]$. Mówimy, że funkcja $H \in \mathcal{M}_1(($-$\infty, 0))$ jest *multiplikatywnie* $\tilde{\Theta}$-*Wright-wypukła względem klasy* $\mathcal{M}_1((-\infty, 0))$, gdy

$$\begin{aligned} H(u) &= \tilde{U}H(u) + \tilde{G}(u), \\ \tilde{U}H(u) &= \tilde{U}_{\tilde{\Theta}}H(u) = \int_0^1 H\left(\frac{u}{c}\right) \mu_{\tilde{\Theta}}(dc), \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{G} \in \mathcal{M}_1((-\infty, 0))$. Multiplikatywna n-krotna $\tilde{\Theta}$-Wright wypukłość może być zdefiniowana analogicznie. Niech $\tilde{\mathcal{W}}_n(\tilde{\Theta}, \mathcal{M}_1(-\infty, 0))$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ będzie klasą n-krotnie $\tilde{\Theta}$-Wright-wypukłych funkcji. Definiujemy $\tilde{\mathcal{W}}(\tilde{\Theta}, \mathcal{M}_1(-\infty, 0)) = \tilde{\mathcal{W}}_1(\tilde{\Theta}, \mathcal{M}_1(-\infty,))$.

Uwaga 52. ([**R4**], **Rem. 6.1**) Niech Θ będzie rzeczywistą zmienną losową z rozkładem μ_Θ skoncentrowanym na $(0, \infty)$ i niech $F \in \mathcal{W}(\Theta, \mathcal{M}_1)$. Wtedy $F(x)$ jest postaci

$$F(x) = \int_0^\infty F(x-h)\mu_\Theta(dh) + G(x), \tag{82}$$

gdzie $G(x) \in \mathcal{M}_1$. Niech $x = -\ln u$ $(u < 0)$, $h = -\ln c$ $(0 < c \leqslant 1)$, $\tilde{F}(u) = F(-\ln(-u))$, $\tilde{G}(u) = G(-\ln(-u))$ i $\tilde{\Theta} = e^{-\Theta}$. Wtedy, $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{W}}(\tilde{\Theta}, \mathcal{M}_1((-\infty, 0)))$ i zachodzi wzór

$$\tilde{F}(u) = \int_0^1 \tilde{F}\left(\frac{u}{c}\right) \mu_{\tilde{\Theta}}(dc) + \tilde{G}(u) \quad (u < 0). \tag{83}$$

Ponadto, jeżeli $F \in \mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, to $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{W}}(\tilde{\Theta}, \mathcal{M}_1((-\infty, 0)))$.

Odwrotnie, jeżeli $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{W}}(\tilde{\Theta}, \mathcal{M}_1((-\infty, 0)))$ spełnia (83), to dla $F(x) = \tilde{F}(-e^{-x}) \in \mathcal{W}(\Theta, \mathcal{M}_1)$, $G(x) = \tilde{G}(-e^{-x})$, $\Theta = -\ln \tilde{\Theta}$, jest spełniona równość: (82).

Ponadto, jeżeli $\Theta \sim \mathrm{Exp}(1)$, to $\tilde{\Theta} = e^{-\Theta}$ ma rozkład jednostajny na $(0, 1)$, $\tilde{\Theta} \sim U(0, 1)$. Odwrotnie, jeżeli $\tilde{\Theta} \sim U(0, 1)$, to $\Theta = -\ln \tilde{\Theta} \sim \mathrm{Exp}(1)$.

Z Twierdzeń 43 i 47 otrzymuję następujące dwa twierdzenia o reprezentacji funkcji z klas $\tilde{\mathcal{W}}_n$ i $\tilde{\mathcal{W}}_\infty$, odpowiednio.

TWIERDZENIE 53. ([**R4**], **Th. 6.2**) *Niech $n = 1, 2, \ldots$. Funkcja $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{W}}(U(0,1), \mathcal{M}_1((-\infty, 0)))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{F}$ ma reprezentację*

$$\tilde{F}(u) = \int_{-\infty}^{0} \tilde{K}_n\left(\frac{u}{s}\right) d\tilde{G}(s),$$

gdzie

$$\tilde{K}_n\left(\frac{u}{s}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\left[\left(-\ln\frac{u}{s}\right)_+\right]^k}{k!},$$
$$\tilde{G}(s) \in \mathcal{M}_1((-\infty, 0)).$$

Ponadto, mamy równość $\tilde{G} = (I - \tilde{U})^n \tilde{F}$.

TWIERDZENIE 54. ([**R4**], **Th. 6.3**) *$\tilde{F}(u) \in \tilde{\mathcal{W}}_\infty(U(0,1), \mathcal{M}((-\infty, 0)))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{F}$ może być zapisana w postaci*

$$\tilde{F}(u) = \int_0^\infty (-u)^{-t} \gamma(dt), \quad u < 0,$$

gdzie γ jest miarą na $(0, \infty)$.

7. Klasa $\mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_1)$. Przypadek dyskretny

Zakładam teraz, że zmienna losowa $\Theta = X_p$ ma rozkład arytmetyczny

$$\mu_{X_p} = q\delta_0 + p\delta_1 \quad (0 < p < 1, q = 1 - p).$$

W [**R4**] otrzymuję następujące dwa twierdzenia o reprezentacji funkcji z klas $\mathcal{W}_n$ i $\mathcal{W}_\infty$.

TWIERDZENIE 55. ([**R4**], **Th. 7.1**) *Niech $n = 1, 2, \ldots$ i $\mu_{X_p} = q\delta_0 + p\delta_1$ $(0 < p < 1,\ q = 1 - p)$. Wtedy*

(i) *$f \in \mathcal{W}_n(X_p, \mathcal{M}_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} C_{j,n} \delta_j(x - u) dG(u), \tag{84}$$

gdzie $G \in \mathcal{M}_1$ i $C_{j,n}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ są dane jako

$$\begin{aligned} C_{j,1} &= 1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \\ C_{j,n} &= \frac{(j+1)(j+2)\ldots(j+n-1)}{(n-1)!}, \quad n = 2, 3, \ldots, j = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{85}$$

(ii) *$f \in \mathcal{W}_\infty(X_p, \mathcal{M}_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = \int_{-1}^{0} \int_0^\infty \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{t(j+u)} \delta_{j+u}(x) \nu_u(dt) \lambda(du),$$

gdzie $\nu_u(dt)\lambda(du)$ $(-1 < u \leqslant 0,\ t > 0)$ jest miarą borelowską na $(-1, 0] \times (0, \infty)$.

TWIERDZENIE 56. ([**R4**], **Th. 7.4**) *Niech $n = 1, 2, \ldots$ i $\mu_{X_p} = q\delta_0 + p\delta_1$ $(0 < p < 1,\ q = 1 - p)$. Wtedy*

(i) *$F \in \mathcal{W}_n(X_p, \mathcal{M}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} C_{j,n} (x - j - u)_+ dG(u),$$

gdzie $G(u) \in \mathcal{M}_1$ i $C_{j,n}$ są dane wzorem (85).

(ii) *$F \in \mathcal{W}_\infty(X_p, \mathcal{M}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$F(x) = \int_{-1}^{0} \int_0^\infty \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{t(j+u)} (x - j - u)_+ \nu_u(dt) \lambda(du),$$

gdzie $\nu_u(dt)\lambda(du)$ jest miarą borelowską na $(-1, 0] \times (0, \infty)$.

Z Twierdzeń 55 i 56 otrzymuję następujący wniosek.

WNIOSEK 57.

$$\mathcal{W}_\infty(X_p, \mathcal{M}_0) \supsetneq \mathcal{M}_\infty$$
$$\mathcal{W}_\infty(X_p, \mathcal{M}_1) \supsetneq \mathcal{M}_\infty$$

UWAGA 58. ([**R4**], **Rem. 8.7**) Mogłoby być interesujące wiedzieć, czy równość $\mathcal{W}_\infty(X, \mathcal{M}_j) = \mathcal{M}_\infty$ pozostaje prawdziwa, gdy X ma rozkład dyskretny, ale niearytmetyczny, na przykład, gdy $P(X = 1) = p$ i $P(X = \sqrt{2}) = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

ROZDZIAŁ 5

Nierówności typu Hermita-Hadamarda dla funkcji wypukłych

W pracy [**R2**] oferujemy pewne użytecze narzędzia do otrzymywania i dowodu wielu postaci nierówności typu Hermita-Hadamarda również dla funkcji wypukłych wyższych rzędów.

1. Pewne uogólnienia nierówności typu Fejèra.

W dalszym ciągu będziemy wykorzystywać elementy teorii stochastycznych porządków. In the sequel we will to make use of the theory of stochastic order relations. Omówmy kilka oznaczeń.

Jak zwykle, F_X oznacza dystrybuantę zmiennej losowej X i μ_X jest rozkładem odpowiadającym X.

Dla rzeczywistych zmiennych losowych X, Y ze skończoną wartością oczekiwaną, mówimy że X jest zdominowana przez Y w sensie *wypukłego porządku* gdy $\mathbb{E}f(X) \leqslant \mathbb{E}f(Y)$ dla wszystkich funkcji wypukłych $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla których istnieją wartości oczekiwane. W tym przypadku piszemy $X \leqslant_{cx} Y$, lub $\mu_X \leqslant_{cx} \mu_Y$. Warunek wystarczający dla wypukłego stochastycznego porządku jest podany w nastepującym lemacie Ohlina [**150**].

LEMAT 59. *[Ohlin, 1969] Niech X, Y będą zmiennymi losowymi, takimi że $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$. Jeżeli dystrybuanty F_X, F_Y przecinaja się dokładnie jeden raz, tzn. dla pewnego x_0 zachodzi*

$$F_X(x) \leqslant F_Y(x) \text{ gdy } x < x_0 \text{ i } F_X(x) \geqslant F_Y(x) \text{ gdy } x > x_0,$$

wtedy $X \leqslant_{cx} Y$.

Przypomnijmy uogólnienie nierówności Hermita-Hadamarda (4), podane przez Fejéra [**46**].

STWIERDZENIE 60. *Niech $f\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą zdefiniowana na rzeczywistym przedziale I, $a, b \in I$ z $a < b$ i niech $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją nieujemną symetryczną względem $(a + b)/2$ (zakładamy istnienie całek we wszystkich wzorach). Wtedy*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot \int_a^b g(x)\,dx. \tag{86}$$

Podwójna nierówność (86) jest znana w literaturze jako nierówność Hermita-Hadamarda-Fejéra (patrz [**137**], [**42**] i [**158**] dla rysu historycznego).

UWAGA 61.

(i) Zauważmy, że dla $g(x) = w(x)$ takiej, że $\int_a^b w(x)dx = 1$, nierównośc (86) może być przepisana w postaci

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(x)w(x)dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{87}$$

(ii) Odwrotnie, z nierówności (87) wynika (86). Faktycznie, jeżeli $\int_a^b g(x)dx > 0$, wystarczy wziąć $w(x) = \left(\int_a^b g(x)dx\right)^{-1} g(x)$. Gdy $\int_a^b g(x)dx = 0$, to (86) jest oczywista.

UWAGA 62. ([**R2**], **p. 3**) Z Lematu 59, wynika prosty dowód (86).

Niech f i g spełniają założenia Stwierdzenia 60. Niech X, Y, Z będą trzema zmiennymi losowymi takimi, że $\mu_X = \delta_{(a+b)/2}$, $\mu_Y(dx) = (\int_a^b g(x)dx)^{-1} g(x)dx$, $\mu_Z = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_b)$. Wtedy, z Lematu 59, otrzymujemy że $X \leqslant_{cx} Y$ and $Y \leqslant_{cx} Z$, co implikuje (86).

Jak zauważył Fink w [**49**], można się zastanawiać, jak symetrii wpływa na nierówność (86) i czy nierównośc ta zachodzi dla innych funkcji (cf. [**42**, p. 53]). W pracy [**R2**] dajemy pewne funkcje dla których ta nierówność zachodzi.

TWIERDZENIE 63. ([**R2**], **Th. 2.1**) *Niech* $0 < p < 1$. *Niech* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją wypukłą,* $a, b \in I$ *with* $a < b$. *Jeżeli weźmiemy funkcję* $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *taką że* w *jest nieujemna,* $\int_a^b w(x)dx = 1$ *i*

$$w(pa + (1-p)b + z) = \frac{(1-p)^2}{p^2} w(pa + (1-p)b - \frac{1-p}{p} z) \tag{88}$$

dla wszystkich $0 \leqslant z \leqslant p(b-a)$, *to*

$$f(pa + (1-p)b) \leqslant \int_a^b f(x)w(x)dx \leqslant pf(a) + (1-p)f(b). \tag{89}$$

UWAGA 64. Jeżeli wybierzemy $p = \frac{1}{2}$ w Twierdzeniu 63, to równość (88) oznacza, że w jest symetryczna względem $\frac{a+b}{2}$, i nierówności (89) redukują się do nierówności Fèjera (87).

Ponieważ zbiór miar probabilistycznych μ spełniejących nierówności

$$f(pa + qb)P_0 \leqslant \int_{[a,b]} f(x)\mu(dx) \leqslant [pf(a) + qf(b)]P_0. \tag{90}$$

(z $P_0 = 1$) jest zamknięty względem słabej zbieżności miar, z Twierdzenia 63, otrzymujemy natychmiast następujący wynik.

TWIERDZENIE 65. ([**R2**], **Th. 2.2**) *Niech* $0 < p < 1$. *Niech* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją wypukłą,* $a, b \in I$, *z* $a < b$. *Niech* μ *będzie miarą probabilistyczną na* $\mathcal{B}([a,b])$ *taką, że*

$$\mu(pa + (1-p)b + B) = \frac{1-p}{p}\mu(pa + (1-p)b - \frac{1-p}{p}B), \tag{91}$$

dla wszystkich $B \in \mathcal{B}([0, p(b-a)])$. *Wtedy*

$$f(pa + (1-p)b) \leqslant \int_{[a,b]} f(x)\mu(dx) \leqslant pf(a) + (1-p)f(b). \tag{92}$$

2. Pewne wyniki związane z nierównością Brennera-Alzera.

W 1991, Brenner i Alzer [**28**] otrzymali następujący wynik uogólniający wynik Fejéra jak również wyniki Vasića i Lackovića (1976) [**213**] i Lupasa (1976) [**112**] (patrz również [**158**]).

STWIERDZENIE 66. *Niech* p, q *będą liczbami dodatnimi i* $a_1 \leqslant a < b \leqslant b_1$. *Wtedy nierówności*

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \leqslant \frac{1}{2y}\int_{A-y}^{A+y} f(t)dt \leqslant \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} \tag{93}$$

zachodzą dla $A = \frac{pa+qb}{p+q}$, $y > 0$, *i dla wszystkich ciągłch funkcji wypukłych* $f\colon [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ *wtedy i tylko wtedy gdy*

$$y \leqslant \frac{b-a}{p+q}\min\{p, q\}.$$

UWAGA 67. W pracy [**158**, p. 144] można znaleźć następujące przeformułowanie nierówności (93):

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \leqslant \frac{1}{2y}\int_{A-y}^{A+y} f(t)dt \leqslant \frac{1}{2}\{f(A-y) + f(A+y)\} \leqslant \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}. \tag{94}$$

W następujących dwóch twierdzeniach podajemy pewne uogólnienia nierówności Brennera i Alzera (94), które dowodzimy używając lematu Ohlina.

TWIERDZENIE 68. ([**R2**], **Th. 3.1**) *Niech* p, q *będą danymi dodatnimi liczbami,* $a_1 \leqslant a < b \leqslant b_1$, $0 < y \leqslant \frac{b-a}{p+q}\min\{p,q\}$ *i niech* $f\colon [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją wypukłą. Wtedy*

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) &\leqslant \frac{\alpha}{2}\{f(A-(1-\alpha)y) + f(A+(1-\alpha)y)\} + \frac{1}{2y}\int_{A-(1-\alpha)y}^{A+(1-\alpha)y} f(t)dt \\
&\leqslant \frac{\alpha}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(A-y+k\frac{\alpha y}{n}\right) + f\left(A+y-k\frac{\alpha y}{n}\right)\right\} + \frac{1}{2y}\int_{A-(1-\alpha)y}^{A+(1-\alpha)y} f(t)dt \\
&\leqslant \frac{1}{2y}\int_{A-y}^{A+y} f(t)dt, \qquad (95)
\end{aligned}$$

gdzie $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2y}\int_{A-y}^{A+y} f(t)dt &\leqslant \frac{\beta}{2}\{f(A-y)+f(A+y)\} + (1-\beta)\frac{1}{2y}\int_{A-y}^{A+y} f(t)dt\\ &\leqslant \frac{1}{2}\{f(A-y)+f(A+y)\}, \qquad (96)\end{aligned}$$

gdzie $0 \leqslant \beta \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{f(A-y)+f(A+y)\} &\leqslant (\frac{1}{2}-\gamma)\{f(A-y-c)+f(A+y+c)\} + \gamma\{f(A-y)+f(A+y)\}\\ &\leqslant \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}, \qquad (97)\end{aligned}$$

gdzie $c = \min\{b-(A+y), (A-y)-a\}$, $\gamma = \left|\frac{1}{2}-p\right|$.

Twierdzenie 69. ([**R2**], **Th. 3.2**) *Niech* p, q *będą danymi dodatnimi liczbami,* $0 < \alpha < 1$, $a_1 \leqslant a < b \leqslant b_1$, $0 < y \leqslant \frac{b-a}{p+q}\min\{p,q\}$ *and* $0 \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}y \leqslant \frac{b-a}{p+q}\min\{p,q\}$. *Let* $f\colon [a_1,b_1] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją wypukłą. Wtedy*

$$\begin{aligned}f(A) &\leqslant \frac{\alpha}{y}\int_{A-y}^{A} f(t)dt + \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha y}\int_{A}^{A+\frac{\alpha}{1-\alpha}y} f(t)dt \leqslant \alpha f(A-y) + (1-\alpha)f(A+\frac{\alpha}{1-\alpha}y)\\ &\leqslant \frac{p}{p+q}f(a) + \frac{q}{p+q}f(b), \qquad (98)\end{aligned}$$

gdzie $A = \frac{pa+qb}{p+q}$.

3. Przypadek n-tego rzędu

Funkcje wypukłe są dobrze znane i badane (patrz np. [**96**], [**172**], [**30**], [**160**], [**53**], [**R6**]). W dalszym ciągu będziemy korzystać z teorii s-wypukłych porządków stochastycznych (patrz Denuit i inn. (1998) [**39**]). Wprowadzimy pewne oznaczenia

Dla zmiennych losowych X, Y i dowolnej liczby całkowitej $s \geqslant 2$ mówimy, że X jest zdominowana przez Y w sensie ***s*-wypukłego porządku** gdy $\mathbb{E}f(X) \leqslant \mathbb{E}f(Y)$ dla wszystkich $(s-1)$-wypukłych funkcjis $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla których wartości oczekiwane istnieją. Piszemy w tym przypadku $X \leqslant_{s-cx} Y$, lub $\mu_X \leqslant_{s-cx} \mu_Y$. Wtedy porządek $\leqslant_{2-cx}$ jest zwykłym porządkiem $\leqslant_{cx}$.

Użytecznym kryterium do sprawdzania s-wypukłego porzadku jest kryterium podane przez Denuita, Lefêvra and Shakeda w 1998 r. [**39**]. Przed podaniem tego kryterium potrzebujemy najpierw wprowadzić następujące oznaczenia. Zdefiniujemy liczbę zmian znaku funkcji $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako

$$S^-(\varphi) = \sup\{S^-[\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)] \colon x_1 < x_2 < \ldots x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\},$$

gdzie $S^-[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ oznacza liczbę zmian znaku ciągu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (zerowe wyrażenia są odrzucane)). Dwie funkcje rzeczywiste φ_1, φ_2 mają k punktów przecięcia (lub przecinają się każda z każdą k-razy) gdy $S^-(\varphi_1 - \varphi_2) = k$.

Stwierdzenie 70 ([**39**]). *Niech* X *i* Y *będą dwiema zmiennymi losowymi, takimi że* $\mathbb{E}(X^j - Y^j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, s-1$ $(s \geqslant 2)$. *Jeżeli* $S^-(F_X - F_Y) = s-1$ *ostatnia zmiana znaku* $F_X - F_Y$ *jest dodatnia, to* $X \leqslant_{s-cx} Y$.

Teraz stosujemy Stwierdzenie 70 do otrzymania następujących wyników.

Twierdzenie 71. ([**R2**], **Th. 4.1**) *Niech* $n \geqslant 1$, $a_1 \leqslant a < b \leqslant b_1$.

Niech $a(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, $b(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_{a(n)}$, $x_1, \ldots, x_{a(n)}$, $\beta_1, \ldots, \beta_{b(n)}$, $y_1, \ldots, y_{b(n)}$ *będą liczbami rzeczywistymi takimi, że*

a) *jeżeli* n *jest parzyste to*

$$\begin{aligned}&0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_1 + \beta_2 < \alpha_1 + \alpha_2 < \ldots < \alpha_1 + \ldots + \alpha_{a(n)} = \beta_1 + \ldots + \beta_{b(n)} = 1,\\ &a \leqslant y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \ldots < x_{a(n)} < y_{b(n)} \leqslant b, \qquad (99)\end{aligned}$$

b) *jeżeli* n *jest nieparzyste to*

$$\begin{aligned}&0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_1 + \beta_2 < \alpha_1 + \alpha_2 < \ldots < \beta_1 + \ldots + \beta_{b(n)} < \alpha_1 + \ldots + \alpha_{a(n)} = 1\\ &a \leqslant y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \ldots < y_{b(n)} < x_{a(n)} \leqslant b; \qquad (100)\end{aligned}$$

i

$$\sum_{k=1}^{a(n)} x_i^k \alpha_i = \sum_{j=1}^{b(n)} y_j^k \beta_j,$$

dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$.

Niech $f\colon [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ *będzie* n*-wypukłą funkcją. Wtedy mamy następujące nierówności:*

i) *jeżeli* n *jest parzyste to*

$$\sum_{i=1}^{a(n)} \alpha_i f(x_i) \leqslant \sum_{j=1}^{b(n)} \beta_j f(y_j), \tag{101}$$

ii) *jeżeli* n *jest nieparzyste to*

$$\sum_{j=1}^{b(n)} \beta_j f(y_j) \leqslant \sum_{i=1}^{a(n)} \alpha_i f(x_i). \tag{102}$$

TWIERDZENIE 72. ([**R2**], **Th. 4.2**) *Niech* $n \geqslant 1$, $a_1 \leqslant a < b \leqslant b_1$. *Let* $a(n), b(n) \in \mathbb{N}$. *Let* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{a(n)}$, $\beta_1, \ldots, \beta_{b(n)}$ *będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi, takimi że* $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{a(n)} = \beta_1 + \ldots + \beta_{b(n)} = 1$. *Niech* $x_1, \ldots, x_{a(n)}$, $y_1, \ldots, y_{b(n)}$ *będą liczbami rzeczywistymi, takimi że*

a) $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{a(n)} \leqslant b$ *and* $a \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_{b(n)} \leqslant b$,

b) $\sum_{k=1}^{a(n)} x_i^k \alpha_i = \sum_{j=1}^{b(n)} y_j^k \beta_j$, *dla każdego* $k = 1, 2, \ldots, n$.

Niech $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $x_0 = y_0 = -\infty$. *Let* $F_1, F_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będą dwiema funkcjami danymi następującymi wzorami:* $F_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ *if* $x_k < x \leqslant x_{k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, a(n) - 1)$ *and* $F_1(x) = 1$ *if* $x > x_{a(n)}$; $F_2(x) = \beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_k$ *if* $y_k < x \leqslant y_{k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, b(n) - 1)$ *and* $F_2(x) = 1$ *if* $x > y_{b(n)}$. *Jeżeli funkcje mają* n *punktów przecięcia i ostatnia zmana znaku* $F_1 - F_2$ *jest dodatnia, to dla każdej* n*-wypukłej funkcjin* $f\colon [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ *mamy następujące nierówności*

$$\sum_{i=1}^{a(n)} \alpha_i f(x_i) \leqslant \sum_{j=1}^{b(n)} \beta_j f(y_j). \tag{103}$$

TWIERDZENIE 73. ([**R2**], **Th. 4.3**) *Niech* $n \geqslant 1$, $a_1 \leqslant a < b \leqslant b_1$. *Niech* $a(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, $b(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$. *Niech* $x_1, \ldots, x_{a(n)}, y_1, \ldots, y_{b(n)}$ *będą liczbami rzeczywistymi, i* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{a(n)}$, $\beta_1, \ldots, \beta_{b(n)}$ *będą dodatnimi liczbami takimi że* $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{a(n)} = 1$, $\beta_1 + \ldots + \beta_{b(n)} = 1$,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b x^k dx = \sum_{j=1}^{b(n)} y_j^k \beta_j = \sum_{i=1}^{a(n)} x_i^k \alpha_i \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{a(n)} \leqslant b$, $a \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_{b(n)} < b$,

$$\tfrac{x_1-a}{b-a} < \alpha_1 < \tfrac{x_2-a}{b-a},$$
$$\tfrac{x_2-a}{b-a} < \alpha_1 + \alpha_2 < \tfrac{x_3-a}{b-a},$$
$$\ldots$$
$$\tfrac{x_{a(n)-1}-a}{b-a} < \alpha_1 + \ldots + \alpha_{a(n)-1} < \tfrac{x_{a(n)}-a}{b-a},$$

$$\tfrac{y_1-a}{b-a} < \beta_1 < \tfrac{y_2-a}{b-a},$$
$$\tfrac{y_2-a}{b-a} < \beta_1 + \beta_2 < \tfrac{y_2-a}{b-a},$$
$$\ldots$$
$$\tfrac{y_{b(n)-1}-a}{b-a} < \beta_1 + \ldots + \beta_{b(n)-1} < \tfrac{y_{b(n)}-a}{b-a};$$

jeżeli n *jest parzyste to* $y_1 = a$, $y_{b(n)} = b$, $x_1 > a$, $x_{a(n)} < b$;
jeżeli n *jest neiparzyste to* $y_1 = a$, $y_{b(n)} < b$, $x_1 > a$, $x_{a(n)} = b$.

Niech $f\colon [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją* n*-wypukłą. Wtedy mamy następujące nierówności:*

i) *jeżeli* n *jest parzyste to*

$$\sum_{i=1}^{a(n)} \alpha_i f(x_i) \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leqslant \sum_{j=1}^{b(n)} \beta_j f(y_j), \tag{104}$$

ii) *jeżeli n jest nieparzyste to*

$$\sum_{j=1}^{b(n)} \beta_j f(y_j) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant \sum_{i=1}^{a(n)} \alpha_i f(x_i). \tag{105}$$

W następnym rozdziale, stosując Twierdzenia 73, 72 i 71 dowodzimy pewnych nierówności pomiędzy operatorami kwadraturowymi.

4. Nierówności pomiędzy operatorami kwadraturowymi.

W analizie numerycznej nierówności poniższego typu, które sa związane z operatorami kwadraturowymi, są nazywane extremalities. Wiele extremalities jest znanych w analizie numerycznej (patrz np. [**15**], [**26**], [**25**] i odsyłcze do literatury tam podane). Analitycy numeryczni dowodzą je korzystając z odpowiednich założeń o różniczkowalności. Jak udowodnił Wąsowicz w pracach [**219**], [**220**], [**221**], [**222**], dla funkcji wypukłych wyższych rzędów extremalities mogą być otrzymane bez założeń tego rodzaju, korzystając tylko z własności funkcji wypukłych wyższych rzędów. Własności typu podparciowego odgrywają tu dużą rolę. Jak pokazujemy w pracy [**R2**], pewne extremalities mogą być otrzymane używając probabilistycznej charakteryzacji. Otrzymane extremalities są znane, ale nasze metody dowodu przy użyciu wypukłych porządków stochastycznych wydają się być bardzo łatwe.

Dla funkcji $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ rozważamy sześć operatorów aproksymujących średnią wartość całkową

$$\mathcal{I}(f) := \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Są nimi

$$\begin{aligned}
C(f) &:= \tfrac{1}{3}\Big(f\big(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\big) + f(0) + f\big(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\big)\Big),\\
\mathcal{G}_2(f) &:= \tfrac{1}{2}\Big(f\big(-\tfrac{\sqrt{3}}{3}\big) + f\big(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\big)\Big),\\
\mathcal{G}_3(f) &:= \tfrac{4}{9}f(0) + \tfrac{5}{18}\Big(f\big(-\tfrac{\sqrt{15}}{5}\big) + f\big(\tfrac{\sqrt{15}}{5}\big)\Big),\\
\mathcal{L}_4(f) &:= \tfrac{1}{12}\big(f(-1) + f(1)\big) + \tfrac{5}{12}\Big(f\big(-\tfrac{\sqrt{5}}{5}\big) + f\big(\tfrac{\sqrt{5}}{5}\big)\Big),\\
\mathcal{L}_5(f) &:= \tfrac{16}{45}f(0) + \tfrac{1}{20}\big(f(-1) + f(1)\big) + \tfrac{49}{180}\Big(f\big(-\tfrac{\sqrt{21}}{7}\big) + f\big(\tfrac{\sqrt{21}}{7}\big)\Big),\\
S(f) &:= \tfrac{1}{6}\big(f(-1) + f(1)\big) + \tfrac{2}{3}f(0).
\end{aligned}$$

Operatory $\mathcal{G}_2$ i $\mathcal{G}_3$ są związane z regułą Gaussa-Legendra. Operatory $\mathcal{L}_4$ i $\mathcal{L}_5$ są związane z kwadraturą Lobatta. Operatory S i C dotycza reuł kwadraturowych Simpsona i Chebysheva, odpowiednio. Operator $\mathcal{I}$ oznacza średnią wartość całkową (patrz np. [**170**], [**225**], [**226**], [**227**], [**228**]).

Chcemy zbadać wszystkie możliwe nierówności pomiędzy tymi operatorami w klasie funkcji wypukłych wyższych rzędów.

Uwaga 74. ([**R2**], **Rem. 5.1**) Niech X_2, X_3, Y_4, Y_5, U, V i Z będą zmiennymi losowymi takimi, że

$$\begin{aligned}
\mu_{X_2} &= \frac{1}{2}\left(\delta_{-\frac{\sqrt{3}}{3}} + \delta_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right),\\
\mu_{X_3} &= \frac{4}{9}\delta_0 + \frac{5}{18}\left(\delta_{-\frac{\sqrt{15}}{5}} + \delta_{\frac{\sqrt{15}}{5}}\right),\\
\mu_{Y_4} &= \frac{1}{12}(\delta_{-1} + \delta_1) + \frac{5}{12}\left(\delta_{-\frac{\sqrt{5}}{5}} + \delta_{\frac{\sqrt{5}}{5}}\right),\\
\mu_{Y_5} &= \frac{16}{45}\delta_0 + \frac{1}{20}(\delta_{-1} + \delta_1) + \frac{49}{180}\left(\delta_{-\frac{\sqrt{21}}{7}} + \delta_{\frac{\sqrt{21}}{7}}\right),\\
\mu_U &= \frac{2}{3}\delta_0 + \frac{1}{6}(\delta_{-1} + \delta_1),\\
\mu_V &= \frac{1}{3}\left(\delta_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} + \delta_0 + \delta_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right),\\
\mu_Z(dx) &= \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(x)dx.
\end{aligned}$$

Mamy

$$\mathcal{G}_2(f) = E[f(X_2)], \quad \mathcal{G}_3(f) = E[f(X_3)],$$
$$\mathcal{L}_4(f) = E[f(Y_4)], \quad \mathcal{L}_5(f) = E[f(Y_5)],$$
$$S(f) = E[f(U)], \quad C(f) = E[f(V)], \quad \mathcal{I}(f) = E[f(Z)].$$

Wtedy, stosując Twierdzenia 73, 72 i 71 dowodzimy następujących nierówności pomiędzy operatorami kwadraturowymi.

TWIERDZENIE 75. ([**R2**], **Th. 5.1**) *Niech $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ będzie 3-wypukła. Wtedy*

$$\mathcal{G}_2(f) \leqslant \mathcal{I}(f) \leqslant S(f), \tag{106}$$

$$\mathcal{G}_2(f) \leqslant C(f) \leqslant T(f) \leqslant S(f), \tag{107}$$

gdzie $T \in \{\mathcal{G}_3, \mathcal{L}_5\}$.

TWIERDZENIE 76. ([**R2**], **Th. 5.2**) *Niech $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ będzie 5-wypukła. Wtedy*

$$\mathcal{G}_3(f) \leqslant \mathcal{I}(f) \leqslant \mathcal{L}_4(f), \tag{108}$$

$$\mathcal{G}_3(f) \leqslant \mathcal{L}_5(f) \leqslant \mathcal{L}_4(f). \tag{109}$$

ROZDZIAŁ 6

Funkcje delta-wypukłe wyższych rzędów

W pracy [**R2**] dajemy reprezentację całkowa funkcji delta-wypukłej f n-tego rzędu, w przypadku ogólnym, bez zadnych dodatkowych założeń o $f^{(n)}(x)$ (patrz Część 1). Nasza charakteryzacja jest konstruktywna. Dajemy jawne wzory dla n-spektralnej miary znakowanej odpowiadającej funkcji f w tej reprezentacji. Reprezentacja całkowa ta będzie dalej dalej stosowana w celu uzyskania charakteryzacji funkcji kontrolnych odpowiadających funkcji f, do zdefiniowania pewnego kanonicznego rozkładu f, oraz do pokazania istnienia i zbadania własności funkcji kontrolnych minimalnych dla f (co uogólnia wyniki Hartmana [**64**] dla funkcji wypukłych). Znajdujemy minimum i maksimum (w sensie zdefiniowanym w pracy) dwóch funkcji kontrolnych odpowiadających f . Podajemy również prostszy dowód twierdzenia Gera [**51**] delta-wypukłości funkcji klasy C^{n+1}. Twierdzenia o reprezentacji podane w Rozdziale 1 jest wykorzystane w dalszej części, do dalszego badania delta-wypukłości n-tego rzędu. W Części 2 definiujemy relację względnej delta-wypukłości n-teo rzędu (relację n-delta wypukłości), która jest uogólnieniem relacji n-wypukłości wprowadzonej w [**R6**]. Relacja ta indukuje częściowy porządek na pewnych klasach równoważności funkcji delta-wypukłych n-teo rzędu. Podajemy charakteryzację relacji delta-wypukłości n-teo rzędu w terminach minimalnych funkcji kontrolnych, w terminach n-spektralnych miar znakowanych, jak również pochodnych $n+1$-szego rzędu (które istnieją prawie wszędzie względem miary Lebesguea). Definiujemy i badamy pojęcie silnej delta-wypukłości n-tego rzędu, ktora jest uogólnieniem silnej n-wypukłości badanej w [**R6**] i [**52**]. Podajemy chrakteryzację silnej delta-wypukłości w ogólnym przypaku, bez żadnych dodatkowych założeń o różniczkowalności funkcji (to uogólnia wyniki w [**R6**] dotyczące silnej$n$-wypukłości.

W Części 3 badamy nierówności typu Hermita-Hadamarda-Fejéra dotyczące funkcji delta-wypukłych rzędu n. Dajemy probabilistyczną charakteryzację 1-delta wypukłości (tzn. zwykłej delta-wypukłości), która jest uogólnieniem znanej nierówności Jensena dotyczącej charakteryzacji probabilistycznej funkcji wypukłej. Wykorzystują tę probabilistyczną charakteryzację otrzymujemy pewne nierówności typu Jensena dla funkcji delta-wypukłej. Podajemy również rozszerzenie znanego kryterium dla weryfikacji wypukłego porządku stochastycznego s-tego rzędu danego przez Denuita, Lefèvra i Shakeda w [**39**], z wypukłych na delta-wypukłe funkcje. Nasze twierdzenie dostarcza użytecznych narzędzi do otrzymywania i weryfikacji wielu form nierówności typu Hermita-Hadamarda-Fejéra dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów. Wtedy, rozważając pewne szczególne przypadki zmiennych losowych pojawiających sie w naszym kryterium, otrzymujemy uogólnienie znanych wyników Dragomira, Pearca i Pečarića [**43**] dla funkcji delta-wypukłych, oraz wyników otrzymanych w [**R2**] dla funkcji wypukłych wyższych rzędów.

Ostatecznie, w Części 4, otrzymane wyniki stosujemy do otrzymania pewnych nierówności pomiędzy operatorami kwadraturowymi dla funkcji delta-wypukłych n-tego rzędu.

1. Reprezentacja całkowa

Przypomnijmy definicję funkcji delta-wypukłej n-tego rzędu.

DEFINICJA 77 ([**51**]). Funkcja $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ jest nazywana *delta-wypukłą n-tego rzędu*, gdy istnieje funkcja n-wypukła g taka, że dlawszystkich $x,y\in(a,b)$,

$$x\leqslant y \Rightarrow \left|\Delta^{n+1}_{\frac{y-x}{n+1}} f(x)\right| \leqslant \Delta^{n+1}_{\frac{y-x}{n+1}} g(x). \tag{110}$$

Każda funkcja g spełniająca (110) jest nazywana *funkcją kontrolną dla* f, albo, mówimy że f jest *funkcją delta-wypukłą n-tego rzędu* z funkcją kontrolną g, jak rownież mówimy że f jest *g-wypukle zdominowana n-tego rzędu* (krótko *delta-wypukła* albo *g-wypukle zdominowana* gdy $n=1$).

Nietrudno jest udowodnić następujący lemat (patrz [**51**]).

LEMAT 78. *Niech $g\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będzie n-wypukłą funkcją i niech $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją. Wtedy następujące warunki są są równoważne:*

(a) *f jest delta-wypukła n-tego rzędu z funkcją kontrolną g,*
(b) *gunkcje $g-f$ i $g+f$ są n-wypukłe na (a,b),*
(c) *istnieją dwie n-wypukłe funkcje $\varphi_1, \varphi_2\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ takie, że*

$$f = \varphi_1 - \varphi_2 \quad \text{and} \quad g = \varphi_1 + \varphi_2.$$

W następującym twierdzeniu dajemy reprezentację całkową funkcji delta-wypukłej f n-tego rzędu.Reprezentacja ta jest uogólnieniem wyników danych w [**172**] (dotyczących funkcji delta-wypukłych) na funkcje wypukłe wyższych rzędów.

TWIERDZENIE 79. ([**R1**], **Th. 2.1**) *Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją i niech $\xi \in (a,b)$. Wtedy f jest delta-wypukła n-tego rzędu wtedy i tylko wtedy gdy f ma reprezentację*

$$f(x) = \int_{(a,\xi)} (-1)^{n+1} \frac{[-(x-u)]_+^n}{n!} \tau_{(n)}(du) + \int_{[\xi,b)} \frac{(x-u)_+^n}{n!} \tau_{(n)}(du) + Q_\xi(x), \tag{111}$$

gdzie $\tau_{(n)}$ jest miarą znakowana na $\mathcal{B}((a,b))$ taką że $-\infty < \tau_{(n)}((c,d)) < \infty$ dla wszystkich $a < c < d < b$, i $Q_\xi \in \Pi_n$. Ponadto, miara znakowana $\tau_{(n)}$ jest jedyna, tzn. jeżeli ξ_1, $\xi_2 \in (a,b)$ i dwie trójki $(\xi_1, \tau_{(n),1}, Q_{\xi_1})$ i $(\xi_2, \tau_{(n),2}, Q_{\xi_2})$ odpowiadają funkcji f w reprezentacji (111), to $\tau_{(n)1} = \tau_{(n)2}$. Jeśli $f = \varphi_1 - \varphi_2$, gdzie $\varphi_1, \varphi_2\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ obie są n-wypukłe, to $\tau_{(n)} = \mu_{(n)1} - \mu_{(n)2}$, $\mu_{(n)1}(du) = d\varphi_1^{(n)}(u)$ i $\mu_{(n)2}(du) = d\varphi_2^{(n)}(u)$.

DEFINICJA 80. ([**R1**], **Def. 2.1**) Będziemy nazywać $\tau_{(n)}$ *n-spektralną znakowaną miarą* funkcji delta-wypukłej f n-tego rzędu.

UWAGA 81. ([**R1**], **Rem, 2.1**) Zauważmy, że jeżeli funkcja delta-wypukła f n-tego rzędu jest klasy C^{n+1} na (a,b) i $\tau_{(n)}$ jest miarą znakowaną, która pojawia sie w Twierdzeniu 79, to

$$\tau_{(n)}(du) = f^{(n+1)}(u)du.$$

W pracy [**R2**] (**Lem. 2.1**) pokazujemy, że zbiór funkcji n-wypukłych klasy C^{n+1} in (a,b) jest gęsty w zbiorze funkcji n-wypukłych na (a,b). Jako wniosek otrzymujemy, że zbiór funkcji delta-wypukłych n-tego rzędu klasy C^{n+1} na (a,b) jest gęsty w zbiorze wszystkich funkcji delta-wypukłych n-tego rzędu na (a,b) ([**R2**], **Cor. 2.1**).

Warto wspomnieć, że w pracy Hartmana (1959) [**64**] można znaleźć dyskusję o minimalnych funkcjach kontrolnych dla funkcji delta-wypukłej. My rozszerzamy wyniki Hartmana na funkcje delta-wypukłe wyższych rzędów.

Zauważmy, że jeżeli $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją delta-wypukłąn-tego rzędu postaci $f = \varphi_1 - \varphi_2$ z funkcją kontrolną $g = \varphi_1 + \varphi_2$, gdzie φ_1, φ_2 obie są n-wypukłe, to dla każdej n-wypukłej funkcji φ, funkcja f może być trywialnie zapisana jako $f = (\varphi_1 + \varphi) - (\varphi_2 + \varphi)$ z funkcją kontrolną $g_\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\varphi$. Ponieważ φ jest n-wypukła, $\Delta_h^{n+1}\varphi(x) \geqslant 0$ $(x \in (a,b))$. W konsekwencji, mamy

$$\left|\Delta_{\frac{y-x}{n+1}}^{n+1} f(x)\right| \leqslant \Delta_{\frac{y-x}{n+1}}^{n+1} g(x) \leqslant \Delta_{\frac{y-x}{n+1}}^{n+1} g_\varphi(x)$$

dla wszystkich $x, y \in (a,b)$, takich że $x < y$.

Ta obserwacja może sugerować następujące pytanie: czy dla danej funkcji delta-wypukłej f n-tego rzędu istnieje funkcja kontrolna g taka, że operator różnicowy $\Delta_{\frac{y-x}{n+1}}^{n+1} g(x)$ jest minimalny? Na to pytanie dajemy odpowiedź twierdzącą.

DEFINICJA 82. ([**R1**], **Def. 2.2**) Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcja delta-wypukłą n-tego rzędu. Niech f będzie postaci $f = \varphi_1^* - \varphi_2^*$, gdzie φ_1^*, φ_2^* obie są funkcjami n-wypukłymi. Mówimy, że φ_1^* and φ_2^* są *minimalnymi n-wypukłymi funkcjami* w reprezentacji funkcji f jako różnica dwóch funkcji n-wypukłych (krótko, minimalnymi n-wypukłymi funkcjami), jeśli dla każdych innych dwóch funkcji n-wypukłych φ_1 and φ_2 takich że $f = \varphi_1 - \varphi_2$, mamy, że funkcje $\varphi_1 - \varphi_1^*$ i $\varphi_2 - \varphi_2^*$ obie są n-wypukłe.

Mówimy, że funkcja kontrolna $g^*\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest *minimalnąfunkcja kontrolną* dla f, gdy

$$\left|\Delta_{\frac{y-x}{n+1}}^{n+1} f(x)\right| \leqslant \Delta_{\frac{y-x}{n+1}}^{n+1} g^*(x) \leqslant \Delta_{\frac{y-x}{n+1}}^{n+1} g(x),$$

dla każdej funkcji $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, która jest funkcją kontrolna dla f i dla wszystkich $x, y \in (a,b)$ takich, że $x < y$.

Uwaga 83. (**[R2], Th. 2.2**) Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją delta-wypukłą n-tego rzędu i niech g^* będzie minimalna funkcją kontrolna odpowiadającą f. Wtedy dla każdej innej funkcji kontrolnej g odpowiadającej funkcji f, funkcja $g - g^*$ jest n-wypukła.

Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcja delya-wypukłą n-tego rzędu. Powstaje naturalne pytanie kiedy istnieje minimalna funkcja kontrolna odpowiadająca f. Niech $(\xi, \tau_{(n)}, Q_\xi)$ $(\xi \in (a,b))$ będzie trójką odpowiadającą f w całkowej reprezentacji (111) (funkcji delta-wypukłej n-tego rzędu). Rozwazmy rozkład Hahna-Jordana miary znakowanej $\tau_{(n)}$

$$\tau_{(n)} = \tau_{(n)}^+ - \tau_{(n)}^-, \tag{112}$$

gdzie $\tau_{(n)}^+$ i $\tau_{(n)}^-$ są nieujemnymi miarami na $\mathcal{B}((a,b))$ (see **[21]**),które sa skoncentrowanw naq dwóch rozłącznych zbiorach P, $N \in \mathcal{B}((a,b))$ $(P \cup N = (a,b))$, odpowiednio. Miara $var\left(\tau_{(n)}\right) = \tau_{(n)}^+ + \tau_{(n)}^-$ jest nazywana *wariacją* miary znakowanej $\tau_{(n)}$.

W pracy **[R1]** dowodzimy, że dla każdej funkcji delta-wypukłej n-tego rzędu istnieje minimalna funkcja kontrolna.

Twierdzenie 84. (**[R1], Th. 2.3**) *Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją delta-wypukłą n-tego rzędu z trójką $(\xi, \tau_{(n)}, Q_\xi)$ $(\xi \in (a,b))$ w reprezentacji* (111). *Wtedy*

a) $f = \varphi_1^* - \varphi_2^*$,
b) φ_1^* *i* φ_2^* *są minimalnymi n-wypukłymi funkcjami,*
c) $g^* = \varphi_1^* + \varphi_2^*$ *jest minimalną funkcją kontrolną odpowiadającą f,*

gdzie $\varphi_1^*\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $\varphi_2^*\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ są funkcjami n-wypukłymi z trójkami $(\xi, \tau_{(n)}^+, Q_\xi)$ and $(\xi, \tau_{(n)}^-, 0)$, odpowiednio, w reprezentacji całkowej funkcji n-wypukłej.

W następnych trzech twierdzeniach dajemy chrakteryzację funkcji kontrolnych i minimalnych funkcji kontrolnych.

Twierdzenie 85. (**[R1], Th. 2.4**) *Niech $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją n-wypukłą z miarą $\mu_{(n)}$ w reprezentacji całkowej, i niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją delta-wypukłą n-tego rzędu z miara znakowaną $\tau_{(n)}$ w reprezentacji* (111). *Wtedy następujące zdania są równoważne:*

a) *f jest kontrolowana przez g,*
b) $\mu_{(n)} - \tau_{(n)} \geqslant 0$ *i* $\mu_{(n)} + \tau_{(n)} \geqslant 0$,
c) $\left|\tau_{(n)}\right| \leqslant \mu_{(n)}$,
d) $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant g^{(n+1)}(x)$ $(x \in (a,b))$ *gdy f i g obie są klasy C^{n+1} in (a,b).*

Twierdzenie 86. (**[R1], Th. 2.5**) *Niech $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją n-wypukłą z miarą n-spectralna $\mu_{(n)}$ w reprezentacji całkowej, i niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją delta-wypukłą n-tego rzędu ze znakowana miarą n-spektralną $\tau_{(n)}$ w reprezentacji* (111). *Wtedy następujące zdania są równoważne:*

a) *g jest minimalna funkcją kontrolną dla f,*
b) $var\left(\tau_{(n)}\right) = \mu_{(n)}$,
c) $\left|f^{(n+1)}(x)\right| = g^{(n+1)}(x)$ $(x \in (a,b))$ *gdy f i g obie sa klasy C^{n+1} in (a,b).*
d) *$g = g^*$ z dokładnością do wielomianu stopnia co najwyżej n, gdzie g^* jest minimalną funkcją kontrolną, którą wprowadziliśmy w Twierdzeniu 84.*

Wniosek 87. (**[R1], Cor. 2.2**) *Każde dwie minimalne funkcje kontrolne odpowiadające delta-wypukłej funkcji $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ n-tego rzędu różnią się o wielomian stopnia co najwyżej n.*

Twierdzenie 88. (**[R1], Th. 2.6**) *Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją delta-wypukłą n-tego rzędu i niech g będzie minimalną funkcją kontrolną. Wtedy*

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = g^{(n+1)}(x) \qquad dla\ x \in (a,b) \quad \lambda\ p.w. \tag{113}$$

Stosując twierdzenie o reprezentacji całkowej funkcji delta-wypukłej n-tego rzędu podajemy nowy (prostszy) dowód twierdzenia Gera dotyczący związku funkcji klasy C^{n+1} z funkcjami delta-wypukłymi.

Stwierdzenie 89 (**[51]**). *Każda funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ klasy C^{n+1} jest funkcją delta-wypukłą n-tego rzędu.*

Dowód. Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^{n+1}. Definiujemy $h(x) = f^{(n+1)}(x)$. Wtedy, biorąc funkcję F jako funkcję delta-wypukłą n-tego rzędu postaci danej przez (111) z pewnym $\xi \in (a,b)$, $Q_\xi \in \Pi_n$ i dla której $\tau_{(n)}(du) = h(u)du$, na podstawie Uwagi 81 mamy $F^{(n+1)}(x) = h(x)$ $(x \in (a,b))$. Ponieważ również $f^{(n+1)}(x) = h(x)$ $(x \in (a,b))$, otrzymujemy $f = F + p_n$, gdzie $p_n \in \Pi_n$. Wynika stąd, że f jest delta-wypukła n-tego rzędu, co było do udowodnienia.

□

2. Względna delta-wypukłość n-tego rzędu. Silna delta-wypukłość n-tego rzędu.

Przechodzimy do zdefiniowania relacji względnej delta-wypukłości wyższego rzędu.

Definicja 90. ([**R1**], **Def. 3.4**) Niech $f, h\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będa funkcjami delta-wypukłymi n-tego rzędu, z minimalnymi funkcjami kontrolnymi g_f^* and g_h^*, odpowiednio. Mówimy, że funkcja f jest *delta-wypukła n-tego rzędu względem h* (krócej n-delta-wypukła wzgledem h), gdy

$$\Delta^{n+1}_{\frac{y-x}{n+1}} g_f^*(x) \geqslant \Delta^{n+1}_{\frac{y-x}{n+1}} g_h^*(x)$$

dla wszystkich $x, y \in (a,b)$ such that $x < y$, i oznaczamy to przez $f \succeq_{dcn} h$.

Definicja 91. ([**R1**], **Def. 3.5**) Będziemy mówić, że które funkcje $f, h\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, które są delta-wypukłe n-tego rzędu (z minimalną funkcją kontrolną g_f^* i g_h^*, odpowiednio) są *modulo* M_{dcn}, albo że są tej samej *modulo* M_{dcn} *klasy*, gdy

$$\Delta^{n+1}_{\frac{y-x}{n+1}} g_f^*(x) = \Delta^{n+1}_{\frac{y-x}{n+1}} g_h^*(x)$$

dla wszystkich $x, y \in (a,b)$ such that $x < y$, i oznaczamy to przez $f = h(mod M_{dcn})$.

Relacja modulo M_{dcn} jest relacją równoważności i stąd definiuje klasy równoważności. Nietrudno pokazać, że relacja ta indukuje częściowy porządek.

Twierdzenie 92. ([**R1**], **Th. 3.1**) *Relacja n-delta-wypukłości indukuje częściowy porządek na klasach równoważności modulo M_{dcn} funkcji delta-wypukłych n-tego rzędu.*

Definicja 93. ([**R1**], **Def. 3.6**) Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją delta-wypukłą n-tego rzędu z n-spektralną miarą znakowaną $\tau_{(n)}$. Będziemy nazywać miarę $var\left(\tau_{(n)}\right)$ *miarą delta-wypukłości n-tego rzędu* funkcjin f (albo krócej *miarą n-delta-wypukłości*).

Twierdzenie 94. ([**R1**], **Th. 3.2**) *Niech $f, h\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będa funkcjami delta-wypukłymi n-tego rzędu z miarami n-delta-delta wypukłości $var\left(\tau^f_{(n)}\right)$ i $var\left(\tau^h_{(n)}\right)$, minimalnymi dunkcjami kontrolnymi g_f^* and g_h^*, miarami n-wypukłości $\mu^{g_f^*}_{(n)}$ i $\mu^{g_h^*}_{(n)}$ odpowiadającymi minimalnym funkcjom kontrolnym g_f^*, g_h^*,odpowiednio. Wtedy, nastepujące zdania są równoważne:*

a) $f \succeq_{dcn} h$,
b) $\Delta^{n+1}_{\frac{y-x}{n+1}} g_f^*(x) \geqslant \Delta^{n+1}_{\frac{y-x}{n+1}} g_h^*(x)$, *dla wszystkich x, y takich że $a < x < y < b$,*
c) $var\left(\tau^f_{(n)}\right) \geqslant var\left(\tau^h_{(n)}\right)$,
d) $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \geqslant \left|h^{(n+1)}(x)\right|$ $(x \in (a,b))$ *gdy f i h obie są klasy C^{n+1} in (a,b),*
e) $g_f^* \succeq_n g_h^*$,
f) $\mu^{g_f^*}_{(n)} \geqslant \mu^{g_h^*}_{(n)}$,
g) $g_f^{*(n+1)}(x) \geqslant g_h^{*(n+1)}(x)$ $(x \in (a,b))$ *gdy f i h obie są klasy C^{n+1} in (a,b).*

Przechodzimy do zdefiniowania silnej delta-wypukłości wyższych rzędów.

Definicja 95. ([**R1**], **Def. 3.8**) Niech $c > 0$ i niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją delta-wypukłą n-tego rzędu. Mówimy, że f jest *funkcją silnie delta-wypukłą n-tego rzędu z modułem c* gdy wszystkie funkcje kontrolne odpowiadające funkcji f są silnie n-wypukłe z modułem c.

Lemat 96. ([**R1**], **Lem. 3.1**) *Niech $c > 0$ i niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją delta-wypukłą n-tego rzędu. Jeżeli istnieje minimalna funkcja kontrolna g odpowiadająca funkcji f, taka że g jest silnie n-wypukła z modułem c, wtedy wszystkie funkcje kontrolne odpowiadające f są silnie n-wypukłe z modułem c.*

Twierdzenie 97. ([**R1**], **Th. 3.5**) *Niech $c > 0$. Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie delta-wypukła n-tego rzędu i niech g^* będzie minimalną funkcją kontrolną odpowiadającą f. Wtedy f jest silnie delta-wypukła n-tego rzędu z modułem c iwtedy i tylko wtedy gdy g^* jest silnie n-wypukła z modułem c.*

Z Twierdzeń 88, 97 i Lematu 96 otrzymujemy następującą charakteryzację silnej delta-wypukłości n-tego rzędu, która jest uogólnieniem silnej n-wypukłości.

Twierdzenie 98. ([**R1**], **Th. 3.6**) *Niech $c > 0$ i niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie delta-wypukła n-tego rzędy. Wtedy f jest silnie delta-wypukła n-tego rzędu z modułem c wtedy i tlko wtedy gdy*

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \geqslant c \qquad \text{dla } x \in (a,b) \quad \lambda \text{ p.w.} \tag{114}$$

Ze Stwierdzenia 89 i Twierdzenia 98 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 99. ([**R1**], **Cor. 3.3**) *Niech $c > 0$ i niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcja klasy C^{n+1} w (a,b). Wtedy f jest silnie delta-wypukła n-tego rzędu z modułem c wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \geqslant c$$

dla wszystkich $x \in (a,b)$.

Przykład 100. ([**R1**], **Ex. 3.1**) Niech $c > 0$. Dla $f(x) = -cx^2/2\chi_{(-\infty,0)}(x) + cx^2/2\chi_{[0,\infty)}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) ($\chi_B(x) = 1$ gdy $x \in B$ i $\chi_B(x) = 0$ gdy $x \notin B$, $B \subset \mathbb{R}$), mamy $\left|f''(x)\right| = c$ dla $x \neq 0$. Stąd, z Twierdzenia 98, biorąc pod uwagę, że f jest delta-wypukła otrzymujemy, że f jest silnie delta-wypukła z modułem c.

3. Nierówności typu Hermita-Hadamarda-Fejéra dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów. Nierówności pomiędzy operatorami kwadraturowymi.

W następującym twierdzeniu podajemy probabilistyczna charakteryzację delta-wypukłości.

Twierdzenie 101. ([**R1**], **Th. 4.1**) *Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją i $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Wtedy f jest g-wypukle zdomonowana (albo delta-wypukła z funkcja kontrolną g) wtedy i tylko wtedy gdy*

$$|\mathbb{E}f(X) - f(\mathbb{E}X)| \leqslant \mathbb{E}g(X) - g(\mathbb{E}X) \tag{115}$$

dla wszystkich zmiennych losowych X o wartościach w (a,b).

Rozpatrzmy teraz szczególne przypadki Twierdzenia 101. Dla ustalonych $t \in (0,1)$ i $x_1, x_2 \in (a,b)$ rozpatrzmy zmienną losową X taką, że $P(X = x_1) = t$ i $P(X = x_2) = 1 - t$. Wtedy z Twiedzenia 101, otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 102. ([**R1**], **Cor. 4.2**) *Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją i $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Wtedy, jeżeli f jest g-wypukle zdominowana, to*

$$|tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2)| \leqslant tg(x_1) + (1-t)g(x_2) - g(tx_1 + (1-t)x_2) \tag{116}$$

dla wszystkich $x_1, x_2 \in (a,b)$ i $t \in (0,1)$.

Uwaga 103. ([**R1**], **Rem. 4.1**) Nietrudno jest pokazać, że warunek (116) jest rownież wystarczającym, gwarantującym delta-wypukłośc funkcji f (z funkcją kontrolną g). Warto dodać, że w pracy [**43**], warunek ten jest użyty jako definicja (delta-wypukłości fz funkcją kontrolną g).

Następny wynik dotyczy nierówności typu Jensena dla funkcji delta-wypukłych

Wniosek 104. ([**R1**], **Cor. 4.2**) *Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją i niech $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Wtedy, jeżeli f jest g-wypukle zdominowana, to*

$$\left|\sum_{i=1}^n t_i f(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right)\right| \leqslant \sum_{i=1}^n t_i g(x_i) - g\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right),$$

dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n \in (a,b)$ i $t_1, \ldots, t_n > 0$ sumujących się do 1.

W pracy Dragomir i inn. (2002) [**43**] można znaleźć nierówności typu Hermita-Hadamarda dla funkcji g-wypukle zdominowanych.

Stwierdzenie 105 ([**43**]). *Niech* $g\colon I \to \mathbb{R}$ *będzie funkcja wypukłą* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją* g*-wypukle zdominowaną. Wtedy, dla wszystkich* $a, b \in I$ *z* $a < b$*,*

$$\left|\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b g(x)\,dx - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{117}$$

i

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b g(x)\,dx. \tag{118}$$

Chcemy dać uogólnienie nierówności (117) i (118) Dragomira i in. (2002).

Następujące twierdzenie dostarcza użytecznych narzędzi do badania nierówności typu Hermita-Hadamarda-Fejéra dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów.

Twierdzenie 106. ([**R1**], **Th. 4.3)** *Niech* $n \geqslant 1$*. Niech* $g\colon I \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją* n*-wypukłą i niech* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją, która jest* g*-wypukle zdominowana* n*-tego rzędu (albo delta-wypukła* n*-tego rzędu z funkcją kontrolną* g*). Niech* X *i* Y *będą dwiema zmiennymi losowymi o wartościach w* I *takimi, że* $\mathbb{E}(X^j - Y^j) = 0$*,* $j = 1, 2, \ldots, n$*,* $S^-(F_X - F_Y) = n$ *i ostatnia zmiana znaku* $F_X - F_Y$ *jest dodatnia. Wtedy*

$$|\mathbb{E}f(Y) - \mathbb{E}f(X)| \leqslant \mathbb{E}g(Y) - \mathbb{E}g(X). \tag{119}$$

Biorąc pod uwagę szczególne przypadki zmiennych losowych X, Y, z Twierdzenia 106, otrzymujemy ([**R1**], Th. 4.4, Th. 4.5) nierówności typu Hermita-Hadamarda-Fejéra dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów, które uogólniają wyniki Dragomira i in. (2002) [**43**]. Jako zastosowanie tych wyników dowodzimy pewne nierówności pomiędzy operatorami kwadraturowymi (dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów).

Twierdzenie 107. ([**R1**], **Th. 5.1)** *Niech* $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ *będzie* g*-wypukle zdominowana 3-rzędu. Wtedy*

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}(f) - \mathcal{G}_2(f)| &\leqslant \mathcal{I}(g) - \mathcal{G}_2(g),\\
|S(f) - \mathcal{I}(f)| &\leqslant S(g) - \mathcal{I}(g),\\
|C(f) - \mathcal{G}_2(f)| &\leqslant C(g) - \mathcal{G}_2(g),\\
|T(f) - C(f)| &\leqslant T(g) - C(g),\\
|S(f) - T(f| &\leqslant S(g) - T(g),
\end{aligned}$$

gdzie $T \in \{\mathcal{G}_3, \mathcal{L}_5\}$*.*

Twierdzenie 108. ([**R1**], **Th. 5.2)** *Niech* $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ *będzie* g*-wypukle zdominowana 5-tego rzędu. Wtedy*

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}(f) - \mathcal{G}_3(f)| &\leqslant \mathcal{I}(g) - \mathcal{G}_3(g),\\
|\mathcal{L}_4(f) - \mathcal{I}(f)| &\leqslant \mathcal{L}_4(g) - \mathcal{I}(g),\\
|\mathcal{L}_5(f) - \mathcal{G}_3(f)| &\leqslant \mathcal{L}_5(g) - \mathcal{G}_3(g),\\
|\mathcal{L}_4(f) - \mathcal{L}_5(f)| &\leqslant \mathcal{L}_4(g) - \mathcal{L}_5(g).
\end{aligned}$$

ROZDZIAŁ 7

Pewne względne wypukłości

Przypomnijmy probabilistyczną charakteryzację funkcji wypukłej. Funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy

$$f(EX) \leqslant Ef(X) \tag{120}$$

dla wszystkich całkowalnych zmiennych losowych X o wartościach w I (patrz [**21**]). Zauważmy, że dla funkcji odwracalnej f, (120) może być również wyrażona jako $EX \leqslant f^{-1}(Ef(X))$. Wyrażenie $f^{-1}(Ef(X))$ może być uważane jako uogólniona średnia [**76**], [**63**]. Pojęcie wypukłości zostało uogólnione przez B. Jessena in [**76**] do porównywania dwóch dwóch funkcji w terminach średnich przez nich zdefiniowanych (wypukłość porównawcza) Rosnąca funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest nazywana wypukłą względem innej rosnącej funkcji $g\colon I \to \mathbb{R}$ gdy $g^{-1}(Eg(X)) \leqslant f^{-1}(Ef(X))$. To może być zapisane jako $f \circ g^{-1}(Eg(X)) \leqslant Ef \circ g^{-1}(g(X))$, co pokazuje, że f jest wypukła względem g wtedy i tylko wtedy gdy $f \circ g^{-1}$ jest wypukła. Zauważmy, że powyższe sformułowanie użyte w [**63**], [**172**], [**158**], nie zakłada żeby f była odwracalna (patrz rownież [**32**], [**45**], [**17**], [**142**], [**143**], [**119**]). W kontekście funkcji C^1-rożniczkowalnych, f jest wypukła względem funkcji rosnącej g gdy $f'(x)/g'(x)$ jest niemalejąca; w kontekscie funkcji C^2-różniczkowalnych, f jest wypukła względem g wtedy i tylko wtedy gdy $f''(x)/f'(x) \geqslant g''(x)/g'(x)$ ([**32**]) (zakładając, że te ilorazy istnieja). Względna wypukłóść według tej definicji nie jest antysymetryczna i stąd nie definiuje częściowego porządku. Palmer w [**154**], [**155**] używa niezależnie wyprowadzonego sformułowania, które jest podobne, ale jest antysymetryczne i definiuje częściowy porzadek, bez zakładania odwracalności żadnej z funkcji będących w relacji wypukłości.

Definiując za Palmerem [**154**], [**155**] mówimy, że funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest wypukła względem innej funkcji wypukłej $g\colon I \to \mathbb{R}$, gdy istnieje funkcja wypukła ściśle rosnąca $h\colon g(I) \to \mathbb{R}$ taka, że $f = h(g)$, i oznaczamy to przez $f{\succ_{(1)}}g$. W kontekście funkcji C^2-różniczkowalnych, $f{\succ_{(1)}}g$ wtedy i tylko wtedy gdy $f''(x)/|f'(x)| \geqslant g''(x)/|g'(x)|$ $(x \in I)$, zakładając, że te ilorazy istnieja (patrz [**155**] Theorem 4).

W pracy [**143**] autorzy również rozważają względna wypukłość f względem g, według terminologii w [**143**] w skrócie $g \lhd f$, gdzie f, g sa funcjami o wartościach rzeczywistych zdefiniowanych na tym samym zbiorze A i g nie jest stałą funkcją. Gdy A jest przedziałem i g jest ciągła i ściśle rosnąca, warunek $g \lhd f$ jest równoważny wypukłości funkcji $f \circ g^{-1}$ (na przedziale $B = g(A)$). Inny pomysł wypukłości dwóch funkcji f i g można znaleźć w pracy [**R6**]. Mówimy, że f jest wypukła względem g gdy funkcja $f - g$ jest wypukła, i oznaczamy to przez $f{\succ_{(2)}}g$. W kontekście funkcji C^2-rożniczkowalnych, $f{\succ_{(2)}}g$ wtedy i tylko wtedy gdy $f''(x) \geqslant g''(x)$ $(x \in I)$. Zapisujemy to jako $f \in C(\succ_{(i)}, g)$ gdy $f{\succ_{(i)}}g$ $(i = 1, 2)$. Zbiór $C(\succ_{(2)}, cx^2)$ $(c > 0)$ pokrywa sie ze zbiorem funkcji silnie wypukłych (z modułem $c > 0$), wprowadzonym w [**164**] (patrz również [**172**], [**67**], [**163**]). Zauważe, że w pracy [**R6**] była badana relacja względnej n-wypukłości $\succeq_n$ dla funkcji n-wypukłych. Wtedy, relacja $\succ_{(2)}$ pokrywa sie z relacja n-wypukłości $\succeq_n$ dla $n = 1$. Wiele innych relacji wzglednej wypukłości było proponowanych. Wiele wyników mazna znaleźć w [**143**], [**158**], [**93**], [**10**], [**166**], [**92**], między innymi.

W pacy [**R3**] dajemy charakteryzację relacji wzglednych wypukłości $\succ_{(1)}$ i $\succ_{(2)}$ dwóch funkcji f i g, ktora uogólnia i uzupelnia wyniki podane przez Palmera [**154**], [**155**] i przeze mnie [**R6**]. Analizujemy rownież wzajemne zależności pomiędzy relacjami $\succ_{(1)}$ i $\succ_{(2)}$.

W Części 1 podajemy charakteryzację tych relacji wypukłości i zależności pomiędzy nimi, w terminach prawostronnych pochodnych jak rowniez pochodnych dystrybucyjnych, bez żadnych dodatkowych założen o rózniczkowalności funkcji f and g.

W Części 2 wyprowadzamy probabilistyczną charakteryzację tych relacji względnej wypukłości w terminach Jensen gap.

W Części 3 definiujemy i badamy silną wypukłość względem relacji $\succ_{(i)}$ $(i = 1, 2)$. Wtedy zwykła silna wypukłosc może być uważana jako silna wypukłość względem relacji $\succ_{(2)}$. Ta część zawiera również probabalistyczną charakteryzację silnej wypukłości względem relacji $\succ_{(1)}$, co uzupełnia charakteryzację silnej wypukłości daną w [**P21**]. Używając tei probabilistycznej charakteryzacji, wyprowadzamy nierówności typu Jensena dla funkcji silnie wypukłych względem $\succ_{(1)}$, analogiczne do wyników otrzymanych w [**P21**], [**125**], dotyczących zwykłych silnie wypukłych funkcji.

Dodatkowo, ilustrując działanie naszych twierdzeń, wprowadzamy wiele interesujących przykładów i kontrprzykładów funkcji.

1. Kryteria różniczkowe

Jak zwykle, przez f' oznaczamy pochodna dystrybucyjną, pochodna punktowa przez $f'(x)$, pochodna dystrybucyjna drugiego rzędu przez f'', i pochodna punktowa drugiego rzędu przez $f''(x)$ (patrz [**189**], [**195**]).

Przypomnijmy, że funkcje wypukłe spełniaja wiele własności „gładkości" (patrz [**96**], [**172**]). Wymienimy niektóre z własności funkcji wypukłych.

Stwierdzenie 109. ([**R3**], **prop. 2.1**) *Funkcja wypukła f zdefiniowana na I jest ciągła i ma obie pochodne prawo i lewo stronną, $f'_R(x)$ i $f'_L(x)$, odpowiednio, w każdym punkcie z I.*

Stwierdzenie 110. ([**R3**], **prop. 2.25**) *Funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy pochodna prawostronna $f'_R(x)$ (lub lewostronna $f'_L(x)$) istnieje i jest niemalejąca na I.*

Stwierdzenie 111. ([**R3**], **prop. 2.3**) *Funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy pochodna prawostronna$f'_R(x)$ (lub left derivative $f'_L(x)$) istnieje i $f'' \geqslant 0$.*

Podpochodną funkcji wypukłej $f\colon I \to \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in I$ jest liczba rzeczywista c taka, że $f(x) - f(x_0) \geqslant c(x - x_0)$, dla wszystkich $x \in I$. Zbiór wszystkich podpochodnych jest nazywany *subdifferencjałem* funkcji f w x_0 i jest oznaczany przez $\partial f(x_0)$. Oczywiście mamy

$$\partial f(x_0) = [f'_L(x_0), f'_R(x_0)]. \tag{121}$$

Stwierdzenie 112. ([**R3**], **prop. 2.4**) *Funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja $k\colon I \to \mathbb{R}$, taka, że dla każdego $x, y \in I$*

$$f(y) \geqslant f(x) + k(x)(y - x). \tag{122}$$

Ponadto, $k(x)$ jest funkcja niemalejącą i $k(x) \in \partial f(x)$, dla każdego $x \in I$.

Na podstawie (121), jako $k(x)$ może być wzięta $f'_R(x)$ (lub $f'_L(x)$).

Wniosek 113. ([**R3**], **Cor. 2.5**) *Funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy*

$$f(y) \geqslant f(x) + f'_R(x)(y - x), \tag{123}$$

dla wszystkich $x, y \in I$.

Przypomnijmy definicję relacji względnej wypukłości $\succ_{(1)}$. Definiując za Palmerem [**154**], [**155**], mówimy że funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest wypukła względem innej funkcji wypukłej $g\colon I \to \mathbb{R}$ gdy istnieje ściśle rosnąca funkcja wypukła $h\colon g(I) \to \mathbb{R}$ taka, że $f = h(g)$ (oznaczamy, $f{\succ_{(1)}}g$). Mówimy, że f wklęsła względem g (w sensie Palmera [**154**], [**155**]) gdy g jest wypukła względem f, i oznaczamy to przez $f{\prec_{(1)}}g$. To jest natychmiastowe, że f jest wklęsła względem g wtedy i tylko wtedy istnieje funkcja wklęsła ściśle rosnąca $h\colon f(I) \to \mathbb{R}$ taka, że $f = h(g)$.

Ponieważ $f = h(g)$ z h ściśle rosnącą, funkcje f i g muszą być rosnące i malejące na tych samych przedziałach. Będziemy mówić, że takie funkcje są izotoniczne, albo że należą do tej samej izotonicznej klasy.

Następujące stwierdzenie (patrz Theorem 2 w [**155**]) daje rownoważne kryterium które jest użyteczne w dowodzeniu własności względnej wypukłości bez odnoszenia się do funkcji h.

Stwierdzenie 114. ([**R3**], **Prop. 2.6**) *Niech $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami. Wtedy $f{\succ_{(1)}}g$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja $\lambda\colon I \to [0, \infty]$ taka, że dla każdego $x, y \in I$,*

$$f(y) - f(x) \geqslant \lambda(x)(g(y) - g(x)). \tag{124}$$

Ponadto, jeżeli f i g są różniczkowalne, to

$$\lambda(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{125}$$

dla wszystkich $x \in I$.

Następujące twierdzenie ([**R3**], **Th. 2.7**) uzupełnia Stwierdzenie114.

TWIERDZENIE 115. ([**R3**], **Th. 2.7**) *Niech $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami. Wtedy $f \succ_{(1)} g$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja $\lambda\colon I \to [0,\infty)$ taka, że*

$$\begin{array}{ll} a) & \lambda(x) \neq 0 \text{ dla kazdego } x \in I \text{ z } g(x) \in int(g(I)), \\ b) & f(y) - f(x) \geqslant \lambda(x)(g(y) - g(x)) \text{ dla każdego } x, y \in I. \end{array} \tag{126}$$

Ponadto,

$$\lambda(x) \in \partial h(g(x)), \tag{127}$$

dla każdego $x \in I$, gdzie h jest wypukłą ściśle rosnącą funkcją taką, że $f = h(g)$.

Niech $I = (a, b)$. Niech $f \succ_{(1)} g$, gdzie $f = h(g)$ z funkcją wypukłą ściśle rosnącą h. Niech λ będzie funkcja daną w Twierdzeniu 115. N apodstawie (127) $\lambda(x) \in \partial h(g(x))$. Oczywiście$h'_R(g(x)), h'_L(g(x)) \in \partial h(g(x))$. Ponieważ g jest wypukła, istnieje $\xi \in [a, b]$ takie, że g jest malejąca na (a, ξ) i rosnąca na (ξ, b). Wtedy

$$\begin{array}{rcl} f'_R(x) & = & h'_L(g(x))g'_R(x) \text{ dla } x \in (a, \xi), \\ f'_R(x) & = & h'_R(g(x))g'_R(x) \text{ dla } x \in [\xi, b). \end{array} \tag{128}$$

Poniaważ h jest wypukła ściśle rosnąca, $h'_L(g(x)) \neq 0$ and $h'_R(g(x)) \neq 0$, dla każdego $x \in I$ z $g(x) \in int(g(I))$.

W konsekwencji, $f'_R(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $g'_R(x) = 0$, gdy $g(x) \in int(g(I))$. Oczywiście dla funkcji φ danej wzorem

$$\varphi(g(x)) = h'_L(g(x))\chi_{(a,\xi)}(x) + h'_R(g(x))\chi_{[\xi,b)}(x), \tag{129}$$

mamy $\varphi(g(y)) \in \partial h(g(x))$ ($\chi_B(x) = 1$ gdy $x \in B$ and $\chi_B(x) = 0$ gdy $x \notin B$, $B \subset \mathbb{R}$). Na podstawie (128), mamy

$$f'_R(x) = \varphi(g(x)) \cdot g'_R(x), \text{ dla } x \in I, \tag{130}$$

w konsekwencji

$$\varphi(g(x)) = \frac{f'_R(x)}{g'_R(x)}, \text{ if } g'_R(x) \neq 0. \tag{131}$$

Podobnie można udowodnić, że jako $\lambda(x)$ może być brana $\lambda(x) = \frac{f'_L(x)}{g'_L(x)}$, if $g'_L(x) \neq 0$.

WNIOSEK 116. ([**R3**], **Rem. 2.8**) *Jako funkcja $\lambda(x)$ opisana w Twierdzeniu 115 może być wzięta*

$$\lambda(x) = \frac{f'_R(x)}{g'_R(x)}, \tag{132}$$

dla każdego$x \in I$ dla których $g'_R(x) \neq 0$ (albo $\lambda(x) = \frac{f'_L(x)}{g'_L(x)}$, gdy $g'_L(x) \neq 0$).

Jeżeli f i g są dwukrotnie różniczkowalne to dla $f \succ_{(1)} g$ może być wyprowadzone następujące kryterium (patrz [**155**]).

STWIERDZENIE 117. ([**R3**], **Prop. 2.9**) *Jeżeli f i g są dwukrotnie różniczkowalne na (a, b), to*

$$f \succ_{(1)} g \text{ wtedy i tylko wtedy gdy } \frac{f''(x)}{|f'(x)|} \geqslant \frac{g''(x)}{|g'(x)|}. \tag{133}$$

W następującym twierdzeniu podajemy kryterium dla $f \succ_{(1)} g$ w terminach pochodnej dystrybucyjnej drugiego rzędu, bez dodatkowych założeń o różniczkowalności f i g.

TWIERDZENIE 118. ([**R3**], **Th. 2.10**) *Niech $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami wypukłymi. Wtedy $f \succ_{(1)} g$ wtedy i tylko wtedy gdy następujące warunki są spełnione:*

(i) *istnieje funkcja $h\colon g(I) \to \mathbb{R}$ taka, że $f = h(g)$,*
(ii) *$\frac{f'_R(x)}{g'_R(x)} > 0$, dla każdego $x \in I$ takiego, że $g'_R(x) \neq 0$,*
(iii) *$f''(x) \geqslant \frac{f'_R(x)}{g'_R(x)} g''(x)$, gdy $g'_R(x) \neq 0$, gdzie $f''(x), g''(x)$ oznacza tutaj pochodną dystrybucyjną drugiego rzędu.*

W następujących kontrprzykładach pokazujemy, że wszystkie warunki (i), (ii) i (iii) wymienione w Twierdzeniu 118 są konieczne.

PRZYKŁAD 119. ([**R3**], **Ex. 2.11**)

(a) Dla $f(x) = x^2\chi_{(-\infty,0)}(x) + 2x^2\chi_{[0,\infty)}(x)$ i $g(x) = x^2$, warunki (ii) i (iii) sa spełnione, ale nie istnieje funkcja $h\colon g(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, taka, że $f = h(g)$, w konsekwencji $f \succ_{(1)}$ nie jest spełnione. Faktycznie,

$$\begin{aligned} \frac{f'_R(x)}{g'_R(x)} &= \chi_{(-\infty,0)}(x) + 2\chi_{[0,\infty)}(x) > 0 \quad (x \in \mathbb{R}),\\ f''_R(x) &= \frac{f'_R(x)}{g'_R(x)} g''_R(x) = 2\chi_{(-\infty,0)}(x) + 4\chi_{[0,\infty)}(x). \end{aligned}$$

Przypuśćmy, przez zaprzeczenie, że istnieje funkcja $h\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, taka, że $f = h(g)$. Wtedy $h(4) = h(g(-2)) = f(-2) = 4$ i $h(4) = h(g(2)) = f(2) = 8$, co jest sprzecznością.

(b) Dla

$$g(x) = -(2x+1)\chi_{(-\infty,-1)}(x) - x\chi_{[-1,1]}(x) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\chi_{(1,\infty)}(x), \tag{134}$$

$$h(x) = |x|, \tag{135}$$

$$f(x) = -(2x+1)\chi_{(-\infty,-1)}(x) - x\chi_{[-1,0)}(x) + x\chi_{[0,1)}(x) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\chi_{[1,\infty)}(x), \tag{136}$$

nie jest trudno sprawdzić, że warunki (i) and (iii) są spełnione, a warunek (ii) nie jest spełniony, i f nie jest wypukła.

(c) Dla $g(x) = x^2$, $h(x) = x\chi_{(-\infty,1]}(x) + \chi_{(1,\infty)}(x)$, $f(x) = \min(x^2, 1)$ obserwujemy, że (i) oraz (ii) są spełnione, (iii) nie zachodzi oraz f nie jest wypukła.

Jeżeli g jest wypukła i monotoniczna oraz h jest wypukła i nie jest mnnotoniczna, to funkcja $f = h(g)$ może być wypukła jak również może nie być wypukła, jak pokazuje następujący przykład.

Przykład 120. ([**R3**], **Ex. 2.12**) Dla funkcji g, h, f danych wzorami (134), (135) i (136), odpowiednio, i

$$\begin{aligned} h_1(x) &= -(3x+2)\chi_{(-\infty,-1)}(x) - x\chi_{[-1,0]}(x) + x\chi_{(0,\infty)}(x), \qquad (137)\\ f_1(x) &= -(2x+1)\chi_{(-\infty,-1)}(x) - x\chi_{[-1,0]}(x) + x\chi_{[0,1)}(x) + \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)\chi_{[1,\infty)}(x), \end{aligned}$$

obserwujemy, że g jest malejąca, obie funkcje h_1 i h są wypukłe i nie są monotoniczne na $\mathbb{R}$, $f_1 = h_1(g)$ jest wypukła, natomiast $f = h(g)$ nie jest wypukła.

Na podstawie dowodu Twierdzenia 118, można pokazać następujący wniosek.

Wniosek 121. ([**R3**], **Cor. 2.13**) *Niech $g\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą i niech $h\colon g(I) \to \mathbb{R}$ będzie wypukła i rosnąca. Wtedy funkcja $f = h(g)$ jest wypukła.*

W następującym przykładzie pokazujemy, że $f = h(g)$ może być wypukła, gdy h nie jest ściśle rosnąca.

Przykład 122. ([**R3**], **Ex. 2.14**) Dla $g(x) = (x^2 - 1)\chi_{(0,\infty)}(x) - \chi_{(-\infty,0)}(x)$, $h(x) = x_+$, obserwujemy, żr g jest wypukła, h jest wypukła i h nie jest ściśle rosnąca na $g(\mathbb{R}) = [-1,\infty)$, oraz $f(x) = h(g(x)) = (x^2-1)\chi_{(1,\infty)}(x)$ jest wypukła.

Przypomnijmy, że funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest nazywana *quasi-wypukłą* gdy

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant \max(f(x), f(y)), \tag{138}$$

dla wszystkich $x, y \in I$, $t \in [0,1]$. Mówimy, że f jest *quasi-wklęsła* jeśli nierówność (138) jest odwrócona ([**143**]). Funkcja f jest quasi-afiniczna jeśli jest quasi-wypukła i quasi-wklęsła. Wiadomo, że f jest quasi-afiniczna wtedy i tylko wtedy gdy jest monotoniczna. Przechodzimy teraz do rozważenia $f = h(g)$, bez zakładania wypukłości funkcji h.

Lemat 123. ([**R3**], **Lem. 2.15**) *Niech $g\colon I \to \mathbb{R}$ bedzie funkcja wypukłą i niech $h\colon g(I) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą. Wtedy $f = h(g)$ jest funkcją quasi-wypukłą.*

Analogicznie do Lematu 123, może być udowodniony następujący lemat.

Lemat 124. ([**R3**], **Lem. 2.16**) *Niech $g\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą i niech $h\colon g(I) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją malejącą. Wtedy $f = h(g)$ jest funkcją quasi-wklęsłą.*

W następnym lemacie rozważamy przypadek gdy obie funkcje g i h nie są monotoniczne.

Lemat 125. (**[R3], Lem. 2.17**) *Niech $g\colon I\to\mathbb{R}$ i $h\colon g(I)\to\mathbb{R}$ będą funkcjami wypukłymi, które nie są monotoniczne na I i $g(I)$, odpowiednio. Wtedy funkcja $f=h(g)$ nie jest wypukła.*

Przypomnijmy definicję względnej wypukłości $\succ_{(2)}$.

Dla danych dwóch funkcji wypukłych $f,g\colon I\to\mathbb{R}$, mówimy, że f jest wypukła względem g (w sensie **[R6]**, w skrócie, $f\succ_{(2)}g$), gdy $f-g$ jest wypukła.

Stwierdzenia 111 i 112 pozwalaja nam otrzymać wiele charakteryzacji względnej wypukłości $\succ_{(2)}$ (**[R3], Prop. 2.18**).

Uwaga 126. (**[R3], Rem. 2.19**) Niech $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ bedą dwiema funkcjami wypukłymi ($I=(a,b)$). Niech $f=h(g)$, gdzie $h\colon g(I)\to\mathbb{R}$ jest wypukła i ściśle rosnąca. Bez straty ogólności możemy założyć, że g jest malejąca na (a,ξ) i rosnąca na (ξ,b) ($a<\xi<b$). Wtedy mamy

$$f'_R(x)=h'_L(g(x))g'_R(x)\chi_{(a,\xi)}(x)+h'_R(g(x))g'_R(x)\chi_{[\xi,b)}(x), \tag{139}$$

dla wszystkich $x\in I$. Ponieważ h jest ściśle rosnąca na $g(I)$, $h'_L(g(x))$ i $h'_R(g(x))$ są obie dodatnie gdy $g(x)\in int(g(I))$. Stąd, na podstawie (139), funkcje $f'_R(x)$ i $g'_R(x)$ sa synchroniczne na zbiorze $A=g^{-1}(int(g(I)))$ (w takim sensie, że $(f'_R(y)-f'_R(x))(g'_R(y)-g'_R(x))\geqslant 0$ dla wszystkich $x,y\in A$). To implikuje, że funkcje f i g są izotoniczne na A (w takim sensie, że f i g musza być rosnące i malejące na tych samych przedziałach).

W następującym przykładzie pokazujemy, że istnieją funkcje f i g, dla których tylko jedna z relacji $f\succ_{(1)}g$ i $f\succ_{(2)}g$ zachodzi.

Uwaga 127. (**[R3], Ex. 2.20**)

a) Dla $g(x)=x^2$ i $f(x)=x^4$ ($x\in\mathbb{R}$), obserwujemy, że relacja $f\succ_{(1)}g$ zachodzi, a relacja $f\succ_{(2)}g$ niezachodzi. Faktycznie, $f=h(g)$, gdzie $h(x)=x^2$ ($x\geqslant 0$) jest ściśle rosnąca na $[0,\infty)$, i funkcja $f(x)-g(x)=x^4-x^2$ nie jest wypukła.
b) Dla $f(x)=x^2$ i $g(x)=(x-1)^2$, obserwujemy, że $f\succ_{(2)}g$ i relacja $f\succ_{(1)}g$ nie zachodzi. Faktycznie, funkcja $f(x)-g(x)=2x-1$ jest wypukła, stąd $f\succ_{(2)}g$. Poniewaz funkcje f i g nie są izotoniczne na $(0,\infty)$, na podstawie Uwagi 126, relacja $f\succ_{(1)}g$ nie zachodzi.

Jeżeli $f\succ_{(1)}g$, to mogą być wyprowadzone proste kryteria dla $f\succ_{(2)}g$.

Twierdzenie 128. (**[R3], Th. 2.21**) *Niech $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ będa funkcjami wypukłymi, takimi że $f\succ_{(1)}g$, i nie ma takich $a,b\in\mathbb{R}$ dla których*

$$f(x)-g(x)=ax+b \quad (x\in\mathbb{R}). \tag{140}$$

(i) *Jeżeli dla każdego $x\in I$ takiego że $g_R(x)\neq 0$, spełniony jest warunek*

$$\frac{f'_R(x)}{g'_R(x)}\geqslant 1, \tag{141}$$

to $f\succ_{(2)}g$.

(ii) *Załóżmy, żet g nie jest monotoniczna na I. Wtedy $f\succ_{(2)}g$, wtedy i tylko wtedy gdy* (141) *zachodzi (dla każdego $x\in I$ dla którego $g'_R(x)\neq 0$).*

Uwaga 129. (**[R3], Rem. 2.22**) Na podstawie dowodu Twierdzenia 128 można pokazać, że warunek (141) jest równoważny warunkowi

$$h'_R(g(x))\geqslant 1 \tag{142}$$

(albo $h'_L(g(x))\geqslant 1$), dla każdego $x\in I$.

Następujący przykład pokazuje, że jeżeli g jest monotoniczna, to warunek (141) nie jest konieczny.

Przykład 130. (**[R3], Ex. 2.23**) Dla $g(x)$ i $h_1(x)$ danych jako (134) i(137), odpowiednio, $h(x)=h_1(x)+3x$ i $f(x)=h(g(x))$, nie jest trudno sprawdzić, że (141) nie jest spełniony, g jest wypukła i malejąca, i obie relacje $f\succ_{(1)}g$ and $f\succ_{(2)}g$ zachodzą.

Twierdzenie 131. (**[R3], Th. 2.24**) *Niech $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ będą funkcjami wypukłymi takimi, że $f\succ_{(2)}g$. Jeżeli istnieje funkcja $h\colon g(I)\to\mathbb{R}$ taka, że $f=h(g)$ i*

$$0<\frac{f'_R(x)}{g'_R(x)}\leqslant 1, \tag{143}$$

dla każdego $x\in g^{-1}(intg(I))$, to $f\succ_{(1)}g$.

Następujący przykład pokazuje, że warunek (143) nie jest konieczny.

PRZYKŁAD 132. ([**R3**], **Ex. 2.25**) Dla $g(x) = x^2$, $f(x) = 3x^2$, obserwujemy, że $f(x) - g(x) = 2x^2$ jest wypukła, $f = h(g)$ z $h(x) = 3x$, i $\frac{f'_R(x)}{g'_R(x)} = 3$. Stąd, chociaż warunek(143) nie jest spełniony, obie relacje $f \succ_{(1)} g$ i $f \succ_{(2)}$ zachodzą.

W następującym przykładzie warunek (143) jest spełniony.

PRZYKŁAD 133. ([**R3**], **Ex. 2.26**) Dla $g(x) = x$, $f(x) = h(x) = \frac{1}{2}x\chi_{(-infty,0]}(x) + x\chi_{(0,\infty)}(x)$, obserwujemy, że (143) jest spełniony i obie relacje $f \succ_{(1)} g$ and $f \succ_{(2)} g$ zachodzą.

2. Charakteryzacja probabilistyczna

Zauważmy, że probabilistyczna charakteryzacja funkcji wypukłych (patrz (120))może być zapisana w następującej postaci.

STWIERDZENIE 134. *Funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy*

$$Ef(X) - f(EX) \geqslant 0. \tag{144}$$

dla wszystkich zmiennych losowych X o wartościach w I (o skończonych wartościach oczekiwanych).

Lewa strona nierówności (144) równa sie tzw. *Jensen gapowi* funkcji f. Stąd, nierówność (144) oznacza, że funkcja wypukła jest funkcją, dla której Jensen gap jest nieujemny.

Z definicji, $f \succ_{(2)} g$ wtedy i tylko wtedy gdy $f - g$ jest wypukła. Z nierówności (144) otrzymujemy, że $f \succ_{(2)} g$ wtedy i tylko wtedy gdy $E[f(X) - g(X)] - [f(EX) - g(EX)] \geqslant 0$, co daje probabilistyczną charakteryzację względnej wypukłości $\succ_{(2)}$.

STWIERDZENIE 135. ([**R3**], **Prop. 3.2**) *Niech $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami wypukłymi. Wtedy $f \succ_{(2)} g$ wtedy i tylko wtedy gdy*

$$Ef(X) - f(EX) \geqslant Eg(X) - g(EX), \tag{145}$$

dla wszystkich zmiennych losowych X o wartościach w I.

Nierównośc (145) oznacza, że Jensen gap funkcji f jest większy lub równy niż Jensen gap funkcji g.

W następującym twierdzeniu podajemy probabilistyczną charakteryzację względnej wypukłości $\succ_{(1)}$.

TWIERDZENIE 136. ([**R3**], **Th. 3.3**) *Niech $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami wypukłymi, takimi że $f \succ_{(1)} g$. Wtedy istnieje funkcja $\lambda\colon I \to [0, \infty)$ taka, że*

$$Ef(X) - f(EX) \geqslant \lambda(EX)(Eg(X) - g(EX)), \tag{146}$$

dla wszystkich zmiennych losowych X o wartościach w I.

Nastepujące kontrprzykłady pokazują, że warunek (146) nie jest wystarczający.

PRZYKŁAD 137. ([**R3**], **Ex. 3.4**)

a) Niech f i g będą takie jak w Przykładzie 122, obserwujemy, że obie funkcje f i g są wypukłe, oraz nie istnieje funkcja h, taka żeby $f = h(g)$ i nierówność (146) byłaby spełniona . Faktycznie, ponieważ funkcja $f(x) - g(x) = x_+^2$ jest wypukła, ze Stwierdzenia 134, otrzymujemy $Ef(X) - f(EX) \geqslant Eg(x) - g(EX)$, dla wszystkich zmiennych losowych X . Stąd, warunek (146) zachodzi biorąc $\lambda \equiv 1$.
b) Rozważmy funkcje g, f_1, h_1 dane w Przykładzie 120. Niech $f = f_1$, $h = h_1$. Obserwujemy, że f i g są wypukłe, h jest wypukła i nie jest rosnąca, $f = h(g)$ i warunek (146) jest spełniony. Faktycznie, $g'' = \delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$, $f'' = \delta_{-1} + \frac{3}{2}\delta_1$, mamy $g'' \leqslant f''$. Wtedy, ze Stwierdzenia 134, otrzymujemy że $Ef(X) - f(EX) \geqslant Eg(X) - g(EX)$, dla wszystkich zmiennych losowych X. Stąd, (146) zachodzi z $\lambda \equiv 1$.
c) Dla $g(x) = \frac{1}{4}x\chi_{(-\infty,0]}(x) + 4x\chi_{(0,\infty)}(x)$, $h(x) = x\chi_{(-\infty,0)}(x) + \frac{63}{80}x\chi_{[0,\infty)}(x)$, obserwujemy, że g jest wypukła, h jest rosnąca i nie jest wypukła na $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f(x) = h(g(x)) = \frac{1}{4}x\chi_{(-\infty,0]}(x) + \frac{63}{20}x\chi_{(0,\infty)}(x)$ jest wypukła i warunek (146) jest spełniony. Faktycznie, ponieważ $f(x) - \frac{1}{2}g(x) = \frac{1}{8}\chi_{(-\infty,0]}(x) + \frac{23}{20}x\chi_{(0,\infty)}(x)$, mamy że $f - \frac{1}{2}g$ jest wypukła. Niech X będzie rzeczywistz zmienną losową. Ze Stwierdzenia 134, otrzymujemy, że $E[f(X) - \frac{1}{2}g(X)] - [f(EX) - \frac{1}{2}g(EX)] \geqslant 0$, co implikuje $Ef(X) - f(EX) \geqslant \frac{1}{2}[Eg(X) - g(EX)]$. Syąd, nierówność (146) zachodzi z $\lambda \equiv \frac{1}{2}$.

Ponieważ, na podstawie Uwagi 116, jako $\lambda(x)$ można wziąć $\lambda(x) = \frac{f'_R(x)}{g'_R(x)}$, otrzymujemy następującą charakteryzację.

Twierdzenie 138. ([**R3**], **Th. 3.5**) *Niech $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami wypukłymi, takimi że $f \succ_{(1)} g$. Wtedy*

$$[Ef(X) - f(EX)] \geqslant \frac{f'_R(EX)}{g'_R(EX)}[Eg(X) - g(EX)], \tag{147}$$

dla wszystkich zmiennych losowych X o wartościach w I (o skończonych wartościach oczekiwanych), takich że $g'_R(EX) \neq 0$.

Uwaga 139. ([**R3**], **Rem. 3.6**) Zauważmy, że warunek, that the condition (147) może być przepisany w postaci

$$\frac{1}{|f'_R(EX)|}[Ef(X) - f(EX)] \geqslant \frac{1}{|g'_R(EX)|}[Eg(X) - g(EX)], \tag{148}$$

dla wszystkich zmiennych losowych X o wartościach w I (o skończonych wartościach oczekiwanych), takich że $g'_R(EX) \neq 0$ and $f'_R(EX) \neq 0$.

Rozpatrzy teraz szczególne przypadki w Twierdzeniu 136. Dla ustalonych $t \in (0,1)$ i $x_1, x_2 \in I$, rozpatrzmy zmienną losową X, taką że $P(X = x_1) = t$ i $P(X = x_2) = 1 - t$. Wtedy z Twierdzenia 136 otrzymujemy nastepujący wniosek.

Wniosek 140. ([**R3**], **Cor. 3.7**) *Niech $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ beda funkacjami wypukłymi, takimi że $f \succ_{(1)} g$. Wtedy istnieje funkcja $\lambda\colon I \to [0, \infty)$ taka że*

(149)

$$\lambda(tx_1 + (1-t)x_2)[tg(x_1) + (1-t)g(x_2) - g(tx_1 + (1-t)x_2)] \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2),$$

dla każdego $x_1, x_2 \in I$ i $t \in (0,1)$.

Następny wynik dotyczy nierówności typu Jensena dla względnej wypukłości $\succ_{(1)}$.

Wniosek 141. ([**R3**], **Th. Cor. 3.8**) *Niech $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami wypukłymi, takimi że $f \succ_{(1)} g$. Wtedy, istnieje funkcja $\lambda\colon I \to [0, \infty)$, taka że*

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right)\left[\sum_{i=1}^n t_i g(x_i) - g\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right)\right] \leqslant \sum_{i=1}^n t_i f(x_i), \tag{150}$$

dla każdych $x_1, \ldots, x_n \in I$ i $t_1, \ldots, t_n > 0$ sumujących się do 1.

Poprzez podobne rozumowanie, na podstawie Uwagi 139, otrzymujemy następującą nierówność typu Jensena dla względnej wypukłości $\succ_{(1)}$.

Wniosek 142. ([**R3**], **Cor. 3.9**) *Niech f, g będą funkcjami wypukłymi, takimi że $f \succ_{(1)} g$. Wtedy*

$$\frac{1}{|f'_R(tx+(1-t)y)|}[tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y)]$$
$$\geqslant$$
$$\frac{1}{|g'_R(tx+(1-t)y)|}[tg(x) + (1-t)g(y) - g(tx + (1-t)y)],$$
$$\frac{1}{|f'_R(\sum_{i=1}^n t_i x_i)|}\left[\sum_{i=1}^n t_i f(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right)\right]$$
$$\geqslant$$
$$\frac{1}{|g'_R(\sum_{i=1}^n t_i x_i)|}\left[\sum_{i=1}^n t_i g(x_i) - g\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right)\right],$$

dla każdych $x, y, x_1, \ldots, x_n \in I$, $t \in (0,1)$ i $t_1, \ldots, t_n$ sumujących sie do 1.

3. Pewne silne wypukłości

Przypomnijmy, że funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest silnie wypukła z modułem $c > 0$ wtedy i tylko wtedy gdy funkcja $f(x) - cx^2$ jest wypukła (Stwierdzenie 25). Inaczej mówiąc f jest silnie wypukła z modułem $c > 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $f \succ_{(2)} g$, gdzie $g(x) = cx^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Inspirując się tą charakteryzacją, wprowadzamy pojęcie silnej wypukłości względem relacji względnej wypukłości.

Tutaj, będziemy używać relacji $\succ_{(i)}$, $i = 1, 2$, do zdefiniowania silnej wypukłości względem relacji względnej wypukłości. Mowimy, że funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest silnie wypukła (z modułem $c > 0$) względem relacji $\succ_{(i)}$) gdy $f \succ_{(i)} cx^2$. Wtedy silna wypukłość względem $\succ_{(2)}$ jest zwykłą silna wypukłością. Palmer [**154**], [**155**] badał silną wypukłość względem $\succ_{(1)}$, nie nazywając jej.

W **[P21]** można znaleźć następującą probabilistyczną charakteryzację silnej wypukłości, która jest rownocześnie silną wypukłością względem $\succ_{(2)}$.

TWIERDZENIE 143. ([**P21**], **Th. 2.1**) *Funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest silnie wypukła (z modułem $c > 0$) względem relacji $\succ_{(2)}$ wtedy i tylko wtedy gdy*

$$Ef(X) - f(EX) \geqslant cD^2(X), \tag{151}$$

dla każdej zmiennej losowej X o wartościach w I (o skończonych wartościach oczekiwanych).

Nierównośc (151) oznacza, że Jensen gap funkcji f jest większy lub równy niż wariancja zmiennej losowej X pomnożona przez c.

W następującym twierdzeniu podajemy probabilistyczną charakteryzację silnej wypukłości względem relacji $\succ_{(1)}$.

TWIERDZENIE 144. ([**R3**], **Th. 4.5**) *Niech $f\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą i niech $c > 0$. Jeżeli f jest silnie wypukła względem $\succ_{(1)}$ (z modułem c), to*

$$Ef(X) - f(EX) \geqslant f'_R(EX)\frac{D^2(X)}{2EX}, \tag{152}$$

dla każdej zmiennej losowej X o wartościach w I (o skończonych wartościach oczekiwanych), takiej że $EX \neq 0$.

Zauważmy, że $D^2(X)/EX$ jest stosunkiem wariancja-wartość oczekiwana dla zmiennej losowej X (VMR(X)). Nierówność (152) oznacza, że the Jensen gap funkcji f jest niemniejszy niż połowie stosuku wariancja-wartość oczekiwana zmiennej losowej X pomnożonego przez $f'_R(EX)$. Zauważmy, że prawa strona nierówności (152) jest niezależna od modułu c.

Rozważmy teraz szczególne przypadki Twierdzenia 144. Dla ustalonych $t \in (0,1)$ i $x_1, x_2 \in I$, rozważmy zmienną losową X, taką że $P(X = x_1) = t$ i $P(X = x_2) = 1 - t$. Wtedy, z Twierdzenia 144 otrzymujemy następujący wniosek.

WNIOSEK 145. ([**R3**], **Cor. 4.6**) *Jeżeli funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest silnie wypukła względem $\succ_{(1)}$, to*

$$tf(x_1)+(1-t)f(x_2)-f(tx_1+(1-t)x_2) \geqslant f'_R(tx_1+(1-t)x_2)\frac{tx_1^2+(1-t)x_2^2-[tx_1+(1-t)x_2]^2}{2[tx_1+(1-t)x_2]},$$

dla każdych $x_1, x_2 \in I$ i $t \in (0,1)$, takich że $tx_1 + (1-t)x_2 \neq 0$.

Następny wynik dotyczy nierówności typu Jensena dla funkcji silnie wypukłych względem $\succ_{(1)}$.

WNIOSEK 146. ([**R3**], **Cor. 4.7**) *If the function $f\colon I \to \mathbb{R}$ is strongly convex with respect to $\succ_{(1)}$, then*

$$\sum_{i=1}^n t_i f(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \geqslant f'_R\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right)\frac{\sum_{i=1}^n t_i x_i^2 - \left[\sum_{i=1}^n t_i x_i\right]^2}{2\sum_{i=1}^n t_i x_i},$$

dla każdych $x_1, \ldots, x_n \in I$ i $t_1, \ldots, t_n > 0$ sumujących się do 1, takich że $\sum_{i=1}^n t_i x_i \neq 0$.

Zauważmy, że w pracach [**125**], [**P21**] można znaleźć nierówności typu Jensena dla funkcji silnie wypukłych względem $\succ_{(2)}$ (silnie wypukłych w zwykłym sensie).

ROZDZIAŁ 8

Krótkie omówienie pozostałych wyników niewchodzących w skład rozprawy

Analiza wypukła

Problemy dotyczące zagadnień z analizy wypukłej są badane w pracach [**R1, R2, R3, R4, R5, R6**], które są włączone do rozprawy, oraz w pracach [**P21, P23, P25, P26, P30**].

W pracy [**P21**] jest podana probabilistyczna charakteryzacja silnej wypukłości jak również jej geometryczna charakteryzacja. Jedną z najbardziej znanych i elementarnych jest następująca nierówność Jensena

$$E\big[f(X)\big] \geqslant f\big(E[X]\big),$$

gdzie f jest funkcją wypukłą, określoną na zbiorze wypukłym, zawartym w zbiorze wartości zmiennej losowej X (patrz [**21**]). Nierówność ta daje probabilistyczną charakteryzację funkcji wypukłych i może być przepisana w postaci

$$E\big[f(X)\big] - f\big(E[X]\big) \geqslant 0,$$

gdzie lewa strona nierówności jest tzw. *Jensen gapem* funkcji f. W [**P21**], dowodzimy,że dla funkcji φ silnie wypukłej z modułem $c > 0$ mamy następującą nierówność

$$E[\varphi(X)] - \varphi\big(E[X]\big) \geqslant c\, D^2[X],$$

gdzie $D^2[X]$ jest wariancją zmiennej losowej X. Inaczej mówiąc, Jensen gap funkcji silnie wypukłej z modułem c jest nie mniejszy niż wariancja zmiennej losowej X pomnożona przez c. Używając tej charakteryzacji, otrzymane są pewne nierówności typu Jensena, które są również udowodnione w [**125**] przy użyciu technik podparciowych.

Praca [**P21**] jest cytowana bez autocytowań w 10 pracach: A. Gilányi, N. Merentes, K. Nikodem, Zs. Páles (2015) [**55**], K. Nikodem (2014) [**148**], O. Mejıa, N. Merentes and K. Nikodem (2014) [**124**], N. Merentes, S. Rivas (2013) [**127**], H. Leiva, N. Merentes, K. Nikodem, J .L. Sánchez (2013) [**104**], S. Abramovich, S. Ivelić i J. Pečarić (2012) [**2**], F. C. Mitroi (2012) [**138**], A. Azócar, K. Nikodem, Roa G. (2012) [**4**], N. Merentes, K. Nikodem, S. Rivas (2011) [**126**] oraz N. Merentes, K. Nikodem (2010) [**125**].

W pracy [**P23**] są wprowadzone i badane funkcje silnie wypukłe w sensie Schura oraz funkcje generujące sumy silnie wypukłe w sensie Schura. Otrzymane wyniki są odpowiednikami klasycznego twierdzenia Hardy-Littlewood-Pólya o majoryzacji [**63**] i twierdzenia Ng'ego [**141**] charakteryzującego funkcje wypukłe w sensie Schura. Pojęcie Schur-wypukłości i funkcji generujących Schur-wypukłe sumy zostało wprowadzone przez Schura [**188**] (por. też [**119, 63, 91**]). W 1987 C.T. Ng [**141**] podał pełną charakteryzację funkcji generujących Schur-wypukłe sumy. Pojęcia silnej wypukłości, silnej-Jensen wypukłości oraz silnej Wright-wypukłości były inspirowane przez teorię optymizacji i w literaturze można znaleźć wiele ich własności i przykładów ich zastosowań (patrz np. [**3, 67, 164, 172, 126, P21**]). My dowodzimy, że funkcje silnie wypukłe generują sumy silnie Schur-wypukłe, oraz że funkcje generujące silnie Schur wypukłe sumy są silnie Jensen-wypukłe. Podajemy kontrprzykład na to, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Dowodzimy, że silna Jensen-wypukłość jest warunkiem koniecznym, żeby funkcja generowała sumy silnie Schur-wypukłe. Charakteryzujemy również funkcje generujące sumy silnie Schur-wypukłe, bez żadnych dodatkowych warunków regularnościowych. Praca [**P23**] jest cytowana w 3 pracach bez autocytowań: A. Gilányi, N. Merentes, K. Nikodem, Zs. Páles (2015) [**55**], K. Nikodem (2014) [**148**] oraz M. Castillo, N. Merentes, J.L. Sánchez [**33**].

W pracy [**P25**] badamy klasy $\mathcal{W}_1(\Theta, \mathcal{M}_1)$ składające się z miar Θ-nadniezmienniczych. Jeżeli $f \in \mathcal{M}_1$, to f jest dystrybuantą miary ν, takiej, że $\nu((-\infty, x)) = f_\nu(x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Stad, możemy utożsamiać klasę funkcji $\mathcal{W}_1(\Theta, \mathcal{M}_1)$ z klasą $M(\Theta)$ składająca się z miar ν spełniających nierówność

$$E\nabla_{\Theta}\nu \geqslant 0, \tag{153}$$

gdzie $E\nabla_{\Theta}\nu(B) = \nu(B) - E\nu(B-\Theta)$, gdy $\nu(B) < \infty$ $(B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Miarę ν spełniającą nierówność (153) będziemy nazywać miarą Θ-*nadniezmienniczą*. Zauważmy, że nierówność ta może być przepisana w postaci

$$\nu(B) \geqslant E\nu(B-\Theta) \quad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

W pracy [**P25**] stosujemy twierdzenie Choqueta theorem o reprezentacji punktów zwartego wypukłego zbioru jako barycentrum zbioru punktów ekstremalnych ([**159**], p.17), w celu otrzymania reprezentacji całkowej miar ν spełniających powyższą nierówność ([**P25**], Theorem 4.3). Podajemy również reprezentację całkową tych miar w szczególnych przypadkach zmiennych losowych Θ ([**P25**], Theorem 4.4). Miarę probabilistyczną skoncentrowaną w punkcie x $(x \in \mathbb{R})$ będziemy oznaczać jako δ_x. Zauważmy, że gdy $\nu_\Theta = \delta_h$ dla pewnego $h > 0$, to ν jest Θ nadniezmiennicza, gdy

$$\Delta_h\nu \geqslant 0. \tag{154}$$

Stąd miary Θ-nadniezmiennicze mogą być uważane jako zrandomizowane wersje miar spełniających (154) (albo jako losowo nadniezmiennicze względem Θ). W pracy [**P25**] dowodzę, że istnieje miara ν oraz zmienna losowa Θ, takie, że ν jest Θ-nadniezmiennicza, jakkolwiek, nie istnieje $h > 0$ dla którego zależność (154) byłaby spełniona (patrz [**P25**], Remark 4.5). W pracy [**P11**] można znaleźć charakteryzację miar spełniających (154), dla wszystkich $h \in H$, gdzie $H \subset [0, \infty)$. Niech $\mathcal{L}(X)$ oznacza rozkład probabilistyczny zmiennej losowej X. Miary spełniające nierówność typu (154) pojawiają się w rachunku prawdopodobieństwa przy badaniu tak zwanych klas L_c (with $c = \exp(-h)$, patrz [**108**]) składających się z rozkładów zmiennych losowych Y, dla których spełnione jest równanie $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(cY + X)$, z pewną zmienną losową X taką, że Y i X are są niezależnymi zmiennymi losowymi. Wtedy miary spektralne Lévy'ego odpowiadające mierze nieskończenie podzielnej z klasy L_c (w reprezentacji Lévy-Khinthine'a) spełniają multiplikatywną wersję nierówności (154). Z kolei, Θ-nadniezmiennicze miary pojawiają się w rachunku prawdopodobieństwa przy badaniu tzw. perpetuit [**214**], spełniających stochastyczne równanie $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(\xi Y + X)$, gdzie Y, ξ i X są niezależnymi zmiennymi losowymi (z $\xi = \exp(-\Theta)$).

W pracy [**P26**] wprowadzamy klasę funkcji (k, h)-wypukłych zdefiniowanych na k-wypukłej dziedzinie, i dowodzimy nowe nierówności typu Hermite-Hadamarda i Fejéra dla takich odwzorowań. To uogólnia wyniki dla h-wypukłych funkcji podane w [**23, 180**], i dla Orlicza-s-wypukłych odwzorowań podane w [**41**].

Niech $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją nieujemną, $h \neq 0$. Nieujemna funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest nazywana h-*wypukłą*, jeśli

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant h(t)f(x) + h(1-t)f(y), \tag{155}$$

dla wszystkich $x, y \in I$ i $t \in (0,1)$ (patrz [**212**]). To pojęcie uogólnia pojęcie klasycznej wypukłości (dla $h(t) = t$, patrz np. [**96, 172**]), s-Breckner-wypukłości (dla $h(t) = t^s$, z pewnym $s \in (0,1)$, patrz [**27, 70**]), P-funkcji (dla $h(t) = 1$, patrz [**157**]) i Godunova-Levin funkcji (dla $h(t) = t^{-1}$, patrz [**57**]). W pracy Bombardelli i Varošanec [**23**], zostały uzyskane nierówności typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra dla h-wypukłych funkcji. W [**180**] Sarikaya, Set i Özdemir udowodnili inną wersję nierówności typu Fejéra dla h-wypukłych funkcji.

Niech $k : (0,1) \to \mathbb{R}$ będzie daną funkcją. Wtedy podzbiór D liniowej przestrzeni rzeczywistej X będziemy nazywać k-*wypukłym*, jeśli $k(t)x + k(1-t)y \in D$ dla wszystkich $x, y \in D$ i $t \in (0,1)$ (patrz [**P26**], Definition 2.1). Według podanej wyżej definicji, dla odpowiednio dobranej funkcji k, można otrzymać rodziny różnych znanych zbiorów. Nasza definicja pokrywa się z definicją klasycznej wypukłości dla $k(t) = t$. Jeśli $k(t) = t^{\frac{1}{p}}$ z $p \in (0,1)$, to D jest k-wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy jest p-wypukły (patrz np. [**174**]). Dla $s > 0$ i $k(t) = t^{\frac{1}{s}}$, rodzina k-wypukłych zbiorów jest równa klasie s-Orlicz-wypukłych zbiorów, zdefiniowanych przez Dragomira i Fitzpatricka w [**40**]. Jeżeli $k(t) = 1$ dla wszystkich t, to D jest k-wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy $(D, +)$ jest półgrupą. Dla $k(t) = \frac{1}{2}$, nasza definicja generuje rodzinę podwypukłych podzbiorów X. Niech k będzie zdefiniowana przy pomocy wzoru: $k(t) = 2t$ dla $t < \frac{1}{2}$ i $k(t) = 0$ dla $t \geqslant \frac{1}{2}$. Wtedy D jest k-wypukłym zbiorem wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem gwiaździstym względem 0, tzn. $tx \in D$ dla wszystkich $t \in [0,1]$ i $x \in D$. W [**P26**] podajemy podstawowe własności k-wypukłych podzbiorów przestrzeni liniowej. Niech $k, h : (0,1) \to \mathbb{R}$ będą dwiema funkcjami i załóżmy, że $D \subset X$ jest k-wypukłym zbiorem. Wtedy funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest (k,h)-*wypukła*, jeśli

$$f\big(k(t)x + k(1-t)y\big) \le h(t)f(x) + h(1-t)f(y) \tag{156}$$

dla wszystkich $x, y \in D$ i $t \in (0,1)$ (patrz [**P26**], Definition 2.4). Jeśli w nierówności (156) nierówność możemy zastąpić odpowiednio równością, to f będziemy nazywać (k,h)-*afiniczną* (ogólniejsze funkcje tego typu są badane w pracy [**117**]). W szczególności, dla odpowiednio dobranych funkcji k i h, przy pomocy warunku (156) możemy otrzymać następujące rodziny funkcji: h–wypukłych (przy dodatkowym założeniu nieujemności), s-Breckner-wypukłych funkcji, P-funkcji i Godunova-Levin funkcji, s-Orlicz-wypukłych funkcji, podaddytywnych funkcji i funkcji gwiaździstych, między innymi.

Jako główne wyniki pracy [**P26**] dowodzimy dwie nierówności typu Hermite'a–Hadamarda–Fejéra dla (k,h)-wypukłych funkcji ([**P26**], Theorem 3.1, Theorem 3.5), i stosujemy je dla różnych klas odwzorowań : dla s–Orlicz wypukłych funkcji, dla gwiaździstych funkcji, dla h–wypukłych funkcji, między innymi. Uogólnia to, wyniki dla h-wypukłych funkcji podane w[**23**], [**180**], i s-Orlicz-wypukłych funkcji podane w [**41**].

Warto dodać, że Attila Házy w 2012 r. na 50-th International Symposium on Functional Equations w Hajdúszoboszló uogólnił nasze pojęcie (k,h)-wypukłości funkcji. Zdefiniował on i badał (k,h)-wypukłe funkcje względem pewnego zbioru $T \subset [0,1]$, jako funkcje spełniające warunek (156) dla $t \in T$.

Praca [**P26**] jest cytowana bez autocytowań w 5 pracach: M. Niezgoda (2014) [**146**], M. Niezgoda (2014) [**145**], A. Házy (2012) [**127**], N. Merentes and S. Rivas (2013) [**127**] oraz M. E. Özdemir (2013) [**152**].

W pracy [**P30**] badam ekstremalne miary z ustalonymi momentami. W przybliżonym całkowaniu pewne nierówności pomiędzy kwadraturami i całkami przybliżanymi przez nie są nazywane *extremalitis*. Z drugiej strony zbiór wszystkich kwadratur jest wypukły. Próbujemy znaleźć możliwe związki pomiędzy extremalitis a ekstremalnymi kwadraturami (w sensie punktów ekstremalnych zbioru wypukłego). Oczywiście, kwadratury są całkami względem miar dyskretnych, oraz ponadto kwadratura jest ekstremalna wtedy i tylko wtedy gdy związana z nią miara jest ekstremalna. Stąd powstaje naturalny problem opisu ekstremalnych miar z ustalonymi momentami w ogólnym(nie tylko dyskretnym) przypadku. W tej pracy zajmujemy się symetrycznymi miarami z określonymi pierwszymi czterema momentami. W pracy tej znajdujemy punkty ekstremalne zbioru wszystkich symetrycznych miar probabilistycznych na $[-1,1]$ z ustalonymi pierwszymi czterema momentami tzn. $(m_0, m_1, m_2, m_3) = (1, 0, b^2, 0)$ ([**P30**], Theorem 10). Odpowiada to również pełnemu opisowi punktów ekstremalnych zbioru symetrycznych kwadratur z ustalonymi pierwszymi czterema momentami. Jako zastosowanie otrzymanych wyników dotyczących punktów ekstremalnych, podaję twierdzenie o reprezentacji całkowej elementów zbioru składającego się z symetrycznych miar probabilistycznych na [-1,1] z ustalonymi pierwszymi czterema momentami ([**P30**], Theorem 13). W dowodzie tego twierdzenia korzystam z faktu, że przestrzeń miar probabilistycznych na prostej ze słabą zbieżnością jest przestrzenią wypukłą i metryzowalną z odległością Levy-Prohorova (Dudley (2002), [**44**]). W konsekwencji otrzymuję, że zbiór symetrycznych miar probabilistycznych na $[-1,1]$ z ustalonymi pierwszymi czterema momentami jest zwartym, wypukłym, metryzowalnym zbiorem, ponadto jest on homeomorficzny ze zbiorem $[0,b] \times [b,1]$. Na koniec, stosuję twierdzenie Choqueta o reprezentacji punktów zwartego, wypukłego zbioru jako barycentrum punktów ekstremalnych (Phelps (1966), [**159**]). Wyniki otrzymane w tej pracy uogólniają wyniki z pracy S. Karlina i W. Studdena (1966), [**93**]. Moim zdaniem, do najważniejszych moich wyników dotyczących zagadnień z analizy wypukłej, które są badane w pracach niewłączonych do rozprawy należą:

- podanie probabilistycznej charakteryzacji funkcji silnie wypukłej z modułem $c > 0$, jako funkcji φ dla której zachodzi nierówność ([**P21**])

  $$E[\varphi(X)] - \varphi\big(E[X]\big) \geqslant c\,D^2[X],$$

  dla każdej zmiennej losowej X (dla której wartości oczekiwane i wariancja występujące w powyższym wzorze są skończone), tzn. luka Jensena dla funkcji silnie wypukłej z modułem c jest nie mniejsza niż wariancja zmiennej losowej X pomnożona przez c. Jest to uogólnienie nierówności Jensena charakteryzującej funkcje wypukłe jako funkcje dla których luka Jensena jest nieujemna (patrz [**21**]).

- wprowadzenie i charakteryzacja funkcje silnie wypukłej w sensie Schura oraz funkcji generujących sumy silnie wypukłe w sensie Schura, bez żadnych dodatkowych warunków regularnościowych ([**P23**]); dowód, że funkcje silnie wypukłe generują sumy silnie Schur-wypukłe, oraz że funkcje generujące silnie Schur wypukłe sumy są silnie Jensen-wypukłe - kontrprzykład na to, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe; dowód, że silna Jensen-wypukłość jest warunkiem koniecznym, żeby funkcja generowała sumy silnie Schur-wypukłe,
- otrzymanie reprezentacji całkowej miar Θ-nadniezmienniczych ([**159**], p.17) ([**P25**]), korzystając z twierdzenia Choqueta o reprezentacji punktów zwartego wypukłego zbioru jako barycentrum zbioru punktów ekstremalnych,
- wprowadzenie nowej klasy funkcji (k,h)-wypukłych zdefiniowanych na k-wypukłej dziedzinie, i dowód nierówności typu Hermite-Hadamarda i Fejéra dla takich odwzorowań ([**P26**]), uogólnia to wyniki dla klasycznej wypukłości , s-Breckner-wypukłości, P-funkcji, Godunova-Levin funkcji i dla h-wypukłych funkcji.
- otrzymanie pełnej charakteryzacji zbioru punktów ekstremalnych zbioru symetrycznych miar probabilistycznych z ustalonymi pierwszymi czterema momentami, oraz reprezentacji całkowej elementów tego zbioru ([**P30**]); przy otrzymywaniu reprezentacji całkowej korzystam z metryzowalności przestrzeni miar probabilistycznych na prostej ze słabą zbieżnością oraz z twierdzenia Choqueta o reprezentacji punktów zwartego, wypukłego zbioru; punkty ekstremalne i reprezentacja całkowa elementów tego zbioru odpowiadają puntom ekstremalnym i reprezentacji całkowej kwadratur z ustalonymi pierwszymi czterema momentami, wyniki te uogólniają wyniki z pracy S Karlina i W. Studdena (1966),[**93**].

c-rozkładalność miar probabilistycznych

Problemy dotyczące c-rozkładalności miar probabilistycznych są badane w pracach [**P1, P2, P3, P5, P8, P9, P10, P15, P16, P18, P19**].

Niech $c \in \mathbb{R}$. Mówimy, że zmienna losowa X (albo, że jej rozkład $P = \mathcal{L}(X)$) jest *c-rozkładalna* (c-rozkładalny), gdy

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(cX + X_c), \tag{157}$$

gdzie X_c jest zmienną losowa niezależna od X. L_c jest rodziną wszystkich c-rozkładalnych rozkładów, gdzie $|c| < 1$. Pisząc powyższą równość w języku funkcji charakterystycznych, otrzymujemy, że funkcja charakterystyczna φ jest *c-rozkładalna*, gdy jest postaci

$$\varphi(t) = \varphi(ct)\varphi_c(t), \tag{158}$$

gdzie φ_c jest funkcją charakterystyczną. Mówimy, że φ jest *C-rozkładalna*, lub $\varphi \in L_C$, gdzie $C \subset \mathbb{R}$, gdy φ jest c-rozkładalna dla każdego $c \in C$.

Samorozkładalność może być zdefiniowana jako własność rozkładalności miar probabilistycznych. Mówimy, że zmienna losowa X, lub, że jej rozkład $P = \mathcal{L}(X)$, jest *samorozkładalna* (samorozkładalny), gdy X jest c-rozkładalna dla każdego $0 < c < 1$.

Historycznie, uważa się rok 1937, rok w którym Lèvy opublikował pracę o *klasie* L, znanej również jako klasa Lèvyégo L (patrz [**103**]), jako początek badań c-rozkładalności rozkładów. Klasa L pojawia się w rachunku prawdopodobieństwa jako rozwiązanie centralnego problemu granicznego. To jest dokładnie klasa granicznych rozkładów znormalizowanych sum częściowych niezależnych (niekoniecznie jednakowo rozłożonych) zmiennych losowych,

$$b_n^{-1}(X_1 + \ldots + X_n) - a_n, \tag{159}$$

gdzie $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$, $b_n^{-1}X_k$ ($k = 1, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$) tworzą jednostajnie infinitezymalną macierz trójkątną. Problem scharakteryzowania takiej klasy został zaproponowany przez A. Ya. Khintchina w 1936 r., i rozwiązany przez P. Lèvyégo ([**103**]). Udowodnił on, że miara należy do L wtedy i tylko wtedy, gdy jest samorozkładalna. Klasę L można opisać w języku funkcji charakterystycznych (patrz [**103**] p.319, [**109**] p. 195). Inna charakteryzacja klasy L została podana w pracach [**205**], [**85**], [**86**], [**79**]. Uogólnienia klasy L-rozkładów na przestrzenie Euklidesowe wyższych wymiarów zostało wprowadzone w pracy Urbanika w 1969 [**206**]. Następnie Sato [**182**], [**183**] zajmował się ich reprezentacjami oraz ich podklas. Kumar i Schreiber [**97**], [**99**] otrzymali inne reprezentacje pewnych podklas klasy L-rozkładów na przestrzeniach Banacha.

Klasy L-rozkładów znalazły wiele zastosowań, patrz np. Barndorff-Nielsen and Shephard (2001) [**8**] i bibliografia tam podana. Loève (1945) [**108**] był pierwszym , który rozważał C-rozkładalność w *monotetycznym* przypadku $C = \{c^k : k = 0, 1, 2, \ldots\} \cup \{0\}$, $c \in (0, 1)$, tzw c-rozkładalność. Opisał on c-rozkładalny rozkład jako rozkład graniczny ciągu unormowanych sum, jak również jako rozkład pewnego szeregu niezależnych zmiennych losowych.

FAKT 147 (Loève (1945), (1955) [**108**], [**109**]). Niech $c \in (0, 1)$, $C = \{c^k : k = 0, 1, 2, \ldots\} \cup \{0\}$ i niech P będzie miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}$.

a) $P \in L_c$ wtedy i tylko wtedy, gdy P jest granicznym rozkładem ciągu unormowanych sum danych przez (159), gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$, $n \geq 1$ i $\lim_{n\to\infty} b_{n+1}^{-1} b_n = c$,

b) $P \in L_c$ wtedy i tylko wtedy, gdy P jest rozkładem szeregu postaci

$$\sum_{j \geq 0} c^j Y_j, \tag{160}$$

gdzie $Y_0, Y_1, \ldots$ są niezależnymi jednakowo rozłożonymi zmiennymi losowymi i szereg jest zbieżny według rozkładu.

Na podstawie (160) wnioskujemy, że rozkład zmiennej losowej Y_0 jest generatorem rozkładu P, c-rozkładalnego. Pisząc (160) w terminach funkcji charakterystycznych wnioskujemy, że $\varphi \in L_c$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja charakterystyczna φ_c taka, że φ jest postaci

$$\varphi(t) = \prod_{k=0}^{\infty} \varphi_c(c^k t). \tag{161}$$

Z powyższego wzoru mamy, że φ_c jest *generatorem* c-rozkładalnej funkcji charakterystycznej φ. Misheikis (1972) [**132**] badał następny problem, rozważając przypadek granic bez zakładania jednostajnej infinitezymalności. Udowodnił on wersję Faktu 147(a) dla dowolnej (niekoniecznie monotetycznej) C, i w wielu pracach również uogólnił wyniki na wielowymiarowe przestrzenie (patrz Misheikis (1972, 1974, 1975, 1976, 1983) [**131**]. W innym kontekście, Grincevičius (1974) [**61**] pokazał, że szereg w Fakcie 147(b) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $E(\log(1 + |Y_0|) < \infty$, i że jego rozkład musi być albo absolutnie ciągły, albo singularny ciągły (względem miary Lebesgue'a). Zakusilo (1976, 1977, 1978) niezależnie udowodnił te wyniki w [**237**], [**238**], [**239**] . Uogólnił on wyniki zbieżnościowe na przestrzenie Euklidesowe, a Wolfe (1983) [**234**] uogólnił wyniki o ciągłości na przestrzenie Euklidesowe. Zakusilo w 1976 [**237**] udowodnił własność ciągłości klas L_c, gdzie $0 < |c| < 1$. Ja uogólniłam w Rajba (2001) [**P9**] jego wyniki na przypadek $|c| < 1$.

Urbanik (1975) w [**209**] wprowadził pojęcie *półgrupy rozkładalności* $D(P)$ związanej z miarą probabilistyczną P jako zbioru wszystkich liczb rzeczywistych c dla których P jest c-rozkładalna. Zostało również udowodnione, że pewne probabilistyczne własności miar odpowiadają algebraicznym i topologicznym własnościom ich półgrup rozkładalności. Dla dowolnej P, $D(P)$ jest domkniętą multiplikatywną podpółgrupą prostej $\mathbb{R}$ zawierającą 0 and 1. Ponadto, dla każdej niezdegenerowanej P, $D(P)$ jest zwartą podpółgrupą półgrupy $[-1, 1]$.

Urbanik rozważał problem, czy te warunki charakteryzują półgrupy rozkładalności spośród wszystkich zwartych półgrup. Pewne nietrywialne przykłady półgrup rozkładalności zostały podane w pracach Urbanik (1976) [**210**], Iljinskij (1978) [**72**], Niedbalska (1978) [**P1**], Niedbalska-Rajba (1981) [**P3**], Rajba (1980) [**P2**].

W pracy Rajba(1980)[**P2**], podałam charakteryzację półgrup rozkładalności miar nieskończenie podzielnych, które maja gaussowską komponentę i należą do pewnej klasy I_0.

Nawet na prostej rzeczywistej, problem charakteryzacji wszystkich półgrup, które są półgrupami rozkładalności jest ciągle otwarty. Wszystko co było dotychczas zrobione o warunkach wystarczających, żeby półgrupa była półgrupą rozkładalności, jest podane w mojej pracy [**P3**]. Udowodniłam, że półgrupy rozkładalności tworzą gęsty podzbiór w zbiorze wszystkich półgrup spełniających nasze warunki konieczne. Dla symetrycznych miar probabilistycznych problem charakteryzacyjny został rozwiązany przez Iljinskijego w [**72**]. Mianowicie, każda zwarta podpółgrupa liczb rzeczywistych o module mniejszym lub równym 1 jest półgrupą rozkładalności miary probabilistycznej symetrycznej wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera 0 i -1.

Zauważmy, że charakteryzacja Lèvy'ego niezdegenerowanych samorozkładalnych P jest równoważna inkluzji $[0,1] \subset D(P)$ (patrz Loève[**109**], Section 23.3). Stąd, w szczególności mamy następujące stwierdzenie: niezdegenerowana miara probabilistyczna P jest translacją symetrycznej samorozkładalnej wtedy i tylko wtedy, gdy $D(P) = [-1,1]$. K. Urbanik (1976) [**210**] rozważał następujący problem: czy symetryczna miara probabilistyczna P taka, że jej półgrupa rozkładalności zawiera otoczenie zera, jest samorozkładalna. Inaczej mówiąc, czy równość $D(P) = [-1,1]$ jest prawdziwa? W mojej pracy Niedbalska (1978) [**P1**] podałam rozwiązanie tego problemu i dałam negatywną odpowiedź. Mianowicie, podałam przykład miary P symetrycznej, której półgrupa rozkładalności zawiera otoczenie zera, ale która nie jest samorozkładalna (a nawet nie jest nieskończenie podzielna), czyli $D(P) \neq [-1,1]$.

W [**P3**] definiuję c-rozkładalność miar względem podzbiorów zbioru miar probabilistycznych $\mathcal{P}$. Niech $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$ będzie zbiorem całkowicie domkniętym (patrz [**182**]). Mówimy, że φ jest *c-rozkładalna względem $\mathcal{H}$*, gdy φ jest c-rozkładalna i współczynnik φ_c we wzorze (159) należy do klasy $\mathcal{H}$. Definiuję półgrupę rozkładalności $D(P,\mathcal{H})$ jako zbiór wszystkich $c \in \mathbb{R}$, dla których P jest c-rozkładalne względem $\mathcal{H}$. W [**P3**] badam c-rozkładalność względem klasy Id nieskończenie podzielnych rozkładów (patrz np. [**48**]). Wiadomo, że dla $P \in L$, $D(P) = D(P, Id)$. Inaczej mówiąc, dla $\varphi \in L$ wszystkie współczynniki φ_c $(c \in D(P))$ są nieskończenie podzielne. W [**P3**] podaję przykład miary P nieskończenie podzielnej z funkcją charakterystyczną φ, takiej że φ jest c-rozkładalna dla pewnego $0 < c < 1$ i φ_c nie jest nieskończenie podzielna, tzn. $D(P) \neq D(P, Id)$.

Warto zaznaczyć, że w mojej pracy Niedbalska-Rajba (1981) [**P3**] udowodniłam, że każda zwarta półgrupa zawierająca 0 i 1 jest półgrupą rozkładalności $D(P, Id)$, tzn. dla każdej takiej półgrupy C istnieje $P \in Id$, taka że $D(P, Id) = C$. Jest to rozwiązanie problemu Urbanika charakteryzacji półgrup, które są półgrupami rozkładalności, dla półgrup rozkładalności $D(P, Id)$.

Ponadto, w pracy Rajba (2001) [**P9**] badam klasę $L_C(Id)$ rozkładów P, które są C-rozkładalne względem Id $(C \subset [-1,1])$, tzn. dla których $C \subset D(P, Id)$. Podaję reprezentację funkcji charakterystycznych rozkładów $P \in L_C(Id)$. Metoda mojego dowodu, stymulowana wynikami Urbanika [**205**], polega na znalezieniu punktów ekstremalnych pewnego zbioru zwartego utworzonego przez miary spektralne rozkładów z $L_C(Id)$. Kiedy już punkty ekstremalne są znalezione, stosuję twierdzenie Choqueta o reprezentacji punktów zwartego wypukłego zbioru jako barycentrum punktów ekstremalnych ([**159**], p. 19). Z twierdzenia Choqueta o jednoznaczności dla metryzowalnej przestrzeni X ([**159**], p. 70), otrzymuję jednoznaczność reprezentacji.

Zbiór rozkładów samorozkładalnych odgrywa dużą w opisie rozkładów granicznych ciągów zmiennych losowych. Warunek infinitezymalności $\{b_n^{-1} X_k\}$ implikuje, że klasa L jest podzbiorem zbioru Id zbioru wszystkich rozkładów nieskończenie podzielnych. Ponadto zawiera ona *stabilne miary probabilistyczne*, tzn. granice (159), ale dla jednakowo rozłożonych zmiennych losowych. Stabilne zmienne losowe i wektory odgrywają kluczowa rolę w teorii rachunku prawdopodobieństwa. Ich badania zostały zapoczątkowane w latach 1920 - 1930 przez Paul Lèvyégo i Aleksandera Yakovlevicha Khintchina. Literatura na ten temat jest bardzo bogata (patrz np. P. Lèvy [**103**], Gnedenko i Kolmogorov [**56**], Linde [**105**], Zolotariew [**240**], Ibragimov i Linnik [**71**], Samorodnitsky i Taqqu [**179**], Janicki i Weron [**73**]).

Urbanik (1973) [**208**] zdefiniował klasy $\mathbb{L}_m$ takie, że

$$Id \supset \mathbb{L}_0 \supset \mathbb{L}_1 \supset \ldots \supset \mathbb{L}_\infty = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathbb{L}_m \supset S,$$

gdzie $\mathbb{L}_0 = L$ i S oznacza zbiór rozkładów stabilnych. Zgodnie z definicją podaną przez Urbanika, definiujemy klasę $\mathbb{L}_m$, $m \geq 1$, jako klasę wszystkich możliwych granic (159), gdzie $\mathcal{L}(X_k) \in \mathbb{L}_{m-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Rozkłady z klas $\mathbb{L}_m$ i $\mathbb{L}_\infty$ są nazywane *$(m+1)$-krotnie samorozkładalnymi* i *całkowicie samorozkładalnymi*, odpowiednio. Urbanik (1973) [**208**] udowodnił, że rozkład P należy do klasy $\mathbb{L}_m$ $(m = 1, 2, \ldots, \infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on $[0,1]$-rozkładalny względem klasy $\mathbb{L}_{m-1}$ (według mojej terminologii w tej pracy). Ponadto, $\mathbb{L}_\infty$ jest najmniejszą klasą zawierającą S, która jest zamknięta ze względu na sploty i zbieżność. Scharakteryzował on również klasy $\mathbb{L}_m$ w terminach ich funkcji charakterystycznych. Następnie, Kumar i Schreiber w [**98**] oraz Sato w [**181**] znaleźli inne dowody ogólnej postaci funkcjonałów charakterystycznych elementów z $\mathbb{L}_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ (patrz [**116**]).

Bunge (1997) [**31**] uogólnił klasy Urbanika i zdefiniował klasy L_m^C dla dowolnej półgrupy C, takie że L_m^C pokrywa się z $\mathbb{L}_m$ dla klasy $C = [0,1]$ i

$$L_0^C \supset L_1^C \supset \ldots \supset L_\infty^C = \bigcap_{m=0}^{\infty} L_m^C.$$

W pracy Rajba (2001) [**P9**]) badam rozkłady, które są C-rozkładalne względem klasy $\mathbb{L}_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Znajduję reprezentacje ich funkcji charakterystycznych. Dowodzę, że dla każdej $C \subset [-1, 1]$ (zwartej półgrupy zawierającej 0 i 1) istnieje $P \in \mathbb{L}_m$ takie, że $D(P, \mathbb{L}_m) = C$.

W Rajba (2005) [**P15**] udowodniłam, że klasa rozkładów, które są C-rozkładalne względem klasy $\mathbb{L}_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ jest dokładnie klasą rozkładów granicznych pewnych znormalizowanych sum częściowych niezależnych zmiennych losowych, które spełniają pewien infinitezymalny warunek, jak również pewnych sum w przypadku, gdy warunek o ifinitezymalności będzie pominięty. Podaję również ich charakteryzację jako klasy rozkładów granicznych podciągów znormalizowanych sum, które spełniają infinitezymalny warunek.

W pracy Rajba (1999) [**P8**] badam wielokrotną rozkładalność miar probabilistycznych (por. [**200**]). Niech $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$. Mówimy, że funkcja charakterystyczna φ jest $(c_1, \ldots, c_k)$-*rozkładalna*, lub, że $\varphi \in L_{c_1,\ldots,c_k}$, gdy

$$\varphi(t) = \varphi(c_1 t)\varphi_{c_1}(t), \qquad \varphi_{c_1}(t) = \varphi_{c_1}(c_2 t)\varphi_{c_1,c_2}(t), \ldots$$
$$\varphi_{c_1,\ldots,c_{k-1}}(t) = \varphi_{c_1,\ldots,c_{k-1}}(c_k t)\varphi_{c_1,\ldots,c_k}(t),$$

gdzie $\varphi_{c_1}, \varphi_{c_1,c_2}, \ldots, \varphi_{c_1,\ldots,c_{k-1}}$ są funkcjami charakterystycznymi. Zakładając, że wszystkie powyższe współczynniki należą do klasy $\mathcal{H}$, mówimy, że φ jest $(c_1, \ldots, c_k)$-rozkładalna względem $\mathcal{H}$ $(\varphi \in L_{c_1,\ldots,c_k}(\mathcal{H})$. Udowodniłam, że klasa $L_{c_1,\ldots,c_k}$ pokrywa się z klasą szeregów pewnych zmiennych losowych i z klasą rozkładów granicznych pewnych sum unormowanych. Podałam charakteryzację klasy $G_{c_1,\ldots,c_k}$ składającej się z generatorów rozkładów z klasy $L_{c_1,\ldots,c_k}$. Udowodniłam, że funkcja charakterystyczna ψ należy do klasy $G_{c_1,\ldots,c_k}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$E\left[\ln^k(|Z| + 1)\right] < \infty,$$

gdzie Z jest zmienną losową z funkcją charakterystyczną ψ. Wynik ten uogólnia twierdzenie udowodnione przez Zakusilo (1976) [**237**] dla $k = 1$. W [**P9**] wprowadzam i badam *zbiór wielokrotnej rozkładalności* $D_{(k)}(P, \mathcal{H})$ miary $P \in \mathcal{H}$ względem $\mathcal{H}$, składający się ze wszystkich $(c_1, \ldots, c_k)$ $(|c_j| < 1, j = 1, 2, \ldots, k)$ takich, że P jest $(c_1, \ldots, c_k)$-rozkładalna względem $\mathcal{H}$. Podałam również charakteryzację $(c_1, \ldots, c_k)$-rozkładalności funkcji charakterystycznej φ względem klasy miar nieskończenie podzielnych, w języku miar spektralnych Lèvy'ego odpowiadających φ (w reprezentacji Lèvy-Khintchina, patrz [**108**]). Opisałam też klasę rozkładów $(c_1, \ldots, c_k)$-rozkładalnych względem klasy Id jako klasę rozkładów nieskończenie podzielnych z $(c_1, \ldots, c_k)$-supernadniezmienniczą miarą spektralną Lèvy'ego. W [**P11**] podałam charakteryzację funkcji, które są dystrybuantami $(c_1, \ldots, c_k)$-nadniezmienniczych miar.

Dla $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = c$, w miejsce $L_{c_1,\ldots,c_k}$ będziemy pisać $L_{c,(k)}$, i będziemy nazywać rozkłady należące do tych klas, *k-krotnie c-rozkładalnymi* (patrz [**P10**], [**200**]). W pracy Rajba (2002) [**P10**], znajduję reprezentacje k-krotnie c-rozkładalnych względem Id rozkładów: $L_{c,(k)}(Id)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $L_{c,(\infty)}(Id)$ oraz $L_{c,(\alpha)}(Id)$, gdzie $\alpha > 0$ (α jest niekoniecznie całkowita). Stosując otrzymane reprezentacje znajduję również reprezentacje α-krotnie samorozkładalnych rozkładów $(\alpha > 0)$ i całkowicie samorozkładalnych rozkładów. W [**P18**] definiuję i badam półgrupy rozkładalności ułamkowego rzędu związane z rozkładami z klas $L_{c,(\alpha)}(Id)$.

Klasy $\mathbb{L}_m$ były również badane na wielowymiarowych przestrzeniach. Mianowicie, Sato podał w [**182**] ich opis na przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{R}^d$ i Nguyen van Thu w [**196**] oraz Kumar i Schreiber w [**99**] na rzeczywistej ośrodkowej przestrzeni Banacha (patrz [**197**], [**198**], [**199**], [**81**]).

Maejima i Naito (1998) w [**113**] badali tzw. *semi-samorozkładalne* rozkłady na $\mathbb{R}^d$ jako graniczne rozkłady podciągów znormalizowanych ciągów sum częściowych niezależnych zmiennych losowych, które niekoniecznie są jednakowo rozłożone, ale spełniają warunek infinitezymalny. Normalizacja jest brana po ciągach $\{b_n\}$ takich, że $\lim b_{n+1}^{-1} b_n = c > 0$ i $\lim b_n = \infty$. W [**113**] rozkłady z klas semi-rozkładalnych rozkładów $L_0(c)$ i ich podklasy $L_m(c)$ są opisane w języku rozkładalności zmiennych losowych. Autorzy scharakteryzowali miary Lèvy'ego odpowiadające tym rozkładom. Rozkłady semi-samorozkładalne są naturalnym uogólnieniem semi-stabilnych. Wiadomo, że rozkłady semi-stabilne są scharakteryzowane jako graniczne rozkłady podciągów znormalizowanych ciągów sum częściowych niezależnych i jednakowo rozłożonych zmiennych losowych (patrz Meerchaert-Scheffer [**123**], Choi [**34**]).

W Rajba (2009) [**P19**], badam C-rozkładalność miar na przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{R}^d$, gdzie $C \subset [-1,1]$, względem klasy $I(\mathbb{R}^d)$ rozkładów nieskończenie podzielnych i względem klasy $L_m(\mathbb{R}^d)$ rozkładów $(m+1)$-krotnie samorozkładalnych. Podaję reprezentacje ich funkcji charakterystycznych. Podaję przykłady rozkładów , które są dokładnie C-rozkładalne względem $L_m(\mathbb{R}^d)$. Można zauważyć, że klasa rozkładów C-rozkładalnych względem $I(\mathbb{R}^d)$, w monotetycznym przypadku $C = \{c^k\}_{k=0}^{\infty} \cup \{0\}$ (tzn. c-rozkładalnych względem $I(\mathbb{R}^d)$), pokrywa się z klasą, $L_0(c)$, oraz klasa m-krotnie c-rozkładalnych względem $I(\mathbb{R}^d)$ pokrywa się z klasą $L_m(c)$ z [**113**]. Wyniki otrzymane w [**P19**], są uzupełnieniem i uogólnieniem wyników uzyskanych w [**113**].

Wydaje się rzeczą naturalną, że w wielowymiarowych przestrzeniach, sumy częściowe ciągu zmiennych losowych powinny być normowane przez liniowe operatory albo afiniczne transformacje. W takim przypadku otrzymujemy klasy *operatorowo-samorozkładalnych*$(OL(\mathbb{R}^d))$ i *operatorowo-stabilnych miar probabilistycznych.*

W 1972 Urbanik [**207**] zdefiniował klasy rozkładów granicznych sum częściowych niezależnych zmiennych losowych o wartościach w $\mathbb{R}^d$, normowanych przez transformacje afiniczne. Nazwał te rozkłady *miarami probabilistycznymi Lèvy'ego.* Yamazato [**236**] zamienił tę nazwę na OL-rozkłady i oznaczył przez $OL(\mathbb{R}^d)$ klasę wszystkich OL-rozkładów na $\mathbb{R}^d$, ponieważ jest to uogólnienie L-rozkładów poprzez operatory. Mówimy, P ma *operator-samorozkładalności*, gdy istnieje operator Q taki, że P jest c^Q rozkładalna dla każdego $0 < c < 1$ ([**207**]). Operator Q będziemy nazywać *operatorem-samorozkładalności*, a rozkład P nazywamy Q-samorozkładalnym. W pracach Maejima, Sato i Watanabe (1999, 2000) [**114**], [**115**], Rajba (2006) [**P16**] badane są miary na $\mathbb{R}^d$, które są c^Q-rozkładalne, dla każdego $c \in C$, gdzie $C \subset [0,1]$.

Urbanik w [**207**] pokazał, że rozkład P należy do $OL(\mathbb{R}^d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy P ma operator samorozkładalności, przy założeniu że P jest faktycznie d-wymiarowa (tzn. nie jest skupiona na hiperpłaszczyźnie o mniejszym wymiarze). Dalej, podał on reprezentację funkcji charakterystycznych rozkładów operatorowo-samorozkładalnych (tzn. posiadających operator samorozkładalności). Inne reprezentacje można znaleźć np. w pracach Wolfe (1980) [**231**], Jurek (1983) [**80**], [**81**], Yamazato (1984) [**236**], Sato i Yamazato (1984, 1985) [**186**], [**187**]).

Z drugiej strony, do tej pory nie są znane reprezentacje OL-rozkładów bez założenia faktycznej d-wymiarowości. Yamazato [**236**] oznaczył operatorowo-samorozkładalne rozkłady jako OSD-rozkłady i przez $OSD(\mathbb{R}^d)$ klasę wszystkich OSD-rozkładów. Yamazato [**236**] podał przykład OL-rozkładu, który nie jest operatorowo-samorozkładalny.

Sakovic (1961, 1965) [**177**], [**178**] był pierwszym, który badał operatorowo stabilne rozkłady na $\mathbb{R}^d$. Z drugiej strony, Fisz (1954) [**50**] udowodnił twierdzenie o zbieżności operatorowego typu (normalizacja przez macierze). Zarówno Fisz jak i Sakovic używali podejścia wg. zbieżności po współrzędnych, co prowadziło do rachunkowych trudności.

Niezależnie od Sakovica, i wcześniej przed pracą Urbanika [**206**], Sharpe (1969) [**190**] badał klasę granicznych rozkładów afinicznych transformacji sum częściowych niezależnych jednakowo rozłożonych zmiennych losowych o wartościach w $\mathbb{R}^d$. Nazwał on klasę takich rozkładów *operatorowo-stabilnymi* rozkładami, i scharakteryzował tzw. operator stabilności, zakładając, że są one faktycznie d-wymiarowe. W dowodzie używał pewnych metod algebraicznych. Podobnie, Urbanik (1972) [**207**] dał funkcjonalny dowód opisując operatorowo-samorozkładalne miary. To stało się początkiem okresu intensywnych badań granicznych rozkładów. Z kolei, Jurek i Vervaat w [**88**] oraz Jurek w [**78**] otrzymali reprezentacje OSD-rozkładów jako całki stochastyczne względem procesu o stacjonarnych i niezależnych przyrostach (patrz [**77**], [**78**], [**79**], [**82**], [**83**], [**84**]). Jednocześnie, Wolfe [**232**] otrzymał tę samą reprezentację na przestrzeni Euklidesowej (patrz też [**233**]). Natomiast w Sato i Yamazato [**186**] OSD-rozkłady na $\mathbb{R}^d$ są scharakteryzowane jako graniczne rozkłady procesu typu Ornsteina-Uhlenbecka ([**232**], $d = 1$). Monografia *Operator limit distributions in probability theory* Jurka i Masona (1993) [**87**] stanowi podsumowanie intensywnych badań z tego okresu.

W pracy [**P16**] badam (C,Q)-rozkładalność względem m-krotnie Q-samorozkładalnych rozkładów na $\mathbb{R}^d$, gdzie $C \subset [0,1]$. Otrzymuję reprezentacje funkcji charakterystycznych ich rozkładów. Badam również związane z takimi rozkładami półgrupy rozkładalności pewnych liniowych operatorów. Dowodzę, że dla każdego $C \subset [0,1]$ (C, zwarta półgrupa zawierająca 0 i 1) istnieje rozkład, który jest dokładnie (C,Q)-rozkładalny względem klasy m-krotnie Q-samorozkładalnych rozkładów na przestrzeni Euklidesowej.

Moim zdaniem, do najważniejszych moich wyników dotyczących c-rozkładalności miar należą:

- Przykład miary probabilistycznej P takiej, że jej półgrupa rozkładalności $D(P)$ zawiera otoczenie zera, a P nie jest samorozkładalna, nie jest ona nawet nieskończenie podzielna ([**P1**], Th., p.138).
  Praca [**P1**] jest cytowana w pracy Bunge (1997) [**31**] i w monografii Jurek i Mason (1993) [**87**].
- Twierdzenie, że zbiór półgrup rozkładalności miar niezdegenerowanych tworzy gęsty podzbiór w zbiorze $\mathcal{C}$ składającym się ze wszystkich zwartych podpółgrup $C \subset [-1, 1]$ zawierających obie liczby 0 i 1 ([**P3**], Th. 2.1).
  Twierdzenie, że zbiór półgrup $D(P, Id)$ pokrywa się ze zbiorem $\mathcal{C}$, tzn., że dla każdej $C \in \mathcal{C}$ istnieje miara nieskończenie podzielna P taka, że $D(P, Id) = C$ ([**P3**], Th. 1.3).
  Twierdzenie, że istnieje $P \in Id$ taka, że $D(P, Id) \neq D(P)$ ([**P3**], Th. 1.1).
  Praca [**P3**] jest cytowana w 10 pracach bez autocytowań: monografii Jurek i Mason (1993) [**87**] oraz w pracach: Urbanik (1984) [**211**], Bunge (1997) [**31**], Bouzar i Metron (2008) [**24**], Becker-Kern i Hazod (2009) [**11**], Lindner i Sato (2009, 2011) [**106, 107**], Sato(2011, 2014) [**184, 185**], Aoyama i Nakamura (2012) [**1**]; moja praca doktorska *Decomposability semigroups associated with probability measures on the real line* jest cytowana przez N. V. Thu (1985) [**200**].
- Twierdzenia o punktach ekstremalnych zbioru H- nadniezmienniczych miar i C-nadniezmienniczych miar. Twierdzenia o reprezentacji całkowej miar spektralnych Lèvy'ego rozkładów c-rozkładalnych względem klasy $\mathbb{L}_m$ ($C \in \mathcal{C}$) ([**P9**], Th. 3.1, 4.2, 4.3, 4.4).
- Charakteryzacja klasy $G_{c_1,\ldots,c_k}$ składającej się z generatorów rozkładów należących do klasy $L_{c_1,\ldots,c_k}$ ($k \in \mathbb{N}$), jako klasy rozkładów zmiennych losowych Z spełniających
$$E\left[\ln^k(|Z|+1)\right] < \infty.$$
  To twierdzenie charakteryzacyjne jest odpowiednikiem twierdzenia Zakusily (1976) w [**237**] dla $k = 1$ ([**P8**], Th. 1, p. 173).
- Charakteryzacja C-rozkładalności względem klasy $L_m(\mathbb{R}^d)$ rozkładów $(m+1)$-krotnie samorozkładalnych na $\mathbb{R}^d$. W szczególności, przykłady miar, które są dokładnie C-rozkładalne ($C \in \mathcal{C}$) względem $L_m(\mathbb{R}^d)$ ([**P19**], Statistics and Probability Letters, Impact Factor 0,386). Wyniki te uzupełniają i uogólniają wyniki zawarte w [**113**].

Zagadnienia z transmisji informacji

Problemy zagadnień z transmisji informacji są badane w pracach [**P4, P6, P7, P12, P13, P14, P17, P20, P22, P24, P27, P28, P29**].

W pracy [**P4**] przedstawiono analityczne zależności wiążące prawdopodobieństwo błędów w transmisji cyfrowej z klasą zniekształceń czasowych statycznych (zwanych również zniekształceniami jednostronnymi), w obecności szumu gaussowskiego. Przy przesyłaniu informacji w postaci sygnału binarnego, powszechnie przyjętym kryterium jakości transmisji jest prawdopodobieństwo błędów. W praktyce korzysta się z tzw. stopy błędów, czyli przybliżenia prawdopodobieństwa błędów na podstawie pomiarów. Przybliżenie to zależy od liczby błędnie odebranych elementów. Aby uzyskać przybliżenie prawdopodobieństwo błędów na zadanym poziomie ufności [1], [2], należy pomiar kontynuować, aż do czasu zarejestrowania określonej liczby bitów błędnych. Dla kanałów wysokiej jakości (np. 10^{-6} dla transmisji danych, 10^{-3} w łączach światłowodowych) czas pomiarów musi być odpowiednio długi, proporcjonalnie do szybkości transmisji. Inną wadą pomiaru stopy błędów jest konieczność wyłączenia kanału z transmisji użytkowej oraz potrzeba stosowania sygnału testującego. Ponadto ocena kanału transmisyjnego nie odbywa się na bieżąco w czasie trwania transmisji użytkowej. Bardzo interesujące są te metody oceny jakości kanałów transmisji, które korzystają z użytkowego sygnału transmisji (parz np. [**224, 59, 66, 35**]). W pracy [**P4**] szukamy estymatora prawdopodobieństwo błędów, w zależności od parametrów statycznych zniekształceń czasowych [7, 8]. Zakładamy obecność addytywnego szumu gaussowskiego oraz tego, że na wejściu, odbiornik sygnału jest zaopatrzony w idealny filtr który jest dopasowany do sygnału bez statycznych zniekształceń czasowych [9, 10]. W pracy [**P4**] otrzymujemy wzory na estymator prawdopodobieństwa błędów jako funkcję stosunku sygnał-szum i parametrów zniekształceń czasowych. Występowanie statycznych zniekształceń czasowych związane jest z niedoskonałością sprzętu transmisji danych jak również wynika ono z niezgodności częstotliwości nośnych transmisji danych. Jak widać na wykresach otrzymanych estymatorów prawdopodobieństwa, nawet niewielki wzrost statycznych zniekształceń czasowych powoduje, w obecności szumu gaussowskiego, duże straty jakości transmisji (pogorszenie jakości transmisji nawet o kilka rzędów). Warto dodać, że w pracy [13], badano na drodze pomiarowej, dla transmisji danych z kluczowaniem częstotliwości w analogowym kanale transmisyjnym, zależność prawdopodobieństwa błędów od statycznych zniekształceń czasowych, w obecności szumu gaussowskiego.

W pracach [**P7, P6, P12**], badaliśmy jakość łącza transmisji danych FSK pracującego z rzeczywistym dyskryminatorem częstotliwości w obecności szumu gaussowskiego ([**7, 12, 13**]). Braliśmy pod uwagę efekt zniekształceń czasowych powodowanych przez rzeczywisty dyskryminator częstotliwości. W szczególności otrzymaliśmy wzór na prawdopodobieństwo błędów jako funkcję stosunku sygnał-szum i parametrów zniekształceń czasowych. Analizowaliśmy różne zniekształcenia powstające na wyjściu dyskryminatora ([**161, 169, 110**]. Elementarne zniekształcenia należą do klasy jednostronnych zniekształceń czasowych sygnału (bias time distortions). Wynikają one z przesunięcia widma powodowanego przez oba filtry nadawczy dolnoprzepustowy i odbiorczy górnoprzepustowy. Dynamiczne zniekształcenia czasu są wytwarzane przez rzeczywisty dyskryminator częstotliwości i są efektem całkowania ciągu impulsów, przez odbiorczy filtr dolnoprzepustowy (por. [**201, 110**]) (dynamic time distortions). Z kolei, stochastyczne zniekształcenia czasowe wynikają z obecności szumu gaussowskiego w kanale nośnym. Mogą one być aproksymowane uciętym rozkładem gaussowskim ([**201**]). W poprzednich badaniach był rozważany idealny dyskryminator częstotliwości jako demodulator, i w efekcie był pomijany wpływ zniekształceń czasowych ([**13, 121, 156, 171, 202**]). W naszych pracach rozważamy FSK system z rzeczywistym dyskryminatorem częstotliwości, co umożliwia badanie tych zniekształceń. Parametry zniekształceń czasowych są wygodnym parametrem charakteryzującym jakość transmisji, ale wzór na prawdopodobieństwo błędu w zależności od tych parametrów nie był dotychczas znany.

W pracy [**P13**] podajemy metodę estymacji dyspersji dynamicznych zniekształceń czasowych. Stosujemy elementy teorii granicznych rozkładów ekstremalnych porządkowych statystyk pozycyjnych ([**95, 101**]. Dyspersja dynamicznych zniekształceń czasowych jest parametrem, który występuje we wzorze na prawdopodobieństwo błędu w systemie FSK z rzeczywistym dyskryminatorem częstotliwości, który otrzymaliśmy w pracy [**P7**].

W pracy [**P14**] przedstawiono metodę wielopunktowego pomiaru temperatury (por. [**128**]) oraz transmisji komunikatów o przekroczeniu wartości krytycznych. Wyniki pomiarów są prezentowane na mobilnym terminalu. Wykorzystano technologie Bluetooth ([**129**]) do transmisji informacji z komputera do telefonu komórkowego pełniącego rolę terminala mobilnego. Jednocześnie telefon ten pracuje w sieci GSM, i w przypadku przekroczenia dopuszczalnej wartości temperatury któregokolwiek z czujników generuje komunikaty SMS o przekroczeniu wartości krytycznej (por. [**38, 60, 203, 229**]), wysyłane do ustalonych numerów telefonicznych.

W pracy [**P17**] przedstawiono rozwiązanie zagadnienia wspomagania decyzji dowódcy jachtu podczas manewrów. Informacje są dostarczane z czujników i urządzeń pokładowych na mobilny terminal dowódcy (przystosowany telefon komórkowy Siemens S55), wykorzystano w tym celu łącze radiowe zrealizowane na bazie technologii Bluetooth ([**129**]). Terminal dowódcy otrzymuje informacje, jak również wysyła komunikaty o przekroczeniu wartości krytycznych kontrolowanych wielkości fizycznych (patrz [**38, 60, 203, 229**]).

W pracach [**P20, P22, P24, P27, P28, P29**] przedstawiamy nowa metodę losowego sterowania w bezprzewodowych sieciach czujników (WSN). Losowe sterowanie pracą sieci jest zrealizowane poprzez użycie poissonowskiego strumienia zgłoszeń do modelowania naszej sieci (PASTA, patrz [**5, 6**]). W proponowanym rozwiązaniu pojedynczy czujnik-nadajnik (w skrócie, czujnik) pozostaje nieaktywny przez cały czas, z wyjątkiem losowo wybranych momentów czasowych, gdy wysyła informację o mierzonej wielkości do bazy centralnej. Wszystkie czujniki wysyłają informację niezależnie jeden od drugiego. Jest to sieć zbiorcza z informacją wysyłaną tylko w jedną stronę, przy użyciu tylko jednej częstotliwości radiowej. W efekcie jest duża oszczędność energii czujników, nadawany protokół może być krótki. Skutkuje to też dużym uproszczeniem sprzętowym. W naszych pracach budujemy model matematyczny sieci i analizujemy poprawność działania sieci.

Przy tych założeniach pojawia się problem zakłócenia transmisji sygnału. Jeżeli jeden lub więcej czujników zacznie nadawać podczas trwania nadawania protokołu przez jakiś czujnik, taka sytuacja jest nazywana kolizją. Taki zakłócony sygnał jest ignorowany. Akceptujemy pewne straty informacji, zyskując prostotę całego systemu i sprzętową. W pracach [**P20, P22, P24**] wszystkie czujniki mają jednakowy średni czas pomiędzy transmisjami, natomiast w [**P27**] są podzielone na grupy, w których jest taki sam średni czas pomiędzy transmisjami pojedynczego czujnika. W [**P20**] otrzymujemy wzór na warunkowe prawdopodobieństwo kolizji w przedziale o danej długości, przy założeniu danej liczby nadań w przedziale. W pracach [**P22, P24, P27**] otrzymujemy twierdzenia o bezwarunkowym prawdopodobieństwie kolizji.

W pracy [**P27**] przedstawiamy przykład zastosowania bezprzewodowej sieci czujników z jednokierunkową transmisją do monitorowania stanu pacjentów szpitala. Węzły sieci (czujniki) są podzielone na grupy, w których jest taki sam średni czas pomiędzy transmisjami, zależący od stanu zdrowia pacjentów. Otrzymujemy wzór na prawdopodobieństwo kolizji, który jest weryfikowany poprzez badania symulacyjne pracy sieci.

W pracy [**P28**] badamy prawdopodobieństwo kolizji w sieci WSN obliczone na podstawie wyrażenia analitycznego i porównujemy z prawdopodobieństwem kolizji otrzymanym na podstawie komputerowej symulacji pracy sieci.

W pracy [**P29**] otrzymujemy wzór na prawdopodobieństwo kolizji w sieci WSN z losowymi parametrami charakteryzującymi sieć. Celem jest lepsze dopasowanie modelu sieci z losowym dostępem do konkretnych aplikacji.

[**P22**] jest w monografii *Knowledge in telecommunication technologies and optics*, 2011. [**P20**] jest w czasopiśmie PAK. Praca [**P24**] jest w czasopiśmie PRZEGLĄD ELEKTROTECHNICZNY (Electrical Review) z listy filadelfijskiej, impact factor 0,244 . Praca [**P27**] była prezentowana na IEEE Symposium Series on Computational Intelligence, IEEE SSCI 2013 Singapore, które odbyło się w dn. 16 – 19.04.2013, w Singapurze, jak również jest w Proceedings publikowanych przez IEEE. Moim zdaniem, do najważniejszych moich wyników dotyczących zagadnień z transmisji danych należą:

- otrzymanie wzorów na prawdopodobieństwo błędów w transmisji cyfrowej w zależności od parametrów zniekształceń czasowych statycznych i szumu gaussowskiego [**P4**] oraz w systemach FSK pracujących z rzeczywistym dyskryminatorem częstotliwości w obecności szumu gaussowskiego [**P7, P6, P12**],
- podanie metody estymacji dyspersji dynamicznych zniekształceń czasowych [**P13**], którą otrzymujemy stosując elementy teorii granicznych rozkładów ekstremalnych porządkowych statystyk pozycyjnych ([**95, 101**]),
- opracowanie nowej metody losowego sterowania w bezprzewodowych sieciach czujników (WSN) poprzez opracowanie modelu bezprzewodowej sieci czujników (WSN) w oparciu o poissonowski strumień zgłoszeń i otrzymanie wzorów na: prawdopodobieństwo kolizji warunkowego [**P20**], bezwarunkowego prawdopodobieństwa kolizji [**P22, P24**], prawdopodobieństwo kolizji dla sieci z podziałem czujników na grupy, z różnym średnim czasem pomiędzy transmisjami pojedynczego czujnika [**P27**] oraz prawdopodobieństwo kolizji w sieci WSN z losowymi parametrami charakteryzującymi sieć [**P29**]; przedstawiony model jest modelem zbiorczej sieci z informacją wysyłaną tylko w jedną strone, przy użyciu tylko jednej częstotliwości radiowej, w efekcie czego uzyskujemy znaczną oszczędnośc energii i duże uproszczenie sprzętowe; informacja jest wysyłana w losowych momentach czasowych, co może sutkować występowaniem kolizji, otrzymanie wzoru na prawdopodobieństwo kolizji umożliwia analizę poprawności działania sieci w zależności od parametrów pracy sieci; przedstawiony w [**P29**] model sieci WSN z losowymi parametrami charakteryzującymi sieć umożliwia lepsze dopasowanie modelu sieci z losowym dostępem do konkretnych aplikacji.

ROZDZIAŁ 9

O autorze

Imię i nazwisko: Teresa Rajba.

Data i miejsce urodzenia: 08.09.1952 r., Bielawa.

Stan cywilny: mężatka, sześcioro dzieci.

Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:

- 1981 – uzyskanie stopnia doktora nauk matematycznych,
  Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski,
  rozprawa doktorska: *O półgrupach rozkładalności miar probabilistycznych na prostej*,
  promotor: prof. dr hab. Kazimierz Urbanik,
- 1976 – uzyskanie stopnia magistra matematyki,
  Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski,
  praca magisterska: *Półgrupy rozkładalności miar probabilistycznych na prostej*,
  promotor: prof. dr hab. Kazimierz Urbanik,
  moja praca magisterska zdobyła I miejsce w Ogólnopolskim Konkursie Prac Magisterskich z Rachunku Prawdopodobieństwa organizowanym przez PTM.

Zatrudnienie:

- od października 2001 r.: adiunkt w Katedrze Matematyki i Informatyki, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej,
- październik 1999 r. – wrzesień 2001 r.: adiunkt w KMiI, WBMiI, filia PŁ w Bielsku-Białej,
- październik 1981 r. – wrzesień 1999 r.: adiunkt w Zakładzie Rachunku Prawdopodobieństwa, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii, Uniwersytet Wrocławski we Wrocławiu,
- październik 1976 r. – wrzesień 1981 r.: asystent w Zakładzie Rachunku Prawdopodobieństwa, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii, Uniwersytet Wrocławski we Wrocławiu,
- Promotorstwo kilkunastu prac magisterskich na Uniwersytecie Wrocławskim.

Publikacje, wygłoszone referaty na konferencjach, inne wystąpienia, osiągnięcia dydaktyczne i w zakresie popularyzacji nauki, nagrody:

- **Publikacje**

  Jestem autorem łącznie 36 artykułów naukowych. 10 prac (w tym 6 wchodzących w skład osiągnięcia naukowego) opublikowano w czasopismach znajdujących się w bazie Journal Citation Reports, w tym: w Journal of Mathematical Analysis and Applications (5 prac), w Mathematical Inequalities and Applications (3 prace), Statistics and Probability Letters (1 praca), w Przeglądzie Elektrotechnicznym (Electrical Review) (1 praca). Sumaryczny impact factor wynosi 7,497. Suma punktów, liczonych według obowiązującej punktacji MNiSW, jest równa 443. 18 prac zostało napisanych wspólnie z drugim autorem (współautorzy: M. Karpiński - 1 praca, N. A. Kuzemko - 1 praca, B. Micherda - 1 praca, M. Mahmud - 1 praca, K. Nikodem - 1 praca, S. Rajba - 13 prac, P. Raif - 2 prace, J. Szczepanik - 1 praca, Sz. Wąsowicz - 4 prace).

  Moje prace były cytowane łącznie 84 razy (83 razy według Google Scholar). Indeks Hirscha h-indeks wynosi 5 oraz 10-indeks wynosi 3 (według Google Scholar). Baza MathSciNet odnotowuje 18 moich prac, 9 cytowań (przez 7 autorów) moich prac opublikowanych pod nazwiskiem T. Rajba, oraz 7 cytowań (przez 6 autorów) moich prac opublikowanych pod nazwiskiem T.Niedbalska i Niedbalska-Rajba. Baza Web of Science odnotowuje 14 moich cytowanych prac. Według bazy Web of Science moje prace były cytowane 23 razy (w tym 11 bez autocytowań), a indeks Hirscha wynosi 1.

Indeks Hirscha wg. WoS wynosi 1, jakkolwiek są dwie moje prace opublikowane w czasopimach znajdujących się w bazie Journal Citation Reports, które są cytowane 2 razy każda bez autocytowań w czasopismach z bazy JCR. Praca [**R5**] opublikowana w czasopiśmie znajdującym się w bazie JCR jest cytowana 2 razy bez autocytowań w czasopismach z bazy JCR: [**89**], [**90**]. Praca [**P26**] opublikowana w czasopiśmie znajdującym się w bazie JCR jest cytowana 2 razy bez autocytowań w czasopismach z bazy JCR: [**145**], [**146**].

Najczęściej cytowana jest praca [**P3**] o półgrupach rozkładalności na prostej rzeczywistej : 13 razy (w tym 11 bez autocytowań), 12 razy (w tym 9 bez autocytowań) wg Google Scholar, 7 razy według MathSciNet (w tym 5 razy bez autocytowań), 7 razy wg Web of Science (w tym 5 razy bez autocytowań). Ponadto, praca [**P3**] (opublikowana w Colloquium Mathematicum, które obecnie jest na liście JCR) jest cytowana bez autocytowań w 5 pracach z listy JCR ([**81**], [**31**], [**106**], [**107**], [**1**]) oraz w monografii [**87**].

Praca [**P20**] była cytowana 12 razy (w tym 4 razy bez autocytowań) wg Google Scholar oraz 1 raz wg Web of Science. Praca [**P21**] była cytowana 12 razy (w tym 10 bez autocytowań), 11 razy (w tym 9 razy bez autocytowań) wg Google Scholar, 3 razy wg MathSciNet oraz 3 razy (w tym 2 razy bez autocytowań) wg Web of Science. Praca [**P24**] była cytowana 6 razy (w tym 3 razy bez autocytowań) wg Google Scholar oraz 1 raz wg Web of Science. Praca [**P26**] była cytowana 5 razy (w tym 5 razy bez autocytowań), 3 razy (w tym 3 razy bez autocytowań) wg Google Scholar, 1 raz (w tym 1 raz bez autocytowań) wg MathSciNet oraz 2 razy (w tym 2 razy bez autocytowań) wg Web of Science. Praca [**P1**] była cytowana 4 razy (w tym 2 razy bez autocytowań) wg Google Scholar, 1 raz wg MathSciNet oraz 1 raz (w tym 1 raz bez autocytowań) wg Web of Science. Praca [**R5**] była cytowana 3 razy (w tym 3 razy bez autocytowań) wg Google Scholar oraz 1 raz (w tym 1 raz bez autocytowań) wg Web of Science. Praca [**R2**] była cytowana 5 razy (w tym 4 razy bez autocytowań [**194**], [**192**], [**151**], [**193**]) wg Google Scholar. Praca [**P22**] była cytowana 3 razy (w tym 3 razy bez autocytowań) wg Google Scholar. Praca [**P23**] była cytowana 3 razy (w tym 3 razy bez autocytowań) wg Google Scholar. Praca [**R6**] była cytowana 3 razy wg Google Scholar, 2 razy wg MathSciNet oraz 1 raz wg Web of Science. Praca [**R4**] była cytowana 2 razy wg Google Scholar, 2 razy wg MathSciNet oraz 1 raz wg Web of Science.

- **Konferencje**

41 referatów wygłoszonych na konferencjach naukowych,
19 na krajowych i 22 na międzynarodowych konferencjach, w tym 4 referaty na konferencjach międzynarodowych zostały wygłoszone przez współautorów.

- **REFERATY NA KONFERENCJACH MIĘDZYNARODOWYCH**

(1) T. Rajba, *On probabilistic characterizations of convexity and delta-convexity*, Conference on Inequalities and Applications '14, September 7–13, 2014, Hajdúszoboszló (Hungary).
(2) T. Rajba, *On strongly delta-convex functions of higher order*, 52nd International Symposium on Functional Equations : June 22–29, 2014 Austria, Innsbruck.
(3) T. Rajba, *Probablistic methods for Hermite-Hadamard inequalities*, 51 sth International Symposium on Functional Equations : June 16–23, 2013 Poland, Rzeszów.
(4) T. Rajba, *A generalization of multiple Wright-convex functions via randomization*, The fifteenth International Conference on Functional equations and inequalities, May 1–25 2013, Poland, Ustroń.
(5) T. Rajba, *On (C, m)-semi-self-decomposable distributions on Euclidean spaces*, 28th International Seminar on Stability Problems of Stochastic Models, 3.05–05.06.2009, Zakopane.

(6) T. Rajba, *On the fractional decomposability of infinitely divisible probability measures*, 27th International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, 22–26.10.2007, Nahariya (Israel).
(7) T. Rajba, S. Rajba, M. Karpiński, *Measurement and information system used the mobile phone GSM and Bluetooth*, 15th International Seminar of Metrologists Methods and Technics of Signal Conversion at Physical Measurements, 24–26.09.2007, Lviv (Ukraine).
(8) T. Rajba, *On certain limit distributions of selfdecomposable distributions*, 26th Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, 27.08–2.09.2006, Sovata-Bai (Romania).
(9) T. Rajba, *On limit distributions of some normed sums*, 25th International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, 20–24.09.2005, Maiori, Salerno (Italy).
(10) T. Rajba, *On superinvariant measures on the real line*, 24th Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, 10–17.05.2004, Jurmala (Latvia).
(11) T. Rajba, *A generalization of operator-selfdecomposable distributions on Euclidean spaces*, 23th Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, 12–17.05.2003, Pamplona (Spain).
(12) T. Rajba, S. Rajba, *Estimations of measuring signal transmission quality*, 8th International Conference, 17-19.09.2003, Lviv (Ukraine).
(13) T. Rajba, *Multiply c-decomposable infinitely divisible measures on the real line and their characteristic functions*, 8th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, 23-29.06.2002, Vilnius (Lithuania).
(14) T. Rajba, *A generalization of multiply monotone functions on the real line*, 22th International Seminar on stability Problems for Stochastic Models, Seminar on Statistical data Analysis, (SDA '2002), 25–31.05.2002, Varna (Bulgaria).
(15) T. Rajba, *Classes of multiple decomposable laws*, Eger (Hungary), 21sth Seminar on Stability Problems of Stochastic Models, 28.01– 3.02.2001, Eger (Hungary).
(16) T. Rajba, S. Rajba , *The performance of a digital FSK system with actual discriminator; time distortions effects*, 8th International Conference on Remote Data Transmission, 1987, Praha, Karlovy Vary (Czech Republic).
(17) T. Rajba, *On decomposability semigroups for certain probability measures*, 2th International Conference on Probability Theory on Vector Spaces, Błażejewko, 1979 (Poland).
(18) T. Rajba, *An example of the decomposability semigroup*, 1sth International Conference on Probability Theory on Vector Spaces, Trzebieszowice, 1977 (Poland).

REFERATY NA KONFERENCJACH MIĘDZYNARODOWYCH WYGŁOSZONE PRZEZ WSPÓŁAUTORÓW

(19) S. Rajba, T. Rajba, P. Raif and M. Mahmud, Wireless Sensor Networks in Application to Patients Health Monitoring , IEEE Symposium Series on Computational Intelligence 2013, April 15–19, 2013, Singapore, (praca została przyjęta do prezentacji na IEEE Symposium Series on Computational Intelligence 2013, referat wygłoszony przez współautora P. Raifa).
(20) T. Rajba, K. Nikodem and Sz, Wąsowicz, On strongly Schur-convex functions, 49th International Symposium on Functional Equations, Graz-Mariatrost (Austria), June 19–26, 2011 (referat wygłoszony przez Sz, Wąsowicza).
(21) B. Micherda, T. Rajba, On some inequalities of Hermite-Hadamard-Fejér type for (k,h)-convex functions, 14th International Conference on Functional Equations and Inequalities, Będlewo, 11–17.IX.2011 (referat wygłoszony przez B. Micherda).
(22) T. Rajba, Sz. Wąsowicz, Probabilistic characterization of strong convexity, 48th International Symposium on Functional Equations, Batz-sur-Mer, France, June 13–18, 2010 (referat wygłoszony przez Sz. Wąsowicza).

- **REFERATY NA KONFERENCJACH KRAJOWYCH**

(1) T. Rajba, *Probablistyczna charakteryzacja funkcji delta-wypukłej*, XIII Konferencja z probabilistyki, Będlewo, 18–23.05. 2014.

(2) T. Rajba, *O zastosowaniu reprezentacji całkowej funkcji wypukłej n-tego rzędu*, Czterdziesta druga ogólnopolska konferencja zastosowań matematyki, Zakopane-Kościelisko, 27.08–3.09.2013.
(3) T. Rajba, *O zastosowaniu metod probabilistycznych do badania nierówności między kwadraturami*, Czterdziesta pierwsza ogólnopolska konferencja zastosowań matematyki: Zakopane-Kościelisko, 4–11.IX.2012.
(4) T. Rajba, *O zastosowaniu wypukłych porządków stochastycznych do nierówności typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra*, XII Konferencja z probabilistyki, Będlewo, 24–28.V.2012 .
(5) T. Rajba, *O zastosowaniach twierdzenia Choqueta do badania losowo nadniezmienniczych miar*, Czterdziesta ogólnopolska konferencja zastosowań matematyki: Zakopane-Kościelisko, 30.VIII–6.IX.2011.
(6) T. Rajba, *Funkcje ściśle wypukłe i ich interpretacje probabilistyczne*, XI Konferencja z probabilistyki, Będlewo, 24–28.V.2010.
(7) T. Rajba, *O ułamkowych półgrupach rozkładalności*, X Konferencja z probabilistyki, Będlewo, 19–23.V.2008.
(8) T. Rajba, P. Rajba, *O oszacowaniu prawdopodobieństwa średniej liczby sukcesów*, Trzydziesta siódma ogólnopolska konferencja zastosowań matematyki: Zakopane-Kościelisko, 8–16.IX.2008.
(9) T. Rajba, S. Rajba, *Praktyczne aspekty analizy pomiarów własności czasowych w systemach transmisji synchronicznej*, Trzydziesta siódma ogólnopolska konferencja zastosowań matematyki: Zakopane-Kościelisko, 8–16.IX.2008.
(10) T. Rajba, *On certain classes of limit distributions of m-times selfdecomposable distributions*, IX Konferencja z probabilistyki poświęcona pamięci prof. Kazimierza Urbaniaka, Będlewo, 22–26 maja 2006.
(11) T. Rajba, , *O miarach nadniezmienniczych na prostej*, VIII Konferencja z probabilistyki, Będlewo, 17–21.05.2004.
(12) T. Rajba, *Multiply c-decomposable infinitely divisible measures on the real line and their characteristic functions*, VII Konferencja z probabilistyki, Będlewo, 19–24.05.2002.
(13) T. Rajba, *Zastosowania twierdzenia Choqueta*, Trzydziesta Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, Zakopane-Kościelisko, 18–25.09.2001.
(14) T. Rajba, S. Rajba , *Wskaźniki jakości transmisji cyfrowej w optoliniach*, Trzydziesta Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, 18–25.09.2001, Zakopane-Kościelisko.
(15) T. Rajba, *O rozkładalności miar*, V Krajowe Seminarium Wypukłe Funkcje Wielowartościowe, Bystra, 17–20.X.2001.
(16) T. Rajba, S. Rajba, *Jakość transmisji danych w systemach cyfrowych*, Dwudziesta Dziewiąta Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, Zakopane-Kościelisko, 19–26.IX.2000.
(17) T. Rajba, *On multiply decomposability semigroups of the probability measures on the real line*, VI Konferencja z probabilistyki, Poraj, 05–09.06.2000.
(18) T. Rajba, *Klasy $L(m, R^d, C)$ miar probabilistycznych na przestrzeniach euklidesowych*, IV Konferencja z probabilistyki, Jachranka, 16–21.05.1994.
(19) T. Rajba, S. Rajba, *The performance of a Digital FSK system with actual discriminator: time distortions effects*, Piętnasta Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, 22.09–01.10.1986, Tresna.

- **INNE WYSTĄPIENIA. ODCZYTY POPULARYZATORSKIE**

(1) Wygłoszenie kilkudziesięciu referatów o wynikach własnych badań na Seminarium Probabilistycznym, na Uniwersytecie Wrocławskim w latach 1976 - 1999 oraz na Seminarium Katedralnym, Katedry Matematyki i Informatyki w Akademii Techniczno - Humanistycznej, od 2001.

(2) 6 referatów na Seminarium z równań i nierówności funkcyjnych o wielu zmiennych, na Uniwersytecie Śląskim:
O funkcjach delta-wypukłych n-tego rzędu, I, 10.12.2012.
O funkcjach delta-wypukłych n-tego rzędu, II, 26.11.2012r.
Interpretacja probabilistyczna nierówności Hermite'a- Hadamarda, 16.04.2012.
O funkcjach wypukłych n-tego rzędu, 15.03.2012.
O funkcjach silnie delta-wypukłych, 03.03.2014.
O funkcjach silnie delta-wypukłych II, 10.03.2014.
(3) 2 referaty na Seminarium z równań funkcyjnych, na Uniwersytecie Śląskim:
Porównanie klas funkcji wypukłych wyższych rzędów w sensie Wrighta i Jensena, II, 21.02.2012.
Reprezentacje całkowe funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów, 17.05.2012.
(4) Referat pt. *O randomizacji funkcji wielokrotnie wypukłych w sensie Wrighta*, na Seminarium Katedralnym Katedry Matematyki Wydziału Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Lubelskiej, 13.10.2011.
(5) Referat pt. *O samorozkładalności miar probabilistycznych* na Seminarium Probabilistycznym, na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, 28.05.2003.
(6) Odczyt pt. *Rozkładalność miar probabilistycznych*, 10.10.2002.
na zaproszenie Górnośląskiego Oddziału Polskiego Towarzystwa Matematycznego w Katowicach, na Uniwersytecie Śląskim,
(7) Odczyty popularyzatorskie wygłaszane w ramach Beskidzkiego Festiwalu Nauki i Sztuki:
O paradoksach w rachunku prawdopodobieństwa, 2002.
O prześladowaniu przez pech, 2004.
Czy warto rzucać monetą, 2008.

- **Osiągnięcia dydaktyczne**

Promotorstwo kilkunastu prac magisterskich na Uniwersytecie Wrocławskim w latach 1981 - 1999.

- **Nagrody**

(1) Nagroda Rektora ATH za osiągnięcia naukowe, 2001.
(2) Dwie Nagrody Prorektora Politechniki Łódzkiej za osiągnięcia naukowe, 1999, 2000,
(3) Trzy Nagrody Rektora Uniwersytetu Wrocławskiego, za osiągnięcia naukowe, 1978, 1979, 1982.
(4) Nagroda PAN za prace Z ZAKRESU TEORII PRAWDOPODOBIEŃSTWA, 1981.
(5) Nagroda I STOPNIA, w KONKURSIE POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO na najlepszą prace studencką z teorii prawdopodobieństwa i zastosowań matematyki, za pracę magisterską *Półgrupy rozkładalności miar probabilistycznych na prostej rzeczywistej*, 1976.

- **Recenzowanie publikacji w czasopismach międzynarodowych i krajowych**

Applicationes Mathematicae, 1981 – 1990, kilka zrecenzowanych manuskryptów publikacji,
Aequationes Mathematicae (czasopismo z bazy JCR), 2012 – 2014, trzy recenzje manuskryptów publikacji,
Carpathian Journal of Mathematics (czasopismo z bazy JCR), – 2014, jedna recenzja manuskryptu publikacji,
Journal of Mathematical Inequalities (czasopismo z bazy JCR), – 2014, jedna recenzja manuskryptu publikacji.

Bibliografia

[1] T. Aoyama and T. Nakamura, *Behaviors of multivariable finite Euler products in probabilistic view*, Mathematische Nachrichten, 286 (17-18) (2013), 1691–1700.

[2] S. Abramovich, S. Ivelić and J. Pečarić, *Refinement of Inequalities Related to Convexity via Superquadracity, Weaksuperquadracity and Superterzacity*, Inequalities and Applications 2010, International Series of Numerical Mathematics, 161 (2012), 191–207.

[3] A. Azócar, J. Gimenez, K. Nikodem, J. L. Sánchez , *On strongly midconvex functions*, Opusc. Math. 31(1) (2011), 15–26.

[4] A. Azócar, K. Nikodem and Roa G., *FEJÉR-TYPE INEQUALITIES FOR STRONGLY CONVEX FUNCTIONS*, Annales Mathematicae Silesianae 26 (2012), 43–54, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego nr 3031, Katowice.

[5] F. Baccelli, S. Machiraju, D. Veitch, and J. Bolot , *The Role of PASTA In Network Measurement, Computer Communication Review* , Proceedings of ACM Sigcomm 2006, 11-15 Sept 2006 36(4):231–242.

[6] F. Baccelli, S. Machiraju, D. Veitch, and J. Bolot , *On Optimal Probing for Delay and Loss Measurement*, ACM Internet Measurement Conference (IMC'07), 24-26 Oct 2007, 291–302.

[7] Z. Baran et al., *Podstawy transmisji danych*, WKŁ, Warszawa 1982.

[8] O. Barndorff-Nielsen and N. Shepard, *Modelling by Lévy processes for financial econometrics*, Lévy processes: Theory and Applications 248 (2001), 283–318.

[9] H. Busemann and W. Feller, *Krümmungseigenschaften Konvexer Flächen*, Acta Math., 66 (1936), 1–47.

[10] E. F. Beckenbach, *Generalized convex functions*, Bull. Am. Math. Soc., 43 (1937), 363–371 .

[11] P. Becker-Kern and W. Hazod, *Mehler hemigroups and embedding of discrete skew convolution semigroups on simply connected nilpotent Lie groups*, In: Infinite dimensional harmonic analysis IV. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2009), 32-46.

[12] D. J. Bem, *Systemy telekomunikacyjne*, Part 1, Wyd. Polit. Wrocławskiej, Wrocław 1978.

[13] W. R. Bennet and J. R. Davey, *Data Transmission*, McGraw-Hill, New York 1965.

[14] F. Bernstein and G. Doetsch, *Zur Theorie konvexen Funktionen* , Math. Ann. 76 (1915), 514 – 526.

[15] M. Bessenyei, *Hermite–Hadamard-type inequalities for generalized convex functions*, J. Inequal. Pure Appl. Math. 9 (2008), 1–51.

[16] M. Bessenyei and Zs. Páles, *Higher-order generalizations of Hadamard's inequality*, Publ. Math. Debrecen 61 (2002), no. 3-4, 623–643.

[17] M. Bessenyei, Zs. Páles, *Hadamard-type inequalities for generalized convex functions*, Math. Inequal. Appl. 6(3) (2003) 379–392.

[18] M. Bessenyei and Zs. Páles, *On generalized higher-order convexity and Hermite–Hadamard-type inequalities*, Acta Sci. Math. (Szeged) 70 (2004), no. 1-2, 13–24. MR 2005e:26012.

[19] M. Bessenyei, Zs. Páles, *Characterizations of convexity via Hadamard's inequality*, Math. Inequal. Appl. 9 (1) (2006) 53–62.

[20] M. Bessenyei, Zs. Páles, *Characterization of higher-order monotonicity via integral inequalities*, Proc. R. Soc. Edinburgh Sect. A 140A (2010) 723–735.

[21] P. Billingsley. *Probability and measure. Third Edition.* John Wiley and Sons, New York 1995.

[22] H. Blumberg, *On convex functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 29 (1919), 40 – 44.

[23] M. Bombardelli and S. Varošanec, *Properties of h-convex functions related to the Hermite-Hadamard-Fejér inequalities*, Comput. Math. Appl. 58 (9) (2009), 1869–1877.

[24] N. Bouzar-Sreedharan and S. Metron, *Comments on α-decomposability*, International Journal of Statistics, 66(2) (2008), 243-252.

[25] H. Brass and K. Petras, *Quadrature theory. The theory of numerical integration on a compact interval*, Mathematical Surveys and Monographs, 178. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[26] H. Brass and G. Schmeisser, *Error estimates for interpolatory quadrature formulae*, Numer. Math. 37 (3) (1981), 371–386.

[27] W. W. Breckner, *Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen*, Publ. Inst. Math. (Beograd) **23 (37)** (1978), 13–20.

[28] J.L. Brenner and H. Alzer, *Integral inequalities for concave functions with applications to special functions*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **118** (1991), 173–192.

[29] A. L. Brown, *Best approximation by continuous n-convex functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 57 (1989) 69–76.

[30] P. S. Bullen, *A criterion for n-convexity*, Journal of Mathematics 36 (1971) 81–98.

[31] J. Bunge, *Nested classes of C-decomposable laws*, Ann. Probab. 25 (1997), 215–229.

[32] G. T. Cargo, *Comparable means and generalized convexity*, J. Math. Anal. Appl. 12 (1965) 387–392.

[33] M. Castillo, N. Merentes and J.L. Sánchez, *FUNCIONES m-FUERTEMENTE CONVEXA CON MODULO c.*

[34] G. S. Choi, *Criteria for recurrence and transsience of semistable processes*, Nagoya Math. J. 134 (1994), 91–106.

[35] A. Ciborski et al., *Primienienie detektora kaczestwa signała k ocenke peredaczi diskretnych soobszczenij*, 5 Mezinarodni Konference, dalkovy prenos dat, t.II, 3–9, Praha 1981.

[36] P. Czinder, *A weighted Hermite-Hadamard-type inequality for convex-concave symmetric functions*, Publ. Math. Debrecen 68 (2006), no. 1-2, 215–224. MR 2006m:26044.

[37] P. Czinder and Zs. Páles, *An extension of the Hermite-Hadamard inequality and an application for Gini and Stolarsky means*, J. Inequal. Pure Appl. Math. 5 (2) (2004), Article 42, pp. 8 (electronic). MR 2005d:26020.

[38] A. Daniluk, *RS232 – Praktyczne oprogramowanie*, helion, Gliwice 2002.

[39] M. Denuit, C.Lefevre and M. Shaked, *The s-convex orders among real random variables, with applications.* Mathematical Inequalities & Applications, 1 (1998), 585–613.

[40] S. S. Dragomir and S. Fitzpatrick, *s-Orlicz convex functions in linear spaces and Jensen's discrete inequality*, J. Math. Anal. Appl. **210, no. 2** (1997), 419–439.

[41] S. S. Dragomir and S. Fitzpatrick, *Hadamard's inequality for s-convex functions in the first sense and applications*, Demonstratio Math. **31, no. 3** (1998), 633–642.

[42] S. S. Dragomir and C. E. M. Pearce, *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, RGMIA Monographs, Victoria University, 2000. (Online: http://rgmia.vu.edu.au/monographs/)

[43] S. S. Dragomir, C. E. M. Pearce, *J. Pečarić, Means, g-Convex Dominated Functions and Hadamard-Type Inequalities*, Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences 18(2) (2002), 161-173.

[44] R.M. Dudley, *Real Analysis and Probability*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol.74, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, revised reprint of the 1989 original.

[45] N. Elezović and J. E. Pečarić, Differential and integral F-means and applications to digamma function, Math. Inequal. Appl., 3 (2000), 189–196.

[46] L. Fejér, *Über die Fourierreihen, II*, Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss. **24** (1906), 369–390.

[47] W. Feller, *Completely monotone functions and sequences*, Duke Math. J. 5 (1939), 661–674.

[48] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1978.

[49] A.M. Fink, *A best possible Hadamard inequality*, Math. Inequal. Appl. 2 (1998), 223-230.

[50] M. Fisz, *A generalization of a theorem of Khintchine*, Studia Math. 14 (1954), 310–313.

[51] R. Ger, Stability of polynomial mappings controlled by n-convex functionals, WSSIAA3 (1994), 255-268.

[52] R. Ger and K. Nikodem, *Strongly convex functions of higher order*, Nonlinear Anal., 74 (2011), 661–665.

[53] A. Gilányi and Zs. Páles, *On convex functions of higher order*, Math. Inequal. Appl., 11 (2) (2008), 271–282.

[54] A. Gilányi and Zs. Páles. *On Dinghas-type derivatives and convex functions of higher order*, Real Anal. Exchange, 27 (2) (2001-02), 485–493.

[55] A. Gilányi, N. Merentes, K. Nikodem and Zs. Páles, *Characterizations and decomposition of strongly Wright-convex functions of higher order*, Opuscula Mathematica, 35 (1) (2015), 37–46.

[56] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley, Reading, 1954.

[57] E. K. Godunova and V. I. Levin, *Neravenstwa dlja funkcii sirokogo klassa, soderzascego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkcii*, in: Vycislitel. Mat. i. Fiz. Mezvuzov. Sb. Nauc. Trudov, MGPI, Moskva, (1985), 138–142.

[58] A. Granata, *A geometric characterization of nth order convex functions*, Pacific Journal of Mathematics, 98 (1) (1982), 91 – 98.

[59] D. J. Gooding, *Performance monitor techniques for eligital receivers base on extrapolation of error rate*, IEEE Trans. Comm.Tech. Vol. COM-16 (6) (1968), 380–387.

[60] J. Grębosz, *Symfonia C++*, Oficyna Kallimach, Kraków 1966.

[61] A. K. Grincevicius, *On the continuity of the distribution of a sum of dependent variables connected with independent walks on lines*, Theory Probab. Appl. 19 (1974), 163–168.

[62] J. Hadamard, *Etude sur les propriétés des fonctions entiéres et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, J. Math Pures Appl., 58 (1893), 171 – 215.

[63] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, 2nd ed., Cambridge University Press, London-New York, 1952.

[64] P. Hartman, *On functions representable as a difference of convex functions*, Pacific J. Math., 9 (1959), 707–713.

[65] A. Házy, *BERNSTEIN-DOETSCH TYPE RESULTS FOR. k; h/-CONVEX FUNCTIONS*, Miskolc Mathematical Notes, 13 (2) (2012), 325-336.

[66] E. Hermanowicz, *Oczkowa metoda badania zniekształceń w torach PCM*, Przegląd Telekomunikacyjny, 7 (1976).

[67] J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, Fundamentals of convex analysis, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2001.

[68] O. Hölder, *Über einen Mittelwerthssatz*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, (1889), 38 – 47.

[69] E. Hopf, *Über die Zusammenhänge zwischen gewissen höheren Differezenquotienten reeler Funktionen einer reelen Variablen und deren Defferzierbarkeitseigenschaften*, Dissertation, Friedrich Wilhelms Universität, 1926,

[70] H. Hudzik and L. Maligranda, *Some remarks on s-convex functions*, Aequationes Math. **48, no. 1** (1994), 100–111.

[71] I. A. Ibragimov and Yu. V. Linnik, *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*, J. F. C. Kingman (ed.), Wolters–Noordhoff, Groningen, 1971.

[72] A. I. Ilinskii, *On c-decomposability of characteristic functions*, Litovsk. Mat. 18 (1978), 45–50 (in Russian).

[73] A. Janicki and A. Weron, *Simulation and Chaotic Behaviour of α-stable Stochastic Processes*, Marcel Dekker, New York, 1994.

[74] J.L.W.V. Jensen, *Om konveksa funktioner og uligheder imellem middelvaerdier*, Nyt. Tidsskrift for Mathematik, 16 B (1905), 49 –69.

[75] J.L.W.V. Jensen, *Suir les fonctions convexes et les inégalités les valeurs moyennes*, Acta Math., 30 (1906).

[76] B. Jessen, Bemaerkinger om konvekse functioner og uligheder imellem middel- vaerdier. I. Matematisk tidsskrift. B., (1931), 17–28.
[77] Z. J. Jurek, *Convergence of types, selfdecomposability and stability of measures on linear spaces*, in: Probability in Banach Spaces. Proceedings. 1980. Lecture Notes in Math. 860, A. Beck (ed.), Springer-Verlag, 1981, 257–267.
[78] Z. J. Jurek, *An integral representation of operator-selfdecomposable random variables*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 30 (1982), 385–393.
[79] Z. J. Jurek, *Structure of a class of operator-selfdecomposable probability measures*, Ann. Probab. 10 (1982), 849–856.
[80] Z. J. Jurek, *The classes $L_m(Q)$ of probability measures on Banach spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 31 (1983), 51–62.
[81] Z. J. Jurek, *Limit distributions and one-parameter groups of linear operators on Banach spaces*, J. Multivariate Anal. 13 (1983), 578–604.
[82] Z. J. Jurek, *On polar coordinates in Banach spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 32 (1984), 61–66.
[83] Z. J. Jurek, *Remarks concerning the theory of operator-limit distributions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 36 (1988), 307–313.
[84] Z. J. Jurek, *On Lévy (spectral) measures of integral form on Banach spaces*, Probab. Math. Statist. 11 (1990), 139–148.
[85] Z. J. Jurek, *Selfdecomposability: an Exception or a Rule?*, Annales Universitatis Mariae Curie–Sklodowska 51 (1997), no. 10, 93–107.
[86] Z. J. Jurek, *Different Aspects Of Selfdecomposability*, Aarhus University Miscellanea 11 (1999), 84–90.
[87] Z. J. Jurek and J. D. Mason, *Operator-limit distributions in probability theory*, J. Wiley, New York, 1993.
[88] Z. J. Jurek and W. Vervaat, *An integral representation for selfdecomposable Banach space valued random variables*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 62 (1983), 247–262.
[89] S. I. Kalmykov and D. B. Karp, *Log-concavity for series in reciprocal gamma functions and applications*, Integral Transforms and Special Functions, 24 (11) (2013), 859-872.
[90] S. I. Kalmykov and D. B. Karp, *Log-convexity and log-concavity for series in gamma ratios and applications*, J. Math. Anal. Appl., 406 (2) (2013), 400-418.
[91] J. Karamata, *Sur une inégalité rélative aux fonctions convexes*, publ. Math. Univ. Belgrade, 1 (1932), 145–148.
[92] S. Karlin and A. Novikoff, Generalized convex inequalities. Pacific J. Math., 13 (1963), 1251–1279 .
[93] S. Karlin, W. J. Studden, Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York, 1966.
[94] M. Klaričić Bakula, J. Pečarić and J. Perić, *Extensions of Hermite–Hadamard inequality with applications*, Math. Inequal. Appl. 15 (4), (2012), 899–921.
[95] B. Kopociński, *Zarys teorii odnowy i niezawodności*, Warszawa, 1973.
[96] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, vol. 489, Państwowe Wydawnictwo Naukowe – Uniwersytet Śląski, Warszawa-Kraków-Katowice, 1985,
[97] A. Kumar and B. M. Schreiber, *Self-decomposable probability measures on Banach space*, Studia Math. 53 (1975), 55–71.
[98] A. Kumar and B. M. Schreiber, *Characterization of subclasses of class L probability distributions*, Ann. Probab. 6 (1978), 279–293.
[99] A. Kumar and B. M. Schreiber, *Representation of certain infinitely divisible probability measures on Banach spaces*, J. Multivariate Anal. 9 (1979), 288–303.
[100] B. P. Lathi, *systemy telekomunikacyjne*, WNT, Warszawa 1972.
[101] M.R. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootzen , *Extremes and related properties of random sequences and processes*, Berlin - New York, 1986.
[102] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces, Isoperimetry and Processes*, Springer, 1991.
[103] P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier–Villars, Paris, 1937.
[104] H. Leiva, N. Merentes, K. Nikodem, K. and J .L. Sánchez, *Strongly convex set-valued maps*, Journal of Global Optimization, 57 (3) (2013), 695-705.
[105] W. Linde, *Probability in Banach Spaces — Stable and Infinitely Divisible Distributions*, Wiley, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore, 1986.
[106] A. Lindner and K. Sato, *Continuity properties and infinite divisibility of stationary distributions of some generalized Ornstein-Uhlenbeck processes*, Ann. Probab., 37 (2009), 250–274.
[107] A. Lindner and K. Sato, *Properties of stationary distributions of a sequence of generalized Ornstein-Uhlenbeck processes, Math. Nachr.*, Math. Nachr., 284 (2011), 2225-2248.
[108] M. Loéve, *Nouvelles classes de lois limites*, Bull. Soc. Math. France 73 (1945) 107–126.
[109] M. Loéve, *Probability Theory*, New York 1955.
[110] B. R. Levin, *Teoreticheskie osnovy statisticheskoi raditekhniki*, Moskva 1965.
[111] I. Lubacz, *Analiza możliwości określenia przydatności łącza do transmisji cyfrowej na podstawie krótkotrwałego pomiaru*, Rozprawy elektrotechniczne, z. 1, 1976.
[112] A. Lupas, *A generalisation of Hadamard's inequality for convex functions*, Univ. Beograd. Publ. Elek. Fak. Ser. Mat. Fiz., no. 544-576, (1976), 115–121.
[113] M. Maejima and Y. Naito, *Semi-selfdecomposable distributions and a new class of limit theorems*, Prob. Theory Relat. Fields 112 (1998), 13–31.
[114] M. Maejima, K. Sato and T. Watanabe, *Operator Semi-Selfdecomposability, (C,Q)-Decomposability nad Related Nested Classes*, Tokyo J. Math 22 (1999), 473–509.
[115] M. Maejima, K. Sato and T. Watanabe, *Completely Operator Semi-Selfdecomposable Distributions*, Tokyo J. Math 23 (2000), 235–253.

[116] M. Maejima, K. Suzuki and Y. Tamura, *Some multivariate infinitely divisible distributions and their projections*, Probab. Math. Statist. 19 (1999), 421–428.

[117] Gy. Maksa, Zs. Páles, *The equality case in some recent convexity inequalities*, Opuscula Math. **31, no. 2** (2011), 269–277.

[118] Gy. Maksa and Zs. Páles, *Decomposition of higher order Wright-convex functions*, J. Math. Anal. Appl. 359 (2) (2009), 439–443,

[119] A. W. Marschall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of majorization and Its Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 143 (1979) Academic Press, New York .

[120] J. Matkowski and T. Świątkowski, *On subadditive functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 187–197.

[121] J. E. Mazo and J. Salz, *Theory of error rates for digital FM*, Bell System Techn. J., 45 (1966), 1511–1535.

[122] A. J. McNeil, J. Nešlehová, Multivariate Archimedean copulas, d-monotone functions and l-norm symmetric distributions, Ann. Statist. 37 (5B) (2009) 3059-3097.

[123] M. M. Meerchaert and H. P. Scheffer, *Series representation for semistable laws and their domain of semistable attraction*, J. Theor. Probab. 9 (1996), 931–959.

[124] O. Mejıa , N. Merentes and K. Nikodem, *Strongly concave set-valued maps*, Escuela de Matemáticas, Mathematica Aeterna, 4 (5) (2014), 477 – 487.

[125] N. Merentes, K. Nikodem, *Remarks on strongly convex functions*, Aequationes Math., 80 (2010), 193–199.

[126] N. Merentes, K. Nikodem and S. Rivas, *Remarks on strongly Wright–convex functions*, Ann. Pol. Math, 102(3)(2011), 271-278.

[127] N. Merentes and S. Rivas, *EL DESARROLLO DEL CONCEPTO DE FUNCTIÓN CONVEXA*, XXVI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS, EMALCA-VENEZUELA 2013 (in Spanish).

[128] L. Michalski, K. Eckerdorf, J. Kucharski *Termometria: przyrządy i metody*, Politechnika Łódzka, Łódź 1998.

[129] B. A. Miller, B. Chatschik, *Uwolnij się od kabli: Bluetooth*, Helion, Gliwice 2003.

[130] F. Misheikis, *About certain classes of limiting laws*, Litovsk. Mat. Sb. 12 (1972), no. 3, 101–106 (in Russian).

[131] F. Misheikis, *Certain extensions of the class od stable distributions*, Litowsk. Mat. Sb. 12 (1972), no. 3, 89–99 (in Russian).

[132] F. Misheikis, *On certain classes of limit distributions*, Litovsk. Mat. Sb. 12 (1972), no. 4, 133–152 (in Russian).

[133] F. Misheikis, *Some limiting theorem for distributions of partial sums of a sequence of independent random variables*, Litowsk. Mat. Sb 14 (1974), no. 1, 129–140.

[134] F. Misheikis, *On intersection of some distribution classe*, Litovsk. Mat. Sb. 15 (1975), no. 2, 61-65 (in Russian).

[135] F. Misheikis, *Interrelationship between certain classes of limit distributions*, Lithuanian. Math. J. 15 (1976), 243–246 (in Russian).

[136] F. Misheikis, *On limit distributions of normalized partial sums of a sequence of infinite dimensional random elements*, Litowsk. Mat. Sb 23 (1983), no. 1, 152–162.

[137] D. S. Mitrinović and I. B. Lacković, *Hermite and convexity*, Aequationes Math. **28, no. 3** (1985), 229–232.

[138] F. C. Mitroi, *Connections Between the Jensen and the Chebychev Functionals*, Inequalities and Applications 2010,(2012), 217–227.

[139] E. Mohr, *Beitrag zur Theorie der konvexen Funktionen*, Math. Nachr., 8 (1951), 133 – 148.

[140] J. Mrowiec, *On Wright-convex functions and Jensen-convex functions of higher order*, Manuscript.

[141] C. T. Ng, *Functions generating Schur–convex sums*, In *General inequalities, 5 (Oberwolfach, 1986)*, volume 80 of *Internat. Schriftenreihe Numer. Math.*, pages 433–438. Birkhäuser, Basel, 1987.

[142] C.P. Niculescu, *Convexity according to means*, Math. Inequal. Appl., 6 (2003), 571–579.

[143] C. P. NICULESCU and L. E. PERSSON, *Convex functions and their applications. A contemporary approach*, *Springer*, New York 2006.

[144] C.P. Niculescu and F. Popoviciu, *The extension of majorization inequalities within the framework of relative convexity*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics (JIPAM) 7 (1)(2006), Article No. 27, 6pp.

[145] M. Niezgoda, *ON (k, h; m)–CONVEX MAPPINGS AND APPLICATIONS*, Math. Ineq. Appl,, 17 (2) (2014), 665–678.

[146] M. Niezgoda, *REMARKS ON SHERMAN LIKE INEQUALITIES FOR (alfa, beta)-CONVEX FUNCTIONS*, Math. Ineq. Appl., 17 (4) (2014), 1579–1590.

[147] K. Nikodem. *On some class of midconvex functions*, Ann. Polon. Math., 50(2):145–151, 1989.

[148] K. Nikodem, *On Strongly Convex Functions and Related Classes of Functions*, Handbook of Functional Equations, Springer New York, 2014. 365-405.

[149] K. Nikodem, Zs. Páles, *Generalized convexity and separation theorems*, J. Conv. Anal. 14 (2) (2007) 239–247.

[150] J. Ohlin, *On a class of measures of dispersion with application to optimal reinsurance*, ASTIN Bulletin 5 (1969), 249–266.

[151] A. Olbryś, T. Szostok, *Inequalities of the Hermite-Hadamard type involving numerical differentiation formulas*, arXiv preprint arXiv:1411.7859v1 [math.CA].

[152] M. E. Özdemir, *On iyengar-type inequalities via quasi-convexity and quasi-concavity*, Miskolc Mathematical Notes, 15 (1) (2014), 171–181.

[153] Z. Palés, *ON WRIGHT-BUT NOT JENSEN-CONVEX FUNCTIONS OF HIGHER ORDER*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp., 41 (2013), 227–234.

[154] J. A. Palmer, *Function curvature, relative convexity and conjugate curvature*, Technical Report, ECE Dept., UCSD (2002).

[155] J. A. Palmer, *Relative Convexity*, Technical Report, ECE Dept., UCSD (2003).

[156] P. Papantoni-Kazakos and J. M. Paz *The performance of a digital FM system with discriminator. Intersymbol interference effects*, IEEE Trans. Comm. Tech., 23 (1975), 867–877.

[157] C. E. M. Pearce and A. M. Rubinov, *P-functions, quasi-convex functions and Hadamard-type inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **240, no. 1** (1999), 92–104.

[158] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, *Convex functions*, Academic Press, Inc. (1992).
[159] R. P. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem*, New York, 1966.
[160] A. Pinkus, D. Wulbert, *Extending n-convex functions*, Studia Math. 171 (2) (2005).
[161] K. Plewko A. Kostka et al., *Metody i przyrządy pomiarowe w teletransmisji cyfrowej*, WKŁ, Warszawa 1979.
[162] K. Plewko, *Nowe wielkości charakteryzujące zniekształcenia czasowe i odpowiadające tym wielkościom metody pomiarowe w zastosowaniu do przebiegow telegraficznych teledacyjnych*, Praca doktorska, Instytut Łączności, Warszawa 1974.
[163] E. S. Polovinkin, *Strongly convex analysis*, Sbornik Mathematics 187 (2) (1966) 103–130.
[164] B. T. Polyak, *Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions*, Soviet. Math. Dokl. 7 (1966) 72–75.
[165] T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Mathematica (Cluj) 8, 1934, 1–85.
[166] T. Popoviciu. Notes sur les fonctions convexes d'ordre superieur. Mathematica, 12 (1936), 81–92.
[167] T. Popoviciu, *Les Fonctions Convexes*, Hermann, Paris, 1944,
[168] T. Popoviciu, *Les Fonctions Convexes*, Hermann, Paris, 1944.
[169] S. Rajba, *Wpływ statycznych zniekształceń czasowych na stopę błędów w transmisji danych w obecności szumu gaussowskiego*, Przegląd Telekomunikacyjny, 1 (1981).
[170] A. Ralston, *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, London, Sydney, 1965.
[171] S. O. Rice, *Noise in FM receivers*, Chapter 25 in M. Rosenblatt (ed.), Time Series Analysis, J. Wiley, New York 1963.
[172] A. W. Roberts and D. E. Varberg, *Convex Functions*, Pure and Applied Mathematics, vol. 57, Academic Press, New York-London, 1973.
[173] R. T. Rockalellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, N. J. 1970.
[174] S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces. Second edition*, PWN, Warszawa, 1984.
[175] H. L. Royden, Real analysis, Collier Macmillan (1966).
[176] R. A. Rosenbaum, *Sub-additive functions*, Duke Math J. 17 (1950), 227–247.
[177] G. N. Sakovic, *Solution of a mutivariate functional equation*, Ukrain. Mat. Zb. 13 (1961), 173–189 (in Russian).
[178] G. N. Sakovic, *Multivariate stable distribution*, PhD thesis, University of Kiev, 1965 (in Russian; unpublished).
[179] G Samorodnitsky and Taqqu M. S., *Stable non–Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall, London, 1993.
[180] M. Z. Sarikaya, E. Set and M. E. Özdemir, *On some new inequalities of Hadamard type involving h-convex functions*, Acta Math. Univ. Comenian. **79, no. 2** (2010), 265–272.
[181] K. Sato, *Urbanik's class L_m of probability measures*, Ann. Sci. Coll. Lib. Arts Kanazawa Univ. 15 (1978), 1–10.
[182] K. Sato, *Class L of Multivariate Distributions and its Subclasses*, J. Multivariate Anal. 10 (1980), 207–232.
[183] K. Sato, *Absolute continuity of multivariate distributions of class L*, J. Multivariate Anal. 12 (1982), 89–94.
[184] K, Sato, *) Stochastic integrals with respect to Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Sûgaku, 63 (2) (2011), 17–37 (in Japanese).
[185] K, Sato, *) Stochastic integrals with respect to Lévy processes and infinitely divisible distributions*, SUGAKU EXPOSITIONS, 27 (1) (2014), 19–42.
[186] K. Sato and M. Yamazato, *Operator-selfdecomposable as limit distributions of processes of Ornstein-Uhlenbeck type*, Stochastic Process. Appl. 17 (1984), 73–100.
[187] K. Sato and M. Yamazato, *Completely operator-selfdecomposable distributions and operator-stable distributions*, Nagoya Math. J. 97 (1985), 71–94.
[188] I. Schur, *Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf die Determinantentheorie*, Sitzungber. Berl. Math. Ges. 22(1923), 9–20.
[189] L. Schwartz, *Thèorie des distributions*, Paris, Hermann, 1966,
[190] M. Sharpe, *Operator-stable probability distributions on vector groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969), 51–65.
[191] O. Stolz, *Grundzüge der Differenzial- and Integralrechnung*, Vol. I, Teubner, Leipzig, 1893.
[192] T. Szostok, *Levin Stečkin theorem and inequalities of the Hermite-Hadamard type*, arXiv preprint arXiv:1411.7708v1 [math.CA].
[193] T. Szostok, *Ohlin's lemma and some inequalities of the Hermite–Hadamard type*, Aequationes mathematicae: (2014): 1-12 , August 06, 2014.
[194] T. Szostok, *Ohlin's lemma and some inequalities of the Hermite–Hadamard type*, 12 th Debrecen Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities 2014.
[195] E. Talvila, *The regulated primitive integral*, Illinois J. Math. 53 (4) (2009), 1187–1219.
[196] N. V. Thu, *Multiply self-decomposable probability measures on Banach spaces*, Studia Math. 66 (1979), 160–175.
[197] N. V. Thu, *Limit theorems for random fields*, Dissertationes Math. 186 (1981).
[198] N. V. Thu, *Universal multiply self-decomposable probability measures on Banach spaces*, Probab. Math. Statist. 3 (1982), 71–84.
[199] N. V. Thu, *Fractional calculus in probability*, Probab. Math. Statist. 3 (1984), 173–189.
[200] N. V. Thu, *Multiply c-decomposable probability measures on Banach spaces*, Probab. Math. Statist. 5 (1985), 251–263.
[201] N. I. Tikhonov, *Statisticheskaya radiotekhnika*, Sovetskoe Radio, Moskva 1966.
[202] T. T. Tjhunk and P. M. Wittke, *Carrier transmission of binary data in restricted band*, IEEE Trans. Comm. Tech., 4 (1970).

[203] K. Topley, *J2ME, Almanach*, Helion, Gliwice 2003.
[204] G. L. Turin, *An introduction to matched filters*, IRE Trans. Inf. Th., Vol. IT-6 (3) (1960), 311–329.
[205] K. Urbanik, *A representation of self-decomposable distributions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 16 (1968), 209–214.
[206] K. Urbanik, *Self-decomposable probability distributions on* $\mathbb{R}^m$, Zast. Mat. 10 (1969), 91–97.
[207] K. Urbanik, *Lévy's probability measures on Euclidean spaces*, Studia Math. 44 (1972), 119–148.
[208] K. Urbanik, *Limit laws for sequences of normed sums satisfying some stability conditions*, in: Multivariate Analysis–III, P. R. Krishnalah (ed.), Academic Press, New York, 1973, 225–237.
[209] K. Urbanik, *Operator semigroups associated with probability measures*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 23 (1975), 75–76.
[210] K. Urbanik, *Some examples of decomposability semigroups*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 24 (1976), 915–918.
[211] K. Urbanik, *Autoregressive structures and decomposability semigroups*, Probab. Math. Statist. 4 (1984), 67–78.
[212] S. Varošanec, *On h-convexity*, J. Math. Anal. Appl. **326, no. 1** (2007), 303–311.
[213] P.M. Vasić and I.B. Lacković, *Some complements to the paper: On an inequality for convex functions*, Univ. Beograd Publ. Elek. Fak., Ser. Mat. Fiz., no. 544-576 (1976), 59–62.
[214] W. Vervaat, On a stochastic difference equation and a representation of non-negative infinitely divisible random variables, Adv. Appl. Probab. 11 (1979) 750–783,
[215] L. Veselý, L. Zajiček, *Delta-convex mappings between Banach spaces and applications*, Dissertationes Math., 289, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1989.
[216] Sz. Wąsowicz, Some properties of generalized higher-order convexity, Publ. Math. Debrecen 68 (1-2) (2006) 171–182.
[217] Sz. Wąsowicz, Support-type properties of convex functions of higher order and Hadamard-type inequalities, J. Math. Anal. Appl. 332 (2) (2007) 1229-1241.
[218] Sz. Wąsowicz, Support-type properties of generalized convex functions, J. Math. Anal. Appl. 365 (2010) 415-427.
[219] Sz. Wąsowicz, *Inequalities between the quadrature operators and error bounds of quadrature rules*, J. Inequal. Pure Appl. Math. 8 (2) (2007), Article 42, 8 pp.
[220] Sz. Wąsowicz, *On quadrature rules, inequalities and error bounds*, J. Inequal. Pure Appl. Math. 9 (2) (2008), Article 36, 4 pp.
[221] Sz. Wąsowicz, *A new proof of some inequality connected with quadratures* , J. Inequal. Pure Appl. Math. 9 (1) (2008), Article 7, 3 pp.
[222] Sz. Wąsowicz, *On some extremalities in the approximate integration*, Math. Inequal. Appl. 13 (2010), 165–174.
[223] R. E. Williamson, *Multiply monotone functions and their Laplace transforms*, Duke. Math. J., 23 (1956), 189–207.
[224] S. P. Weinstein, *Estimation of small probabilities by linarization of the tail of a probability distribution*, IEEE Trans. Comm. Tech., Vol. COM-19 (6) (1971), 867–877.
[225] E.W. Weisstein, *Chebyshev Quadrature*, From MathWorld - A Wolfram Web Resource. [ONLINE: http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevQuadrature.html].
[226] E.W. Weisstein, *Legendre-Gauss Quadrature*, From MathWorld - A Wolfram Web Resource, [ONLINE: http://mathworld.wolfram.com/Legendre-GaussQuadrature. html].
[227] E.W. Weisstein, *Lobatto Quadrature*, From MathWorld - A Wolfram Web Resource. [ONLINE: http://mathworld.wolfram.com/LobattoQuadrature.html].
[228] E.W. Weisstein, *Simpson's Rule*, From MathWorld - A Wolfram Web Resource. [ONLINE: http://mathworld.wolfram.com/SimpsonsRule.html].
[229] K. Wesołowski, *Systemy radiokomunikacji ruchomej*, WKŁ, Warszawa 2003.
[230] D. V. Widder, *The Laplace Transform*, Princeton Univ. Press, 1941, New Jersey,
[231] S. J. Wolfe, *A characterization of Lévy probability distribution functions on Euclidean spaces*, J. Multivariate Anal. 10 (1980), 379–384.
[232] S. J. Wolfe, *A characterization of certain stochastic integrals, (Tenth Conference on Stochastic Processes and Their Applications, Contributed Papers)*, Stochastic Process. Appl. 12 (1982), 136.
[233] S. J. Wolfe, *On a continuous analogue of the stochastic difference equation* $X_n = \rho X_{n-1} + B_n$., Stochastic Processes. Appl. 12 (1982), 301-312.
[234] S. J. Wolfe, *Continuity properties of decomposable probability measures on Euclidean spaces*, J. Multivariate Anal. 13 (1983), 534–538.
[235] E. M. Wright, *An inequality for convex function*, Amer. Math. Monthly 61 (1954), 620–622.
[236] M. Yamazato, *OL distributions on Euclidean spaces*, Theory Probab. Appl. 29 (1984), 3–18.
[237] O. K. Zakusilo, *On classes of limit distributions in a summation scheme*, Theory Probab. Math Statist. 12 (1976), 44–48 (in Russian).
[238] O. K. Zakusilo, *Some properties of random vectors of the form* $\sum_0^\infty A^i \xi_i$, Theory Probab. Math. Statist. 13 (1977), 59–62 (in Russian).
[239] O. K. Zakusilo, *Some properties of classes* L_c *of limit distributions*, Theory Probab. Math. Statist. 15 (1978), 68–73 (in Russian).
[240] V. M. Zolotarev, *One-dimensional Stable Distributions*, Transl. Math. Monographs 65, Amer. Math. Soc., Providence (1986).

Prace wchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej

[R1] T. Rajba, *On strong delta-convexity and Hermite-Hadamard type inequalities for delta-convex functions of higher order*, Math. Inequal. Appl., 18 (1) (2015), 267–293.

[R2] T. Rajba, *On the Ohlin lemma for Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities*, Math. Inequal. Appl., 17, (2) (2014), 557–571.

[R3] T. Rajba, *On some relative convexities*, J. Math. Anal. Appl., 411 (2) (2014, 876–886.

[R4] T. Rajba, A generalization of multiple Wright-convex functions via randomization. *J. Math. Anal. Appl.*, 388 (1) (2012), 548–565.

[R5] T. Rajba, K. Nikodem and W. Wąsowicz, *On the classes of higher-order Jensen-convex functions and Wright-convex functions*, J. Math. Anal. Appl., 396 (2012), 261-269.

[R6] T. Rajba, *New integral representations of nth order convex functions*, J. Math. Anal. Appl., 379 (2) (2011), 736–747.

Pozostałe prace niewchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej

[P1] T. Niedbalska, *An example of the decomposability semigroup*, Colloq.Math., 39 (1978), 137 – 139.

[P2] T. Rajba, *On decomposability semigroups for certain probability measures*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. 28 (1980), 415 – 418.

[P3] T. Niedbalska-Rajba, *On decomposability semigroups on the real line*, Colloq. Math. 44 (1981), 347–348.

[P4] T. Rajba and S. Rajba, *Pewne związki analityczne występujące pomiędzy statycznymi zniekształceniami czasowymi, szumem gaussowskim, a prawdopodobieństwem błędów w transmisji cyfrowej (Some analitical relations between static temporary distortions, Gaussian noise and error probability in digital transmission)*, Rozprawy Elektrotechniczne (Electronics and Telecommunications Quaterly), 30 (1984), 907-922.

[P5] T. Rajba, *A representation of distributions from certain classes* L_s^{id}, Probability and Mathematical Statistics, 3 (2) (1984), 155 – 171.

[P6] T. Rajba and S. Rajba, *The performance of a digital FSK system with actual discriminator; time distortions effects*, Proceedings of the 8th International Conference on Remote Data Transmission, Praha, Karlovy Vary (Czech Republic), 1987, 80 – 81.

[P7] T. Rajba and S. Rajba *The Performance of a Digital FSK System with Actual Discriminator: Time Distortions Effects*, Applicationes Mathematicae, 20 (2) (1990), 261 – 279.

[P8] T. Rajba, *On certain subclasses of the classes* L_c, Probability and Mathematical Statistics, 19 (1)(1999), 171–180.

[P9] T. Rajba, *On multiple decomposability of probability measures on R*, Demonstratio Mathematica, 34 (2) 2001, 275–294.

[P10] T. Rajba, *Multiply c-decomposable probability measures on R and their characteristic functions*, Probability and Mathematical Statistics, 22 (2) (2002), 443–456.

[P11] T. Rajba, *A generalization of multiply monotone functions*, Radovi Matematicki 11 (2002-2003), 271 – 293.

[P12] T. Rajba and S. Rajba *Estimations of measuring signal transmission quality*, Technique of measurement and metrology, 62 (2003), 16–18.

[P13] T. Rajba, S. Rajba and N.A. Kuzemko, *Estimation of the dispersion of dynamic time distortions in a Digital FSK System*, , Bulletin of the Technology University of Podillya, 2 (1) (2004), 203–206.

[P14] T. Rajba, S. Rajba and J.Szczepanik, *Optimum control system on a yaht*, II National Conference and IV National Seminar Scientific and technical problems in competitional sailing, 1-10.04. 2005 , STS Pogoria, 103–110.

[P15] T. Rajba, *On limit distributions of some normed sums*, Transactions of the 25 Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Maiori/Salerno (Italy) (2005), 234–241.

[P16] T. Rajba, *A generalization of operator-selfdecomposable distributions on Euclidean spaces*, Journal of Mathematical Sciences , Proceedings of the 23 Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, 132 (5) (2006), 660–667.

[P17] T. Rajba, M. Karpinski and S. Rajba *Measurement and information system used the mobile phone GSM and Bluetooth*, PAK, 53 (12)(2007), 79–81.

[P18] T. Rajba, *On the fractional decomposability of infinitely divisible probability measures*, Transactions of the 26th International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Nahariya(Israel) (2007), 167–172.

[P19] T. Rajba, *Nested classes of C-semi-selfdecomposable distributions*, Statistics and Probability Letters, 79 (24) (2009), 2469-2475.

[P20] T. Rajba and S. Rajba *Wireless sensor convergecast based on random operations procedure*, PAK, 56 (3) (2010), 255–258.

[P21] T. Rajba and S. Wąsowicz *Probabilistic characterization of strong convexity*, Opuscula Math., 31 (1) (2011), 97–103.

[P22] T. Rajba and S. Rajba *Wireless sensor network with random sending*, Knowledge in telecommunication technologies and optics, (2011), 170–175.

[P23] T. Rajba, K. Nikodem and S. Wąsowicz *Functions Generating Strongly Schur-Convex Sums*, ISNM161-GI-PART4-CHAPTER13 Inequalities and Applications 2010, (2012), 175 – 182 .

[P24] T. Rajba and S. Rajba *The probability of collisions in Wireless Sensor Network with random sending*, -PRZEGLĄD ELEKTROTECHNICZNY (Electrical Review), R. 88 NR 9a (2012), 243–248.

[P25] T. Rajba, An application of the Choquet theorem to the study of randomly–superinvariant measures. *Opuscula Math.*, 32 (2) (2012), 317–326.

[P26] T. Rajba and B. Micherda, *On some Hermite-Hadamard-Fejér inequalities for (k,h)-convex functions, Math.* Inequal. Appl., 15 (4) (2012), 931–940.

[P27] S. Rajba, T. Rajba, P. Raif and M. Mahmud, *Wireless Sensor Networks in Application to Patients Health Monitoring*, Proceedings of IEEE Symposium Series on Computational Intelligence 2013, April 15-19, 2013, Singapore, 94–98.

[P28] S. Rajba, T. Rajba and P. Raif, *Simulation study of the random access control in the wireless sensor network*, Bezpeka Informacii : naukovo-praktičnij žurnal = Ukrainian Scientific Journal of Information Security, 9 (1) 2013, 7–13.

[P29] S. Rajba and T. Rajba, *A randomization of parameters in wireless sensor networks*, Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review), 9 (2013), 240–244.

[P30] T. Rajba and Sz. Wąsowicz, *Extremal measures with prescribed moments*, J. Math. Anal. Appl., 423 (2) (2015), 1838-1848.

Teresa Rajba