Prof. dr hab. Jolanta Misiewicz,
Politechnika Warszawska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Warszawa, 20 maja 2015 r.

Recenzja rozprawy habilitacyjnej dr Teresy Rajby
FUNKCJE WYPUKŁE I ICH UOGÓLNIENIA

W twórczości naukowej dr Teresy Rajby wyraźnie widoczne są trzy okresy. Pierwszy jest związany z pisaniem rozprawy doktorskiej i wpółpracą z prof. Urbanikiem i kończy sie około 1984 roku. W tym czasie habilitantka opublikowała kilka dobrych prac związanych z samorozkładalnością i nieskończoną podzielnością miar probabilistycznych. Potem następuje okres usprawiedliwionego spowolnienia pracy naukowej, w którym powstały tylko dwie prace z pogranicza probabilistyki i techniki o niewielkiej wartości naukowej. Chciałabym jednak zaznaczyć, że w całym tym okresie dr Rajba starała się utrzymać kontakt z nauką, śledziła aktualny stan badań w ramach interesujących ją tematów, czynnie uczestniczyła w seminariach naukowych (w tym w seminarium prof. Urbanika), często uczestniczyła w konferencjach krajowych i międzynarodowych. Dzięki takiej postawie mogła, gdy sytuacja rodzinna już jej na to pozwalała, intensywnie wrócić do badań naukowych. Nastąpiło to około 1999 roku. W latach 1999–2015 habilitantka opublikowała 29 prac, w tym 19 czysto teoretycznych, większość w bardzo dobrych czasopismach.

W latach 1999-2002 pani dr T. Rajba opublikowała 3 prace o tematyce związanej jeszcze z jej doktoratem dotyczące samorozkładalności i wielokrotnej rozkładalności miar probabilistycznych. Stopniowo rozszerzała swoje zainteresowania. Powstały prace o funkcjach r-monotonicznych, rozkładach operatorowo samorozkładalnych, o ułamkowej samorozkładalności, czy C-semi-samorozkładalności. Przełom nastąpił w 2011 roku, kiedy ukazała się praca dr Rajby i S. Wąsowicza pt. *Probabilistic characterization of strong convexity* [P21]. Do pracy tej dr Rajba wniosła bardzo istotny wkład: zauważyła mianowicie, co wcale nie było trywialne, że badane nierówności można potraktować jak nierówności dotyczące momentów zmiennej losowej, jeśli odpowiednio zdefiniujemy zmienną i jej rozkład. Po tym spostrzeżeniu dowody stawały się zaskakująco proste. Opierały się na bardzo elementarnych wiadomościach z rachunku prawdopodobieństwa, więc trudno je docenić na gruncie probabilistyki, ale uważam, że dużym osiągnięciem habilitantki jest znalezienie właściwego języka do opisu rozważanych problemów.

Od tego momentu dr Rajba konsekwentnie zajmuje się badaniem i charakteryzacją funkcji wypukłych w sensie najróżniejszych definicji. Wykorzystując swoją dobrą znajomość rachunku prawdopodobieństwa i teorii miary przeprowadza łatwiejsze dowody znanych wyników, znajduje nowe własności, przenosi wyniki udowodnione tylko dla funkcji o zawyżonej regularności na wyniki w pełni ogólne. Jej prace, szczególnie początkowe w tej dziedzinie, są trudne w ocenie: zastosowany aparat probabilistyczny, czy teorio-miarowy nie jest szczególnie głęboki, z punktu widzenia probabilistyki uzyskane wyniki (z kilkoma wyjątkami) nie są bardzo zaskakujące, a jednak wprowadzają nowe, istotne wartości w teorię funkcji wypukłych. Chciałabym jeszcze podkreślić, że ciężar gatunkowy prac pani Teresy Rajby rośnie z czasem, co dobrze rokuje na przyszłość.

Na rozprawę habilitacyjną dr Teresy Rajby składa się sześć prac. Poniżej omawiam najważniejsze wyniki każdej z nich.

R6. T. Rajba, *New integral representation of nth order convex functions*, J. Math. Anal. Appl., **379**(2), 2011, 736–747.

W pracy tej autorka zajmuje się funkcjami n-wypukłymi, przy czym funkcja f jest n-wypukła, jeśli pochodna $f^{(n-1)}$ istnieje i jest wypukła. Przykładami takich funkcji, oprócz wielomianów stopnia n, są funkcje $x \to (x-t)_+^n$ oraz $(n+1)$-monotoniczna $x \to (-1)^{n+1}(t-x)_+^n$ i ich średnie całkowe po parametrze t. Dla funkcji klasy C^n wiadomo, że dodatnie kombinacje liniowe tych trzech typów wyczerpują klasę funkcji n-wypukłych. W twierdzeniach 2.1, 2.6 i 2.7 autorka pokazuje, że ta charakteryzacja zachodzi również bez założenia istnienia pochodnej $f^{(n)}$. Zauważmy, że w abstrakcie, omawiając te wyniki, autorka popełniła błąd mówiąc o sumie dwóch funkcji $(n+1)$-monotonicznych i wielomianu. W twierdzeniach teza jest poprawna.

W rozdziale 4 znajdujemy badania dotyczące mocno n-wypukłych funkcji względem innej funkcji n-wypukłej zdefiniowanych żądaniem, by różnica tych dwóch funkcji była n-wypukła. Wprowadza to pewien porządek w klasie funkcji n-wypukłych. Rozdział 5 zawiera dyskusję dotyczącą interpolacji funkcji n-wypukłych wielomianami.

Metody stosowane w pracy są proste, dowody konstrukcyjne i bezpośrednie, co zwykle prowadzi do dużej klarowności pracy. Tu jednak urokliwa prostota metod przy dość znaczących wynikach zatraciła się w nadmiarze szczegółów i drobnych wniosków.

R5. T. Rajba, K. Nikodem i W. Wąsowicz, *On the class of higher order Jensen-convex functions and Wright-convex functions*, J. Math. Anal. Appl., **396**, 2012, 261–269.

W pracy tej autorzy rozważają n-krotną wypukłość funkcji w sensie Wrighta, co oznacza zachodzenie warunku

$$\Delta_{h_1 \dots h_n} f(x) \geqslant 0 \quad \text{dla wszystkich} \quad h_1, \dots, h_n > 0$$

oraz n-krotną wypukłość funkcji w sensie Jensena, co oznacza, że

$$\Delta_{h \dots h} f(x) = \Delta_h^n f(x) \geqslant 0 \quad \text{dla wszystkich} \quad h > 0,$$

gdzie $\Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x)$ oraz $\Delta_{h_1 \dots h_{n+1}} f(x) = \Delta_{h_{n+1}} (\Delta_{h_1 \dots h_n} f(x))$. Głównym wynikiem pracy jest wskazanie przykładu funkcji f, która jest n-Jensen wypukła i nie jest n-Wright wypukła. Już wcześniej było wiadomo, że funkcja $f(x) = |a(x)|$, gdzie a jest nieciągła funkcją addytywną na prostej jest przykładem takiej funkcji dla $n = 1$. Analiza tego przykładu i bezpośrednia konstrukcja dla $n = 3$ doprowadziła autorów do wytypowania funkcji

$$f(x) = \big(a(x)\big)_+^n$$

na kandydata takiej funkcji dla dowolnego nieparzystego $n \in \mathbb{N}$ i sprowadzenia dowodu tego, że jest ona n-Jensen wypukła i nie jest n-Wright wypukła do warunku

$$\Delta_{h_1 \dots h_n} f(x) = -1, \qquad (*)$$

gdzie $h_1, \dots, h_n$ są elementami pewnej bazy Hamela na prostej takimi, że $a(h_1) = -1$, $a(h_2) = \dots = a(h_n) = 1$. Dowód tego, że sam warunek $(*)$ zachodzi zajmuje znaczną część tej publikacji i jest oparty jest na złożonej konstrukcji wykorzystującej metody teorii miary. W pracy omówiono również problemy pojawiające się przy badaniu związków pomiędzy tymi dwoma typami n-wypukłości w przypadku parzystej liczby n.

Przypomnijmy, że omawiana tu publikacja stanowiła również część poprzedniego wniosku habilitacyjnego dr Teresy Rajby. W przedłożonej wówczas recenzji prof. J. Wesołowski przedstawił krótki i pomysłowy dowód warunku $(*)$ oparty na znajomości pewnej reprezentacji liczb Stirlinga. Choć doceniam wkład prof. J. Wesołowskiego, to jednak moim zdaniem nie ujmuje to znaczenia dowodowi oryginalnemu, przeprowadzonemu (zgodnie z oświadczeniem współautorów) samodzielnie przez dr T. Rajbę.

R4. T. Rajba, *A generalization of multiple Wright-convex functions via randomization*, J. Math. Anal. Appl., **388**(1), 2012, 548–565.

Na początku autorka wprowadza nieco zamieszania modyfikując klasyczną definicję funkcji całkowicie monotonicznych i p-razy monotonicznych w taki sposób, że funkcje całkowicie monotoniczne na $(0, \infty)$ w sensie Bernsteina są u niej całkowicie monotoniczne na $(-\infty, 0)$. Opisuje związki pomiędzy funkcjami n-monotonicznycmi i n-wypukłymi w sensie Wrighta. Wprowadza pojęcie losowej n-wypukłości w sensie Wrighta randomizując odpowiedni warunek do następującego:

$$\mathbb{E}\Delta_{\theta_1,\dots,\theta_n} f(x) \in Q$$

gdzie $\theta, \theta_1, \dots, \theta_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie a Q jest podzbiorem zamkniętym na translacje, nieujemne kombinacje wypukłe i granice punktowe klasy funkcji nieujemnych, niemalejących i lewostronnie ciągłych na prostej. W dalszej części pracy za Q przyjmuje się zwykle $\mathcal{M}_k$ klasę funkcji k-wypukłych. W zależności od rozkładu θ oraz klasy Q autorka wyznacza reprezentacje kanoniczne takich funkcji f, reprezentacje analogiczne do reprezentacji Bernsteina-Widdera dla funkcji całkowicie monotonicznych i p-razy monotonicznych w klasycznym przypadku. Szczegółowe wyniki są przedstawione dla θ o rozkładzie arytmetycznym i o rozkładzie wykładniczym z klasą Q funkcji j-razy monotonicznych.

R3. T. Rajba, *On some relative convexities*, J. Math. Anal. Appl., **411**(2), 2014, 876–886

W pracy autorka nawiązuje do pomysłu Palmera (2002, 2003) na wprowadzenie pewnego częściowego porządku w klasie funkcji wypukłych. Według Palmera funkcja f jest wypukła względem funkcji g, jeśli istnieje ściśle rosnąca funkcja wypukła h taka, że $f = h(g)$. Jeśli rozważane funkcje f, g są dwukrotnie różniczkowalne, to warunek ten jest równoważny z następującym:

$$\frac{f''(x)}{|f'(x)|} \geqslant \frac{g''(x)}{|g'(x)|}.$$

Prace Palmera ukazały się w egzotycznym miejscu: *Technical Report, ECE, UCSD* i zasługą habilitantki jest już samo wynalezienie tych wyników. W swojej pracy autorka rozwija pomysł Palmera dla funkcji bez założenia różniczkowalności stosując pochdną prawo- lub lewostronną, lub pochodną dystrybucyjną, co wymaga dużej delikatności w przeprowadzeniu dowodów. Porównuje powyższą własność z żądaniem by $f - g$ była funkcją wypukłą. Otrzymuje również pewne charakteryzacje probabilistyczne.

R2. T. Rajba, *On the Ohlin lemma for Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities*, Math. Inequal. Appl., **17**(2), 2014, 557–571.

Autorka przypomina w tej pracy stosunkowo mało znany lemat Ohlina:

Lemat Ohlina. *Jeśli X, Y są zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y$ i ich dystrybuanty F_X, F_Y przecinają się dokładnie w jednym punkcie x_0 oraz $F_X(x) < F_Y(x)$ dla $x < x_0$, to dla dowolnej funkcji wypukłej f*

$$\mathbf{E}f(X) \leqslant \mathbf{E}f(Y).$$

Proste zastosowania tego lematu pozwoliły autorce na uzyskanie wyjątkowo prostych dowodów nierówności typu Hermite-Hadamarda-Fejéra, udowodnienie nowych nierówności tego typu również dla funkcji n-wypukłych oraz uzyskanie pewnych nierówności dla opratorów kwadraturowych.

Praca ta stanowi nowy przykład na to, jak bardzo zastosowanie właściwego języka, w tym przypadku języka probabilistyki, może wpłynąć na prostotę i łatwość przeprowadzenia potencjalnie trudnych dowodów. Może rozważane tu problemy nie są ekstremalnie istotne, ale są ciekawe a zasługa habilitantki we wprowadzaniu nowych metod duża.

R1. T. Rajba, *On the strong delta-convexity and Hermite-Hadamard type inequalities for delta-convex functions of higher order*, Math. Inequal. Appl., **18**(1), 2015, 267–293

Praca ta stanowi kontynuację pracy [R6]. Wykorzystuje się reprezentacje całkowe dla funkcji n-wypukłych do reprezentacji całkowej funkcji delta-wypukłych, które mogą być definiowane jako różnice tych poprzednich. Dzięki klasycznemu rozkładowi miary znakowanej na różnicę dwóch miar dodatnich o nośnikach rozłącznych uzyskujemy za darmo funkcje minimalne. Bez tej reprezentacji i rozkładu miary zadanie byłoby dość karkołomne. W pracy znajdziemy również pewne uogólnienia nierówności typu Hermite-Hadamarda-Fejéra oraz pewne nierówności dla operatorów kwadraturowych.

Na **pozostały dorobek naukowy** dr Teresy Rajby składa się 30 artykułów. Trzynaście z nich dotyczy problemów mniej lub bardziej technicznych (sieci bezprzewodowe, telefonia komórkowa, cyfrowe transmisje informacji, żeglarstwo) i oceny wartości naukowej tych prac nie jestem w stanie się podjąć. Na szczególną uwagę zasługują pierwsze prace habilitantki dotyczące c-rozkładalności miar probabilistycznych i charakteryzacji półgrup rozkładalności. Pochodzą one z okresu ścisłej współpracy pani Rajby z prof. Urbanikiem i w swoim czasie były szeroko dostrzegane w środowisku naukowym. Wydaje się jednak, że ta problematyka zamiera - wiąże się ona bowiem z problemem charakteryzacji wszystkich półgrup np. na prostej, co jest raczej zadaniem beznadziejnym.

Spośród ostatnio opublikowanych prac habilitantki, nie związanych z doktoratem, najciekawszą z punktu widzenia probabilistyki jest praca [P25]. Autorka charakteryzuje w niej wszystkie miary μ borelowskie na prostej spełniające warunek

$$\mu(B) \geqslant \mu * \lambda(B), \quad B \in \mathcal{B}(R),$$

gdzie λ jest ustaloną miarą probabilistyczną. Okazuje się, że przy dodatkowym założeniu $\mu((-\infty, x)) < \infty$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ każda taka miara jest postaci

$$\mu = \nu * \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{*k}$$

dla pewnej borelowskiej miary ν na $\mathbb{R}$ a $\lambda^{*0} = \delta_0$. Autorka stosuje w pracy dość zawiłe oznaczenia, więc prostota powyższego zapisu jej umknęła. Widać z niego, że każda skończona miara borelowska ν definiuje tym wzorem miarę μ o żądanej własności, że żadna miara probabilistyczna nie może posiadać tej własności, a punkty ekstremalne zbioru takich miar są w miarę czytelne.

Istotnym przejawem działalności naukowej dr Teresy Raby jest jej czynny udział w wielu konferencjach i spotkaniach naukowych. Przedstawiała ona swoje wyniki na 18 konferencjach międzynarodowych i 19 krajowych. Wygłaszala referaty na Seminarium Probabilistycznym Uniwersytetu Wrocławskiego, na Seminarium Katedry Matematyki ATH w Bielsku-Białej, na Seminariach Uniwersytetu Śląskiego, Politechniki Lubelskiej, Politechniki Warszawswkiej.

Może trochę niepokoić fakt, że dr Rajba była promotorem niewielu prac magisterskich, głównie na Uniwersytecie Wrocławskim, w początkowym okresie jej działalności naukowej. Mogłoby to źle rokować, jeśli chodzi o jej przyszłe kształcenie studentów na poziomie doktorskim. Obiekcje te łagodzą jednak dwa fakty: jej wyjątkowo szerokie rozeznanie w literaturze przedmiotu oraz umiejętność współpracy z innymi naukowcami, co owocuje wspólnymi publikacjami.

Podsumowując stwierdzam, że przedstawiona rozprawa habilitacyjna jak i pozostały dorobek dr Teresy Rajby spełniają wymagania ustawowe i w związku z tym wnoszę o dopuszczenie dr Teresy Rajby do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Z poważaniem

Jolanta K. Misiewicz

J. Misiewicz