

Prof. dr hab. Adam Paszkiewicz
Katedra Teorii Prawdopodobieństwa i Statystyki
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego

Recenzja w przewodzie habilitacyjnym Pani dr Teresy Rajby

Przedstawiony do oceny cykl publikacji to:

1. T. Rajba, New integral representations of order convex functions, J. Math. Anal. ppl. **379** (2011), 736-746.
2. K. Nikodem, T. Rajba, S. Wąsowicz, On the classes of higher-order Jensen-convex functions and Wright-convex functions, J. Math. Anal. Appl. **396** (2012), 261-269.
3. T. Rajba, A generalization of multiple Wright-convex functions via randomization, J. Math. Anal. Appl. **388** (2012), 548-565.
4. T. Rajba, An application of the Choquet theorem to the study of randomly – superinvariant measures, Opuscula Mathematica **32** (2012), 317-326.
5. B. Micherda, T. Rajba, On some Hermite-Hadamard-Fejér inequalities for (k, h) -convex functions, Mathematical Inequalities and Applications **15** (2012/2013), 931-940.

Za najciekawszą należy uznać pracę 4. Dotyczy ona charakteryzacji pewnej klasy miar (nieujemnych, nieograniczonych) na prostej. Główny wynik (Twierdzenie 4.3) formalnie dotyczy równań całkowych. Sądzę jednak, że jego treść najprościej wyrazić w języku splotów. Mamy zadany pewien rozkład p_θ (zmiennej losowej θ). Szukamy klasy $M(\theta)$ wszystkich miar μ spełniających warunek $\mu \geq \mu * p_\theta$. Okazuje się, że są to miary postaci $\mu = \gamma * (\mathbf{1} + p + \theta + p_\theta * p_\theta \dots)$, gdzie γ jest pewną miarą (nieujemną). Ponadto zawsze wtedy $\gamma = \mu * (\mathbf{1} - p_\theta)$. Wynik jest sugerowany sumą ciągu geometrycznego. Niezbędne przejście graniczne jest jednak delikatne, użycie twierdzenia Choqueta nieoczywiste, choć pewne wzorce są już w monografii R.P. Phelps, Lectures on Choquet's Theorem, New York, 1966. Twierdzenie 4.4 w istocie zawiera dwa proste, eleganckie przykłady omówionej reprezentacji (dowód słusznie pozostawiony jest czytelnikowi).

Dobry poziom reprezentuje też praca 2. Niech f będzie funkcją rzeczywistą

zmiennej rzeczywistej. Przy ustalonym $h > 0$, przyrostem $\Delta_h f$ nazwę funkcję $f(x+h) - f(x)$. Przy ustalonych $h_1, \dots, h_{n+1} > 0$ przyjmuję $\Delta_{h_1} \dots \Delta_{h_{n+1}} f = \Delta_{h_1 \dots h_n}(\Delta_{h_{n+1}} f)$. Wówczas n -Wright wypukłość funkcji f oznacza, że funkcja $\Delta_{h_1 \dots h_n} f$ jest rosnąca dla wszystkich możliwych $h_1, \dots, h_n > 0$. Natomiast n -Jensen wypukłość f oznacza, że $\Delta_{h_1 \dots h_n} f$ jest rosnąca dla wszystkich $h_1 = \dots = h_n > 0$. Główny wynik pracy (Twierdzenie 2.3) podaje przykład funkcji f , która jest n -Jensen wypukła i nie jest n -Wright wypukła dla dowolnie ustalonej nieparzystej liczby $n \geq 1$. Funkcja f jest określona jako n -ta potęga dodatniej części funkcji $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która jest addytywna i spełnia $a(h_1) = -1$, $a(h_2) = \dots = a(h_{n+1}) = 1$ dla niezależnego nad $\mathbb{Q}$ układu $h_1, \dots, h_{n+1}$ liczb rzeczywistych. Główna trudność polega na pokazaniu, że dla wspomnianych przyrostów $h_1, \dots, h_{n+1}$ wartość $(\Delta_{h_1 \dots h_{n+1}} f)(0)$ jest ujemna (równe -1). Rozważania w krótkiej generowanej przez $h_1, \dots, h_{n+1}$ są złożone, zasadniczy pomysł był niełatwy. Użycie przesuwanych miar daje elegancką redakcję. Dla n parzystych problem pozostaje otwarty i ciekawy.

Praca 1. zawiera stosunkowo proste rozważania, ale konsekwentnie przeprowadzone dla uzyskania zamierzonego celu. Funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest nazwana n -wypukłą, jeżeli pochodna $f^{(n-1)}$ istnieje i jest wypukła na przedziale (a, b) . Podstawową "cegieleką" w klasie takich funkcji jest część nieujemna n -tej potęgi przyrostu $x \mapsto (x-t)_+^n = \max((x-t)^n, 0)$. Rozkłady takich funkcji na całki ze wspomnianych "cegiełek" (z oczywistą poprawką będącą wielomianem stopnia co najwyżej $n-1$) były rozważane wielokrotnie. Autorka kończy badania innych autorów, usuwając zbędne założenia (Twierdzenia 2.1, 2.6, 2.7 i podsumowujące Twierdzenie 2.9). Podobnie Autorka kończy problem reprezentowania funkcji n -monotonicznych w Twierdzeniu 3.1. Sekcja 4. zawiera wyczerpujące badanie w klasie funkcji n -wypukłych, uporządkowania zadanego żądaniem, by różnica była n -wypukła. Opisane są związki z naturalnymi miarami opisującymi stopień n -wypukłości. Sekcja 5. zawiera naturalne spostrzeżenia dotyczące możliwości interpolowania funkcjami n -wypukłymi. Opisana jest możliwa zgodność wartości funkcji i pochodnych w ustalonych punktach przy takiej interpolacji.

W pracy 3. scharakteryzowane są funkcje losowo n -Wright wypukłe. Niech

$\Delta_h f$ będzie jak poprzednio przyrostem $f(x+h) - f(x)$ funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i niech $(\Phi f)(x) = \int (\Delta_h f)(x) p_\theta(dh)$ dla ustalonego rozkładu p_θ na $\mathbb{R}^+$. Losowa n -Wright wypukłość oznacza, że $\Phi^n f$ jest funkcją rosnącą (lub jest w innej ważnej klasie). Zasadnicze reprezentacje podają Twierdzenia 2.6 i 2.8. Sekcje 4., 5., 6., 7. zawierają omówienie szczególnych przypadków, dla szczególnych klas rozkładów p_θ . Dla wykładniczego rozkładu p_θ wynik jest szczególnie prosty i ciekawy. Cała praca wymagała dużego wysiłku i doświadczenia.

Praca 5. podaje uogólnienia wcześniejszych uogólnień następującej podstawowej nierówności całkowej, dla wypukłej funkcji f oraz dla nieujemnej, symetrycznej względem $\frac{a+b}{2}$ funkcji g :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b g(x) dx.$$

Dowody są poprawne, ale praca nie jest udana. Podążanie drogą uogólnień daje niepotrzebne komplikacje w sformułowaniu głównych wyników. W Twierdzeniu 3.1 niepotrzebne jest wiązanie liczby $f(k(\frac{1}{2})(a+b))$ w formule (10) z funkcją f . Istotne są założenia o funkcji f jedynie na przedziale $[a, b]$. W Twierdzeniu 3.5 sytuacja jest bardziej skomplikowana. Lecz również należy wydzielić założenia o funkcji f na przedziale $[a, b]$, używając (niezależnych w gruncie rzeczy od f) układów współczynników indeksowanych przez $t \in [0, 1]$.

Przejdę do omówienia niektórych prac z pozostałego dorobku. Praca

6. T. Rajba, Nested classes of c -semi-self decomposable distributions, Statistics and Probability Letters, **79** (2009), 24469-2475,

kontynuuje długą tradycję badania klas rozkładów nieskończenie podzielnych Lévy'ego na $\mathbb{R}^d$. Chodzi o powiązanie z miarą μ (wziętą z tej klasy) zbioru współczynników skalujących $c > 0$, dla których $\hat{\mu}(z) = \hat{\mu}(cz)\hat{\mu}_c(z)$, $z \in \mathbb{R}^d$. Symbol $\hat{\mu}$ oznacza tu funkcję charakterystyczną miary μ . Zasadniczą rolę odgrywa naturalny Lemat 2.5, wiążący zbiór współczynników skalujących μ ze zbiorem współczynników tzw. niezmienniczości dla miary spektralnej Lévy'ego ν . Zasadnicze twierdzenie 3.5 rozstrzyga pewien, raczej specjalny problem K. Urbanika.

Praca

7. T. Rajba, On the Ohlin lemma for Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities, Mathematical Inequalities and Applications,

zawiera bardzo specjalistyczne nierówności dla całek dotyczących funkcji wypukłych: Twierdzenia 2.1, 4.2, 4.3. Chodzi o wykorzystanie wiedzy o wartościach funkcji wypukłej f w punktach o odpowiednich własnościach dla szacowania iloczynów $\int_a^b f(x)w(x)dx$ w przestrzeni L_2 , oraz średnich $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$. Praca wpisuje się raczej w tradycję metod numerycznych.

Szczególną uwagę zwracają prace przesłane w 2012 i 2013 roku:

8. T. Rajba, On the integral representation, strong delta-convexity and Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for delta-convex functions of higher order, Bielsko-Biała Preprint ATH.

9. T. Rajba, On some relative convexities, preprint.

Praca 8. rozszerza wcześniejsze twierdzenia o reprezentowaniu funkcji n -wypukłych na prostej, gdy wypukłość jest określona w języku pochodnych. Usunięcie założeń wiąże się z wykorzystaniem dystrybucji w tezie. Praca jest obszerna, użyty jest dobrze aparat funkcji uogólnionych.

Praca 9. rozwija ciekawe spostrzeżenie J.A. Palmera (2002; 2003) dotyczące uporządkowania w języku złożeń z funkcją wypukłą. Opisane są uogólnienia, gdy zamiast pochodnej używa się pochodną prawo- lub lewostronną, lub pochodną dystrybucyjną. Osiągnięciem Autorki jest już wynalezienie tego ciekawego wyniku Palmera w raczej lokalnym czasopiśmie.

Za drobniejsze należy uznać prace:

10. T. Rajba, S. Wąsowicz, Probabilistic characterization of strong convexity, Opuscula Mathematica **31** (2011), 97-103.

11. K. Nikodem, T. Rajba, S. Wąsowicz, Functions generating strongly Schur-convex sums, w tomie: International Series of Numerical Mathematics **161** (2012), 175-182.

12. T. Rajba i inni, Wireless sensor network in application to patients health monitoring, preprint.

13. S. Rajba, T. Rajba, The probability of collisions in wireless sensor network with random sending, Przegląd Elektrotechniczny **88** (2012), 243-246.

Praca 10. dotyczy funkcji c -silnie wypukłych ϕ na podzbiorach dowolnej przestrzeni liniowej unormowanej. c -Silna – oznacza, że różnica $t\phi(a) + (1-t)\phi(b) - \phi(ta + (1-t)b)$ jest większa od $ct(1-t)\|a-b\|$, $t \in [0, 1]$. Przedstawiona charakterystyka probabilistyczna jest dość oczywista, użyteczna elementarna analiza jest zrobiona dla funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Praca 11. dotyczy funkcji F od n zmiennych, wypukłej w tzw. sensie Schura lub silnie wypukłej (ze stałą c). Rozważana jest sytuacja, gdy funkcja ta jest sumą funkcji od poszczególnych zmiennych, dokładniej $F(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) + \dots + f(x_n)$. Znalezienie własności funkcji f było zadaniem stosunkowo standardowym.

Prace 12. i 13. to użyteczne zastosowania prawdopodobieństwa. Jednak sprowadzają się do zadań dotyczących przedziałów o określonej (małej) długości i o poissonowsko rozłożonych początkach.

Reasumując dorobek Pani dr Teresy Rajby jest dość bogaty, o zróżnicowanym poziomie. Dr Rajba jest bardzo aktywnym uczestnikiem konferencji, lecz poziom tego udziału był też zróżnicowany. Wśród prac przedstawionych jako zasadnicze osiągnięcie do oceny dwie są bardzo dobre, wymagające inwencji dobrego matematyka (2. i 4.), dwie wymagały dużego, czasochłonnego wysiłku (1. i 3.). Praca 5. wymagałaby zręczniejszego napisania. Zwraca uwagę przede wszystkim wzrost aktywności Autorki, owocujący pracami wydanymi w 2012 r. oraz wysłanymi w 2012 i 2013 r.

Uwzględniając ustawowe i zwyczajowe wymagania znacznego wkładu w rozwijaną dziedzinę, muszę ocenić (w oparciu o cały przedstawiony materiał) wniosek dotyczący habilitacji jako nieco przedwczesny.

Adam Pawłowski