Warszawa, 17 kwietnia 2013

prof. dr hab. Jacek Wesołowski
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Recenzja rozprawy habilitacyjnej "Analiza własności uogólnionych funkcji wypukłych i funkcji wypukłych wyższych rzędów" oraz dorobku naukowego dr Teresy Rajby

Uwagi wstępne

Rozprawa habilitacyjna dr Teresy Rajby składa się z pięciu publikacji poświęconych analizie różnych uogólnień pojęcia wypukłości. Cztery z tych prac opublikowano w czasopismach z tzw. listy JCR. Pozostały dorobek składa się z dwudziestu pięciu publikacji: dalszych trzech (w tym dwóch współautorskich) na temat wypukłości, jedenastu samodzielnych publikacji poświęconych miarom probabilistycznym oraz jedenastu (w tym dziesięciu współautorskich) dotyczących zastosowań matematyki. Jedynie dwie z tych dwudziestu czterech prac pochodzą z czasopism z listy JCR.

Autoreferat jest opracowany wyczerpująco. Pozostała dokumentacja jest również przygotowana dość solidnie, choć z opublikowanych prac wchodzących w skład dorobku naukowego (poza rozprawą habilitacyjną) w dokumentacji zamieszczono jedynie pięć pozycji (dwie dotyczą zagadnień wypukłości, jedna rachunku prawdopodobieństwa i dwie zastosowań). Dodatkowe trzy prace mają charakter manuskryptów złożonych do druku i jako takie nie podlegają ocenie. Pewien kłopot sprawia też niezgodność numeracji prac wchodzących w skład rozprawy stosowanej w autoreferacie z numeracją tych prac w załączniku siódmym, który ma tytuł "Cykl publikacji". Poniżej odwołuję się do tej drugiej numeracji.

Omówienie prac wchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej

W pracy [1] analizowano funkcje n-wypukłe, n-monotoniczne i n-wypukłe w sensie Wrighta oraz związki między nimi. W szczególności, Autorka zajmowała się pewnymi uogólnieniami znanych przedstawień całkowych funkcji n-wypukłych i n-monotonicznych oraz reprezentacją funkcji n-wypukłych w sesnie Wrighta za pomocą funkcji n-monotonicznych. W pracy wprowadzona została również nowa relacja względnej n-wypukłości oraz badany był porządek definiowany przez tę relację. Niestety, wśród wielu dowodzonych faktów dotyczących wspomnianych pojęć, trudno jest znaleźć twierdzenie naprawdę ciekawe. Dość powiedzieć, że na dwunastu stronach (wliczając stronę tytułową i referencje) zmieściło się dziewiętnaście twierdzeń, sześć stwierdzeń, osiem uwag, dwa wnioski i jeden lemat. Prezentowane wyniki mają charakter nietrudnych obserwacji a ich dowody są standardowe. Świadczą co najwyżej o tym, że Autorka dobrze orientuje się w dziedzinie, której dotyczy praca. Rzuca się w oczy brak pogłębionego spojrzenia na problematykę uogólnień pojęcia wypukłości. Dlatego uważam, że omawianą publikację można potraktować co najwyżej jako dobry wstęp do naprawdę poważnych badań.

W pracy [2] zdefiniowano nową klasę funkcji $\mathcal{W}_n(\theta,\, \mathcal{M}_j)$ poprzez warunek mówiący o tym, że funkcja

$$\mathbb{E}\,\Delta_{\theta_n}\,\ldots\,\Delta_{\theta_1}\,F(x)$$

jest j-krotnie monotoniczna, czyli należy do klasy $\mathcal{M}_j$. W powyższym warunku $\theta_1,\ldots,\theta_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie co zmienna losowa θ, a Δ_h oznacza operator różnicowy: $\Delta_h\,F(x) = F(x) - F(x-h)$. Badano też pewne własności takiej rodziny funkcji. Podano reprezentację szeregową, a dla sytuacji gdy θ ma rozkład wykładniczy, reprezentację całkową. Ta reprezentacja doprowadziła do, być może najbardziej wartościowego, wyniku pracy, który mówi, że klasa funkcji absolutnie monotonicznych jest równa przecięciu po n, wszystkich klas $\mathcal{W}_n(\theta,\, \mathcal{M}_1)$. Poza tym praca obfituje w dość proste obserwacje, które czasem nieco na wyrost podnoszone są do rangi twierdzeń (oczywiście, z formalnego punktu widzenia twierdzeniami są). Brak przekonującego uzasadnienia, dlaczego warto badać klasy funkcji $\mathcal{W}_n(\theta,\, \mathcal{M}_j)$. Do zalet pracy zaliczam wskazanie na potencjał metod probabilistycznych w badaniu wypukłości.

Praca [3], opublikowana w *Opuscula Mathematica*, dotyczy opisu klasy miar μ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, dla których spełniona jest nierówność

$$\mu(B) \geq \mathbb{E}\, \mu(B - \theta), \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

gdzie θ jest zmienną losową o wartościach nieujemnych. Podano w niej reprezentację całkową takich miar oraz zbiór punktów ekstremalnych dla rodziny miar probabilistycznych zdefiniowanych przez powyższą nierówność, ale określonych na $\tilde{I}_0 = [-\infty, 0]$. Oczywiście, każda miara μ ma trywialną reprezentację całkową $\mu = \int \delta_y\, \mu(dy)$. Co więcej, trywialna reprezentacja miary ν daje $\mathbb{E}\,\tau_\theta \nu(du) = \int \mathbb{E}\,\tau_\theta\, \delta_x(du)\, \nu(dx)$ (i analogiczny wzór dla wyrażenia pojawiającego się po prawej stronie równości (2.3)). Wydaje się więc, że reprezentacje podane w Tw. 4.2 i 4.3 można wywynioskować bezpośrednio z dość prostej reprezentacji miary μ podanej w Tw. 2.3. Czy zatem odwoływanie się w tym kontekście do twierdzenia Choquet jest rzeczywiście potrzebne? Nieco ciekawsze jest Tw. 3.6 o postaci zbioru punktów ekstremalnych dla rodziny miar probabilistycznych $K(\theta, \tilde{I}_0)$, choć okazuje się, że zbiór ten jest w pewnym sensie trywialny, bo wyznaczony jest przez wszystkie miary postaci δ_x (z dokładnością do skalowania), gdzie x należy do nośnika miary ν.

Praca [4] dotyczy pojęcia (k, h)-wypukłości. Wprowadzona jest definicja funkcji (k, h)-wypukłych uogólniająca znane wcześniej pojęcia, podane są podstawowe własności takich funkcji oraz udowodnione dwie nierówności typu Hadamarda-Hermité'a-Féjera. Niestety nie jest dla mnie jasne, dlaczego takie nowe pojęcie miałoby być ważne. Przedstawione własności są proste. Dowody obu nierówności polegają na wycałkowaniu obu stron nierówności wynikającej bezpośrednio z definicji, po jej uprzednim obustronnym pomnożeniu przez odpowiednią funkcję. Cała praca jest na dość elementarnym poziomie matematycznym. Dziwię się, że została opublikowana w czasopiśmie *Mathematical Inequalities and Applications*, które jest na liście JCR.

Praca [5] zawiera przykład funkcji, która jest n-wypukła w sensie Jensena i nie jest n-wypukła w sensie Wrighta, gdy n jest liczbą nieparzystą. Analiza przypadku $n = 3$ wskazała, że kandydatem na kontrprzykład może być funkcja $f(x) = (a(x)_+)^n$, gdzie a jest funkcją addytywną przyjmującą na pierwszych $n + 1$ elementach $h_1, \ldots, h_{n+1}$ pewnej bazy Hamela wartości $a(h_1) = -1$, $a(h_k) = 1$, $k = 2, \ldots, n + 1$. Główna trudność polegała na pokazaniu, że

$$\Delta_{h_1,\ldots,h_{n+1}} f(0) = -1. \tag{1}$$

Jak piszą autorzy "it is not a trivial task". Prawie całą pracę poświęcają na dowód równości (1) oparty na skomplikowanej konstrukcji wykorzystującej metody teorii miary. Habilitantka w autoreferacie podkreśla co najmniej dwukrotnie, że jest to jeden z głównych wyników rozprawy.

Zgadzam się, że zadanie nie jest całkiem trywialne, ale na pewno nie należy do trudnych i może być rozwiązane znacznie prostszymi metodami niż te, które proponowane są w pracy [5]. Wystarczy zauważyć, a są to elementarne rachunki, że lewa strona równości (1) ma dla dowolnego n postać

$$\sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \left[\binom{n}{k-1} (k-2)^n + \binom{n}{k} k^n \right] + (-1)^n\, n \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k+1} k^n$$

$$\overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k+1}\, k! S(n,k) = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, (-1)_k \overset{(3)}{=} (-1)^{n+1}\, (-1)^n = -1,$$

gdzie (1) wynika z rekurencji dla współczynników dwumianowych, (2) z szeroko znanej reprezentacji liczb Stirlinga drugiego rodzaju $S(n, m) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} j^n$ (przy czym kolejno wykorzystuje się rekurencje dla współczynników dwumianowych), a (3) z definicji liczb Stirlinga: $x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\,(x)_k$ dla $x = -1$.

W pracy [5] badano także trudności pojawiające się w analizie związków między oboma rozważanymi rodzajami wypukłości rzędu n, gdy n jest liczbą parzystą, ale ta część pracy, jak również konstrukcja funkcji 3-Jensen wypukłej, która nie jest 3-Wright wypukła, będącej prefiguracją omówionego wyżej kontrprzykładu, wykonane były (zgodnie z załączonym oświadczeniem) przez jednego ze współautorów.

Omówienie pozostałego dorobku naukowego

Pozostały dorobek naukowy habilitantki dzieli się wyraźnie na trzy grupy: (1) badanie zagadnień wypukłości, czyli tematyka bezpośrednio związana z rozprawą habilitacyjną, (2) problematyka rozkładalności miar probabilistycznych wywodząca się z czasów, gdy habilitantka była uczennicą prof. Kazimierza

Urbanika, (3) zastosowania rachunku prawdopodobieństwa w zagadnieniach przesyłania informacji. Tylko dwie prace wchodzące w skład pozostałego dorobku pochodzą z listy JCR.

Co do innych prac związanych z wypukłością to dotyczą one: wykorzystania probabilistyki do badania silnej wypukłości (wartość tej pracy polega na zwróceniu uwagi specjalistom w dziedzinie funkcji wypukłych na skuteczność nawet bardzo elementarnych metod probabilistycznych), uogólnienia pojęcia wypukłości w sensie Schura (silna wypukłość w sensie Schura) i charakteryzacji funkcji generujących sumy silnie wypukłe w sensie Schura. Pozostałe trzy prace, dotyczące zagadnień wypukłości według spisu publikacji zamieszczonego w autoreferacie, nie zostały jeszcze opublikowane (ani przyjęte do druku), zatem nie podlegają formalnej ocenie. Ich umieszczenie w spisie prac, świadczy o tym, że tematyka wypukłości stała się pierwszoplanowym zainteresowaniem habilitantki, mimo że przez wiele lat badania naukowe habilitantki poświęcone były własnościom miar probabilistycznych.

Prace probabilistyczne koncentrują się na tematyce samorozkładalności miar uprawianej m.in. przez prof. Kazimierza Urbanika i grono jego uczniów, do którego należała dr Teresa Rajba. Najciekawsze wyniki habilitantki w tej dziedzinie pochodzą z okresu bliskiej współpracy z Mistrzem. Najważniejsza jest moim zdaniem praca P3, zawierająca wyniki z pracy doktorskiej habilitantki, dotyczące zbioru półgrup rozkładalności miar probabilistycznych na prostej. W pracy tej wprowadzono też użyteczne pojęcie rozkładalności miary probabilistycznej względem rodziny rozkładów. Praca ta jest cytowana w kilku ważnych publikacjach poświęconych rozkładalności miar probabilistycznych, m.in. w monografii Z. Jurek, D. Manson, *Operator-limit distributions in probability theory* (Wiley, 1993). Na uwagę zasługuje też praca P1. Podano w niej przykład miary probabilistycznej, która nie jest nieskończenie podzielna, a jej półgrupa rozkładalności zawiera otoczenie zera. Ten wynik rozstrzygnął negatywnie hipotezę postawioną przez K. Urbanika. Praca ta również była cytowana we wspomnianej monografii. Pozostałe prace dotyczyły różnych specjalnych własności samorozkładalności i uogólnień tego pojecia, m.in, hierarchii klas Urbanika L_m miar m-samorozkładalnych, rozkładalności wielokrotnej, semi-samorozkładalności czy samorozkładalności operatorowej. Zawierają one pewne uogólnienia, bądź uszczegółowienia pojęcia samorozkładalności, z których niektóre można uznać za ciekawe, ale prace te nie mają już takiego ciężaru gatunkowego jak wspomniane dwa wczesne artykuły habilitantki. Wydaje się, że tematyka samorozkładalności miar probabilistycznych, intensywnie rozwijana w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych w pewnym sensie się wyczerpała i jest teraz na uboczu głównych nurtów teorii prawdopodobieństwa. Prace publikowane w tej dziedzinie są rzadko, głównie przez naukowców japońskich, skupionych wokół M. Maejimy, poświęcone są bardzo wąskim zagadnieniom i nie wzbudzają takiego zainteresowania jak wcześniejsze prace Urbanika i jego uczniów. Więc z tego punktu widzenia nie dziwi mnie, że habilitantka poszukiwała nowej dziedziny badań i rezultatem tych poszukiwań było zainteresowanie pojęciem wypukłości i jego uogólnieniami. Tym niemniej, prace habilitantki dotyczące samorozkładalności miar są, moim zdaniem, na wyższym poziomie matematycznym, niż te poświęcone zagadnieniom wypukłości. Dotyczy to zarówno istotności wyników, jak i jakości prowadzonych rozumowań oraz zaawansowania stosowanych narzędzi.

Trzecia tematyka dotyczy zastosowań probabilistyki do zagadnień transmisji informacji (ciekawostką wśród tych prac jest praca o optymalnym sterowaniu jachtem -pochodzi z materiałów konferencji, która miała miejsce na jachcie "Pogoria"). Tematyka ta stanowi pokaźną część dorobku (11 publikacji na 30 poza pracami wchodzącymi w skład rozprawy habilitacyjnej). Poza jedną, wszystkie prace w tej dziedzinie są współautroskie. Ostatnie dotyczą sieci bezprzewodowych. Tematem dwóch ostatnich prac (przedstawionych w dokumentacji) są prawdopodobieństwa kolizji w sieciach z poissonowskim strumieniem zgłoszeń. Model probabilistyczny jest elementarny, a znalezienie odpowiednich prawdopodobieństw sprowadza się łatwo do zadania obliczenia objętości wielowymiarowego sympleksu. Rachunki przeprowadzone są w pracy z *Przeglądu Elektronicznego*. Natknąłem się w niej jednak na sporo nieścisłości, których źródłem wydaje się być brak uważnej korekty: prawdopodobieństwa są większe od jeden, wartość oczekiwana dodatniej zmiennej losowej jest ujemna. Razi mnie też opatrywanie elementarnych obserwacji probabilistycznych etykietami "Twierdzenie". Czasopismo *Przegląd Elektrotechniczny* jest na liście JCR. W drugiej pracy załączonej w dokumentacji (przyjętej do druku) pojawiają się ponownie te same, budzące moje wątpliwości, wzory na prawdopodobieństwo kolizji (chyba brak w nich symbolu części dodatniej). Nie zauważam w tej drugiej pracy żadnej dodanej wartości matematycznej. Pozostałe artykuły w tej dziedzinie są publikowane w czasopismach niższej rangi, a liczba cytowań (poza autocytowaniami) jest znikoma.

Konkluzja

Trzy z publikacji składających się na recenzowaną rozprawę doktorską ukazały się w czasopiśmie *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, jedna w *Mathematical Inequalities and Applications.* Według formalnych ocen punktowych oba te czasopisma są wysoko notowane. Pierwsze z nich ma 40 punktów, a drugie 25 według obecnie obowiązującej punktacji ministerialnej. Niestety, punktacja czasopism niekoniecznie odpowiada wartości wyników publikowanych prac. Tak jest właśnie w omawianym przypadku. Recenzowana rozprawa habilitacyjna, moim zdaniem, nie zawiera wyników matematycznych na tyle istotnych, aby spełnione były kryteria ustawowe obowiązujące dla stopnia doktora habilitowanego. Mam nadzieję, że jasno na to wskazuje przedstawione wyżej omówienie poszczególnych publikacji składających się na tę rozprawę. Pozostały dorobek, choć ilościowo adekwatny, również trudno uznać za upoważniający do pozytywnego wniosku o stopień doktora habilitowanego. Zwraca uwagę brak publikacji w ważnych czasopismach probabilistycznych podczas długiego okresu po uzyskaniu stopnia doktora, w którym główną dziedziną pracy naukowej habilitantki była teoria prawdopodobieństwa. Prace, poza publikacją zawierającą wyniki z rozprawy doktorskiej, oraz pracą o probabilistycznych metodach badania silnej wypukłości, są jedynie sporadycznie cytowane przez innych autorów. Indeks Hirscha według bazy Web of Science wynosi jeden! Z drugiej strony, w pracach ściśle matematycznych habilitantka prezentuje sporą erudycję i godną podkreślenia troskę o precyzje sformułowań, a dowody są przedstawiane z dużą starannością. Jednak to nie równoważy w mojej opinii innych niedostatków rozprawy habilitacyjnej (i pozostałego dorobku), z których najważniejszy polega na braku naprawdę głębokich wyników; wyników, które istotnie rozwijałyby rozumienie pojęcia wypukłości. Kandydatem na wynik o takim charakterze, w pierwszym czytaniu, wydawał się być przykład funkcji n-wypukłej w sensie Jensena, która nie jest n-wypukła w sensie Wrighta - głównie ze względu na towarzyszącą mu zaawansowaną konstrukcję teorio-miarową wykorzystaną w uzasadnieniu. Niestety, jak to opisałem wyżej przy omawianiu pracy [5], do wyjaśnienie dlaczego kontrprzykład działa, można w dość prosty sposób wykorzystać znane własności liczb Stirlinga, co wyraźnie uszło uwadze autorów.

Z przykrością stwierdzam, że przedstawiona rozprawa habilitacyjna (wraz z pozostałym dorobkiem naukowym) nie jest wystarczająca do postawienia wniosku o nadanie stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie matematyki pani dr Teresie Rajbie.

J. Wesołowski