**dr Teresa Rajba**

# 2. ZAŁĄCZNIK do Wniosku

# AUTOREFERAT w języku polskim

# AUTOREFERAT

## 1. Imię i Nazwisko: Teresa Rajba

## 2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe

- 1981 – uzyskanie stopnia doktora nauk matematycznych,
  Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski,
  rozprawa doktorska:
  *O półgrupach rozkładalności miar probabilistycznych na prostej*,
  promotor: prof. dr hab. Kazimierz Urbanik,
- 1976 – uzyskanie stopnia magistra matematyki,
  Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski,
  praca magisterska: *Półgrupy rozkładalności miar probabilistycznych na prostej*,
  promotor: prof. dr hab. Kazimierz Urbanik,
  Nagroda I STOPNIA, w KONKURSIE POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO na najlepszą pracę studencką z teorii prawdopodobieństwa i zastosowań matematyki.

## 3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- od października 2001 r.: adiunkt w Katedrze Matematyki i Informatyki, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej,
- październik 1999 r. – wrzesień 2001 r.: adiunkt w KMiI, WBMiI, filia PŁ w Bielsku-Białej,
- październik 1981 r. – wrzesień 1999 r.: adiunkt w Zakładzie Rachunku Prawdopodobieństwa, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii, Uniwersytet Wrocławski,
- październik 1976 r. – wrzesień 1981 r.: asystent w Zakładzie Rachunku Prawdopodobieństwa, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii, Uniwersytet Wrocławski.

## 4. Wskazanie osiągnięcia* wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):

## a) tytuł osiągnięcia naukowego

***Analiza własności uogólnionych funkcji wypukłych i funkcji wypukłych wyższych rzędów***

### b) Rozprawa składa się z następujących publikacji:

[R1] T. Rajba, New integral representations of nth order convex functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 379 (2) (2011), 736–747.

[R2] T. Rajba, An application of the Choquet theorem to the study of randomly–superinvariant measures. *Opuscula Math.*, 32 (2) (2012), 317–326.

[R3] T. Rajba, A generalization of multiple Wright–convex functions via randomization. *J. Math. Anal. Appl.*, 388(1) (2012), 548–565.

[R4] T. Rajba and B. Micherda, On some Hermite-Hadamard-Fejér inequalities for (k,h)–convex functions, *Math. Inequal. Appl.*, 15 (4) (2012), 931–940.

[R5] T. Rajba, K. Nikodem and W. Wąsowicz, On the classes of higher–order Jensen–convex functions and Wright–convex functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 396 (2012), 261–269.

### c) omówienie celu naukowego/artystycznego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

# Spis treści

# Wstęp

Niniejsze opracowanie stanowi omówienie wyników wchodzących w skład mojej rozprawy habilitacyjnej *Analiza własności uogólnionych funkcji wypukłych i funkcji wypukłych wyższych rzędów* oraz moich pozostałych prac. Obiektem moich zainteresowań są klasy uogólnień funkcji wypukłej, funkcji wypukłych wyższych rzędów oraz uogólnień funkcji wypukłych wyższych rzędów. Celem rozprawy jest zbadanie własności funkcji należących do tych klas oraz zależności między nimi.

Klasyczne pojęcie wypukłości w ciągu upływu czasu doczekało się wielu uogólnień idących w różnych kierunkach. Sa one ważne w wielu działach matematyki.

Tak zwane Jensen-wypukłe funkcje (funkcje wypukłe w sensie Jensena) zostały wprowadzone przez J.L.W.V. Jensena [**60, 61**], jakkolwiek funkcje spełniające podobne warunki były już badane przez O. Höldera [**51**], J. Hadamarda [**49**] oraz O. Stolza [**159**]. Podstawowe własności funkcji Jensen-wypukłych w jednowymiarowym przypadku zostały udowodnione przez samego Jensena oraz przez F. Bernsteina i G. Doetscha [**12**]. Uogólnienia na wielowymiarowy przypadek zostały zrobione przez H. Blumberga [**17**] i E. Mohra [**118**]. Warto zaznaczyć, że funkcje zwane wypukłymi pokrywają się z klasa funkcji Jensen-wypukłych ciągłych. Funkcje wypukłe są bardzo dobrze zbadane, np. Rockafellar [**142**]. Roberts-Varberg [**141**] i Kuczma [**79**].

W roku 1926 Hopf w rozprawie doktorskiej [**55**] rozważał funkcje o nieujemnych ilorazach różnicowych (divided differences) ustalonego rzędu. W pracach Popoviciu [**136, 138**] na określenie tego rodzaju wypukłości proponowana jest nazwa *funkcje wypukłe wyższych rzędów.* W 1954 E.M. Wright [**192**] wprowadził funkcje zwane Wright-wypukłymi funkcjami. W pracy [**41**], A. Gilányi i Zs. Páles, wprowadzili funkcje Wright–wypukłe wyższych rzędów. W pracy [**177**] zostały wprowadzone przez Varošanec, tak zwane $h$–wypukłe funkcje.

W rozprawie definiuję i badam klasę funkcji $(k, h)$–wypukłych, które są uogólnieniem funkcji $h$–wypukłych. Przedmiotem intensywnych badań są ostatnio nierówności typu Hermite'a–Hadamarda–Fejéra. W rozprawie podaję nowe nierówności typu Hermite'a–Hadamarda–Fejéra, które są uogólnieniem dotychczas znanych nierówności tego typu.

Zajmuję się też porównywaniem klas $n$–Wright–wypukłych funkcji i $n$–Jensen–wypukłych funkcji. Rozważając operatory odwrotne do operatorów różnicowych oraz wprowadzając nowe narzędzia związane z teorią miary otrzymuję twierdzenia dotyczące istnienia nietrywialnych funkcji należących tylko do jednej z tych klas.

Zastosowanie metod probabilistycznych prowadzi do znalezienia nowej reprezentacji całkowej funkcji $n$-wypukłych. Reprezentacja ta jest następnie wykorzystana do dalszej charakteryzacji funkcji $n$-wypukłych.

W rozprawie definiuję również i badam uogólnienie poprzez randomizację funkcji wielokrotnie Wright–wypukłych.

Moim zdaniem do najistotniejszych wyników rozprawy należą:

- charakteryzacja $(k, h)$–wypukłości: definicja funkcji $(k, h)$–wypukłych : [**R4**] Def. 2.4; nierówności typu Hermite'a–Hadamarda–Fejéra dla funkcji $(k, h)$–wypukłych: [**R4**], Th. 3.1, Th. 3.5, Cor. 3.3, Cor. 3.7; nierówności typu Hermite'a-Hadamarda dla funkcji $(k, h)$–wypukłych: [**R4**], Cor 3.2, Cor. 3.6; definicja i charakteryzacja zbiorów $k$–wypukłych: [**R4**], Def. 2.1, Ex. 2.2.1, Rem. 2.1;
- wzór dla funkcji, która jest $n$-Jensen wypukła, ale nie jest $n$–Wright wypukła: [**R5**], Th. 2.3, dla $n \in \mathbb{N}$ nieparzystych; wzór dla operatora, który jest operatorem odwrotnym do operatora różnocowego: [**R5**], Prop. 4.2 – 4.3;
- charakteryzacja $n$–wypukłości: reprezentacje całkowe funkcji $n$–wypukłej: [**R1**], Th. 2.9, 2.10; wzór na reprezentację funkcji $n$–wypukłej w postaci sumy funkcji $(n + 1)$–krotnie monotonicznych i wielomianu stopnie co najwyżej $n$: [**R1**], Th. 3.2; definicja i charakteryzacja względnej $n$–wypukłości: [**R1**], Th. 4.3 – 4.7, , Th. 4.10 – 4.12;

definicja i charakteryzacja silnej $n$-wypukłości: [**R1**], Th. 4.15, Cor. 4.16 – 4.17; zasada o podparciach typu Wąsowicza funkcjami $n$–wypukłymi: [**R1**], Th. 5.4;

- charakteryzacja zrandomizowanych funkcji wielokrotnie Wright–wypukłych: [**R3**], Th. 2.6, Th. 2.8, Th. 3.6, Th. 3.9, Th. 4.1, Th. 5.2, Th. 6.2, Th. 6.3, Th. 7.1, Th. 7.4; charakteryzacja zrandomizowanych-nadniezmienniczych miar: [**R2**], Th.4.3, Th. 4.4.;

W rozdziale 1 przedstawiam zarys idei oraz ogólne sformułowanie wyników, a także wskazuję na trudności związane z ich uzyskaniem. W rozdziale 2 wprowadzam klasę funkcji $(k, h)$-wypukłych zdefiniowanych na $k$–wypukłych zbiorach, oraz dowodzę nowe nierówności typu Hermite'a-Hadamarda i Fejéra dla takich odwzorowań. W rozdziale 3 są porównywane klasy funkcji $n$–Wright–wypukłych oraz $n$–Jensen–wypukłych. Pokazuje się, że dla każdej liczby naturalnej $n$ nieparzystej pierwsza z nich jest właściwą podklasą drugiej. Żeby to pokazać rozwijane są nowe narzędzie związane z teorią miary. W rozdziale 4 przedstawiam nową reprezentację całkową funkcji $n$-wypukłych, którą wykorzystuję do znalezienia związku funkcji $n$–wypukłej z funkcjami wielokrotnie monotonicznymi, charakteryzacji silnej $n$–wypukłości i badania własności typu podparciowego dla funkcji $n$–wypukłych. W rozdziale 5 definiuję badam funkcje wielokrotnie Wright–wypukłe uogólnienione poprzez randomizację. Natomiast w rozdziale 6 krótko omawiam wyniki naukowe, które nie wchodzą w skład rozprawy. Rozdział 7 zawiera podstawowe informacje o autorze.

ROZDZIAŁ 1

# Wprowadzenie

W całym autoreferacie $I \subset \mathbb{R}$ oznaczać będzie dowolny, ale ustalony przedział.

## 1. Funkcje wypukłe, Jensen-wypukłe, Wright-wypukłe.

**Funkcja wypukła.** Funkcję $f : I \to \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą*, jeśli

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) \tag{1}$$

dla wszystkich $x, y \in I$ i dla każdego $t \in [0, 1]$.

**Nierówność Hermite'a–Hadamarda.** Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest wypukła, to jest ciągła w przedziale $(a, b)$ i ograniczona w $[a, b]$, w szczególności jest więc całkowalna. Zachodzi wtedy nierówność

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{2}$$

zwana *nierównością Hermite'a–Hadamarda.* Jej idące w różnych kierunkach uogólnienia są intensywnie badane przez wielu autorów. Szeroki przegląd zawiera monografia [**32**]. Uwagi poświęcone historii tej nierówności można znaleźć w pracy [**116**]. Warto dodać, że w klasie funkcji ciągłych z każdej z obu powyższych nierówności wynika wypukłość (zob. np. [**32, 52, 120**], a także [**79**, Exercise 8, str. 205] lub [**141**, Problem Q, str. 15]). Zagadnieniom tego rodzaju charakteryzacji funkcji wypukłych wyższych rzędów poświęcona jest praca [**15**].

Nierówność (2) ma związek z przybliżonym obliczaniem całek, a dokładnie z metodami prostokątów i trapezów. Wynikają z niej znane w analizie numerycznej oszacowania błędów tych metod.

**Nierówność Hermite'a–Hadamarda–Fejéra.** W pracy[**35**] Fejér podał następujące uogólnienie nierówności (2):

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot \int_a^b g(x)\,dx, \tag{3}$$

która zachodzi, jeśli $f$ jest wypukła i $g$ jest nieujemna i symetryczna względem punktu $(a+b)/2$. Wiele modyfikacji nierówności (3) można znaleźć np. w [**32**] i w innych pracach tam podanych.

## 2. Zbiory $k$-wypukłe. Funkcje $(k, h)$–wypukłe

W pracy [**R4**] wprowadzamy klasę funkcji $(k, h)$-wypukłych zdefiniowanych na $k$-wypukłej dziedzinie, i dowodzimy nowe nierówności typu Hermite-Hadamarda i Fejéra dla takich odwzorowań. To uogólnia wyniki dla $h$-wypukłych funkcji podane w [**18, 149**], i dla Orlicza-$s$-wypukłych odwzorowań podane w [**31**].

**Funkcje Jensen-wypukłe.** Funkcję $f : I \to \mathbb{R}$ nazywamy *Jensen-wypukłą* (cf. [**141**]), jeśli

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{4}$$

dla wszystkich $x, y \in I$.

**Funkcje $h$-wypukłe.** Niech $h:(0,1)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją nieujemną, $h\neq 0$. Nieujemna funkcja $f:I\to\mathbb{R}$ jest nazywana *$h$-wypukłą*, jeśli

$$f\big(tx+(1-t)y\big)\leqslant h(t)f(x)+h(1-t)f(y), \tag{5}$$

dla wszystkich $x,y\in I$ i $t\in(0,1)$ (patrz [**177**]). To pojęcie uogólnia pojęcie klasycznej wypukłości (dla $h(t)=t$, patrz np. [**79, 141**]), $s$-Breckner-wypukłości (dla $h(t)=t^s$, z pewnym $s\in(0,1)$, patrz [**20, 56**]), P-funkcji (dla $h(t)=1$, patrz [**128**]) i Godunova-Levin funkcji (dla $h(t)=t^{-1}$, patrz [**44**]). W pracy Bombardelli i Varošanec [**18**], zostały uzyskane nierówności typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra dla $h$-wypukłych funkcji. W [**149**] Sarikaya, Set i Özdemir udowodnili inną wersję nierówności typu Fejéra dla $h$-wypukłych funkcji.

**Zbiory $k$-wypukłe.** Niech $k:(0,1)\to\mathbb{R}$ będzie daną funkcją. Wtedy podzbiór $D$ liniowej przestrzeni rzeczywistej $X$ będziemy nazywać *$k$-wypukłym*, jeśli $k(t)x+k(1-t)y\in D$ dla wszystkich $x,y\in D$ i $t\in(0,1)$ (patrz [**R4**], Definition 2.1). Według podanej wyżej definicji, dla odpowiednio dobranej funkcji $k$, można otrzymać rodziny różnych znanych zbiorów. Nasza definicja pokrywa się z definicją klasycznej wypukłości dla $k(t)=t$. Jeśli $k(t)=t^{\frac{1}{p}}$ z $p\in(0,1)$, to $D$ jest $k$-wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy jest $p$-wypukły (patrz np. [**143**]). Dla $s>0$ i $k(t)=t^{\frac{1}{s}}$, rodzina $k$-wypukłych zbiorów jest równa klasie $s$-Orlicz-wypukłych zbiorów, zdefiniowanych przez Dragomira i Fitzpatricka w [**30**]. Jeżeli $k(t)=1$ dla wszystkich $t$, to $D$ jest $k$-wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy $(D,+)$ jest półgrupą. Dla $k(t)=\frac{1}{2}$, nasza definicja generuje rodzinę podwypukłych podzbiorów $X$. Niech $k$ będzie zdefiniowana przy pomocy wzoru: $k(t)=2t$ dla $t<\frac{1}{2}$ i $k(t)=0$ dla $t\geqslant\frac{1}{2}$. Wtedy $D$ jest $k$-wypukłym zbiorem wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem gwiaździstym względem 0, tzn. $tx\in D$ dla wszystkich $t\in[0,1]$ i $x\in D$. W [**R4**] podajemy podstawowe własności $k$-wypukłych podzbiorów przestrzeni liniowej.

**Funkcje $(k,h)$-wypukłe.** Niech $k,h:(0,1)\to\mathbb{R}$ będą dwiema funkcjami i załóżmy, że $D\subset X$ jest $k$-wypukłym zbiorem. Wtedy funkcja $f:D\to\mathbb{R}$ jest *$(k,h)$-wypukła*, jeśli

$$f\big(k(t)x+k(1-t)y\big)\leq h(t)f(x)+h(1-t)f(y) \tag{6}$$

dla wszystkich $x,y\in D$ i $t\in(0,1)$ (patrz [**R4**], Definition 2.4). Jeśli w nierówności (6) nierówność możemy zastąpić odpowiednio równością, to $f$ będziemy nazywać *$(k,h)$-afiniczną* (ogólniejsze funkcje tego typu są badane w pracy [**98**]). W szczególności, dla odpowiednio dobranych funkcji $k$ i $h$, przy pomocy warunku (6) możemy otrzymać następujące rodziny funkcji: $h$–wypukłych (przy dodatkowym założeniu nieujemności), $s$-Breckner-wypukłych funkcji, $P$-funkcji i Godunova-Levin funkcji, $s$-Orlicz-wypukłych funkcji, podaddytywnych funkcji i funkcji gwiaździstych, między innymi.

**Nierówności typu Hermite'a–Hadamarda–Fejéra dla funkcji $(k,h)$-wypukłych.** Jako główne wyniki pracy [**R4**] dowodzimy dwie nierówności typu Hermite'a–Hadamarda–Fejéra dla $(k,h)$-wypukłych funkcji ([**R4**], Theorem 3.1, Theorem 3.5), i stosujemy je dla różnych klas odwzorowań : dla $s$–Orlicz wypukłych funkcji, dla gwiaździstych funkcji, dla $h$–wypukłych funkcji, między innymi. Uogólnia to, wyniki dla $h$-wypukłych funkcji podane w[**18**], [**149**], i $s$-Orlicz-wypukłych funkcji podane w [**31**].

Warto dodać, że Attila Házy w 2012 r. na 50-th International Symposium on Functional Equations w Hajdúszoboszló uogólnił nasze pojęcie $(k,h)$-wypukłości funkcji. Zdefiniował on i badał $(k,h)$-wypukłe funkcje względem pewnego zbioru $T\subset[0,1]$, jako funkcje spełniające warunek (6) dla $t\in T$.

## 3. Funkcje $n$-Jensen-wypukłe oraz $n$-Wright-wypukłe

**Operatory różnicowe.** Zwykły *operator różnicowy (przedni, ang. forward difference)* jest oznaczany jako

$$\Delta_h f(x)=f(x+h)-f(x),$$

gdzie $x\in\mathcal{I}$ i $h\in\mathbb{R}$ z $x+h\in\mathcal{I}$. Jego iteracje definiujemy w zwykły sposób, tzn.

$$\Delta_{h_1\dots h_n h_{n+1}} f(x)=\Delta_{h_1\dots h_n}\big(\Delta_{h_{n+1}} f(x)\big),$$

gdzie $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathcal{I}$ i $h_1,\dots,h_n,h_{n+1}\in\mathbb{R}$ zakładając, że wszystkie potrzebne argumenty należą do $\mathcal{I}$ (czasami będziemy pomijać oczywiste założenia tego rodzaju). Jeżeli zachodzi warunek $h_1=\dots=h_n=h$, używamy standardowo

$$\Delta_h^n f(x)=\Delta_{h\dots h} f(x)\,,$$

gdzie element $h$ jest wzięty $n$ razy. będziemy również używać *operatora różnicowego wstecznego (ang. backward difference)*, który jest zdefiniowany wzorem

$$\nabla_h f(x) = f(x) - f(x-h), \tag{7}$$

gdzie $x \in \mathcal{I}$, $h \in \mathbb{R}$ i $x - h \in \mathcal{I}$. Iteracje są zdefiniowane podobnie jak dla zwykłego operatora różnicowego. Oczywiście, zachodzi wzór $\nabla_h f(x+h) = \Delta_h f(x)$, przez indukcję otrzymujemy następującą zależność

$$\nabla_{h_1 \ldots h_{n+1}} f(x + h_1 + \cdots + h_{n+1}) = \Delta_{h_1 \ldots h_{n+1}} f(x)\,, \tag{8}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$. W dalszym ciągu zakładamy, że $n \in \mathbb{N}$.

**Funkcje $n$–Jensen–wypukłe.** Funkcja $f$ jest nazywana *Jensen–wypukłą rzędu $n$* ($n$–Jensen–wypukłą, w skrócie), jeśli

$$\Delta_h^{n+1} f(x) \geqslant 0 \tag{9}$$

dla wszystkich $x \in \mathcal{I}$ i $h > 0$ takich, że $x + nh \in \mathcal{I}$ (patrz również np. [**79**]). Oczywiście dla $n = 1$ otrzymujemy warunek

$$\Delta_h^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \geqslant 0$$

dla wszystkich $x \in \mathcal{I}$ i $h > 0$ z $x + h \in \mathcal{I}$, co jest równoważne warunkowi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x, y \in \mathcal{I},$$

tzn. Jensen–wypukłości funkcji $f$.

**Funkcja Wright-wypukła.** W 1954 r. E. M. Wright [**192**] wprowadził nowy rodzaj wypukłości funkcji rzeczywistych: funkcję $f$ nazywamy *Wright–wypukłą* (porównaj [**141**]), jeśli

$$f\big(tx + (1-t)y\big) + f\big((1-t)x + ty\big) \leqslant f(x) + f(y) \tag{10}$$

dla wszystkich $x, y \in \mathcal{I}$ i $t \in [0,1]$. Oczywiście , jeżeli funkcja $f$ jest wypukła, to nierówność (1), która zachodzi dla każdego $t \in [0,1]$, zachodzi w szczególności dla $t = \frac{1}{2}$, tzn. spełniona jest nierówność (4), czyli $f$ jest Jensen-wypukła. Ponadto, jeżeli $f$ jest wypukła , to z (1) dostajemy dwie nierówności:

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y),$$
$$f\big((1-t)x + ty\big) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Dodając te nierówności stronami dostajemy (10), czyli $f$ jest Wright-wypukła. Natomiast, gdy w (10) weźmiemy $t = \frac{1}{2}$, to otrzymujemy (4). Czyli, jeżeli $f$ jest Wright-wypukła, to $f$ jest Jensen-wypukła.

**Funkcja $n$-Wright-wypukła.** Nietrudno pokazać, że warunek (10) jest równoważny warunkowi

$$\Delta_{h_1 h_2} f(x) \geqslant 0$$

dla wszystkich $x \in \mathcal{I}$, $h_1, h_2 > 0$ z $x + h_1 + h_2 \in \mathcal{I}$ (patrz [**99**]). Na podstawie tej obserwacji, w pracach [**41**] i [**99**], została zdefiniowana Wright–wypukłość wyższych rzędów: funkcja $f$ jest *Wright–wypukła rzędu $n$* ($n$–Wright–wypukła, w skrócie), gdy

$$\Delta_{h_1 \ldots h_{n+1}} f(x) \geqslant 0 \tag{11}$$

dla wszystkich $x \in \mathcal{I}$ and $h_1, \ldots, h_{n+1} > 0$ z $x + h_1 + \cdots + h_{n+1} \in \mathcal{I}$. Oczywiście, rozważając wyżej $h_1 = \cdots = h_{n+1} = h$, otrzymujemy $\Delta_h^{n+1} f(x) \geqslant 0$, co oznacza, że każda funkcja $n$–Wright wypukła jest $n$–Jensen wypukła.

Powstaje naturalne pytanie, czy jest prawdziwe zdanie odwrotne, tzn. czy funkcje $n$–Jensen–wypukłe są również funkcjami $n$–Wright–wypukłymi. Dla $n = 1$ nie jest trudno dać negatywną odpowiedź. mianowicie, funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = |a(x)|$, gdzie $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nieciągłą addytywną funkcją jest Jensen–wypukła, ale nie jest Wright–wypukła (por. [**122**]). w wielu pracach ( patrz np. [**41, 42, 99**]) można znaleźć intensywne badania dotyczące Wright-wypukłości wyższych rzędów. Jakkolwiek, wspomniany wyżej problem nie był tam rozważany. W pracy [**R5**] wypełniamy tę lukę poprzez podanie negatywnej odpowiedzi dla wszystkich $n$ dodatnich całkowitych (praca [**R5**] jest cytowana w [**74**]). Należy podkreślić, że dla $n > 1$ (nieparzystych) odpowiedni przykład nie jest łatwo skonstruować, tak jak to było w przypadku $n = 1$, tzn. w przypadku zwykłej Jensen–wypukłości i Wright–wypukłości. Żeby osiągnąć nasz cel wprowadzamy nowe narzędzia związane z teorią miary, które, mamy nadzieję, mogą okazać przydatne w dalszych badaniach. Należy wspomnieć, że dla $n$ parzystych wspomniany problem pozostaje otwarty. Przeprowadzamy również pewne rozważania dla $n = 2$ żeby pokazać, że dla $n$ parzystych nasz problem wydaje się być dość trudny.

Niech $n$ będzie naturalną liczbą nieparzystą i niech $H \subset \mathbb{R}$ będzie bazą Hamela, taką że $h_1, \dots, h_{n+1} \in H$ są różne i dodatnie. Niech $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie addytywną funkcją, taką że

$a(h_1) = -1, \quad a(h_2) = \cdots = a(h_{n+1}) = 1$. My dowodzimy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \big(a(x)\big)_+^n \tag{12}$$

jest $n$–Jensen–wypukła, ale nie jest $n$–Wright–wypukła (patrz [**R5**], Theorem 2.3). Jest to jeden z głównych wyników rozprawy.

Faktycznie, ponieważ funkcja $a$ jest addytywna, otrzymujemy, że funkcja $f$ is $n$–Jensen–wypukła (patrz [**R5**], Corollary 2.2). Żeby udowodnić, że $f$ nie jest $n$–Wright–wypukła wystarczy pokazać, że

$$\Delta_{h_1 \dots h_{n+1}} f(0) = \nabla_{h_1 \dots h_{n+1}} f(h_1 + \cdots + h_{n+1}) = -1. \tag{13}$$

Jednakże to zadanie nie jest trywialne. Wymaga wprowadzenia nowych narzędzi i jest raczej długie. Wstępnie, żeby rzucić nieco światła na charakter naszej głównego problemu, rozważamy równość (13) dla $n = 3$ (see [**R5**], p. 263-264). W ogólnym przypadku, dowód równości (13) jest trudny. Rozważamy pewien operator $\mathcal{J}_{h_1 h_2 \dots h_{n+1}}$ ([**R5**], p. 266), który, jak pokazujemy, jest operatorem odwrotnym do operatora $\nabla_{h_1 \dots h_{n+1}}$. Następnie, używając tego operatora, definiujemy pewne miary $\mu_i = \mathcal{J}_{h_1 \dots h_{n+1}} \delta_{h_i}$, $\quad i = 1, \dots, n+1$, oraz miarę znakowaną $\mu$ określoną wzorem $\mu = \mu_2 + \cdots + \mu_{n+1} - \mu_1$, dla której mamy równość

$$\nabla_{h_1 \dots h_{n+1}} f(h_1 + \cdots + h_{n+1}) = \nabla_{h_1 \dots h_{n+1}} (\mu + \delta_{h_1})^n (h_1 + \cdots + h_{n+1}), \tag{14}$$

(patrz [**R5**], Theorem 4.5). Dalej, dowodzimy, że zachodzą następujące równości:

- $f(x) = (\mu + \delta_{h_1})^n (x), \quad x \in A,$
- $(\mu + \delta_{h_1})^n (x) = \mu^n (x) - (-1)^n \delta_{h_1}(x), \quad x \in A,$
- $\nabla_{h_1, \dots, h_{n+1}} \mu^n (h_1 + \cdots + h_{n+1}) = 0,$
- $\nabla_{h_1, \dots, h_{n+1}} \delta_{h_1} (h_1 + \cdots + h_{n+1}) = (-1)^n,$

gdzie $A$ jest pewnym podzbiorem $\mathbb{R}$ (patrz [**R5**], Theorem 4.5, Lemma 4.6), z których, w połączeniu z (14), wynika ostatecznie nasza równość (13).

## 4. Funkcje $n$-wypukłe. Reprezentacja całkowa

**Ilorazy różnicowe.** Dla $n+1$ parami różnych punktów $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$ określamy rekurencyjnie *iloraz różnicowy $n$–tego rzędu* (w skrócie iloraz różnicowy )funkcji $f : I \to \mathbb{R}$:

$$[x_1; f] := f(x_1), \quad [x_1, \dots, x_{n+1}; f] := \frac{[x_2, \dots, x_{n+1}; f] - [x_1, \dots, x_n; f]}{x_{n+1} - x_1}.$$

W szczególności

$$[x_1, x_2; f] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

więc zwykły iloraz różnicowy jest ilorazem różnicowym pierwszego rzędu.

Na określenie tego pojęcia literatura angielskojęzyczna używa terminu *divided differences.* Ilorazy różnicowe mają podstawowe znaczenie w analizie numerycznej. Ich własności są dobrze zbadane (zob. np. [**55, 79, 136**]).

**Funkcje $n$-wypukłe – definicja.** Można zauważyć, że funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych trzech parami różnych punktów $x_1, x_2, x_3 \in I$, iloraz różnicowy $[x_1, x_2, x_3; f]$ jest nieujemny. Śladem takiego rozumienia wypukłości podążył jako pierwszy niemiecki matematyk Hopf. W swojej rozprawie doktorskiej [**55**] z roku 1926 rozważał funkcje z nieujemnymi ilorazami różnicowymi dowodząc m. in. podstawowych własności regularnościowych. Nie użył jednak żadnej nazwy dla klasy badanych przez siebie funkcji. Dopiero osiem lat później rumuński matematyk Popoviciu w swojej rozprawie doktorskiej [**136**] wprowadził nazwy „funkcje wypukłe wyższych rzędów" oraz „funkcje $n$–wypukłe".

Niech $n \in \mathbb{N}$. Funkcję $f : I \to \mathbb{R}$ nazywamy *$n$–wypukłą* (*wypukłą $n$–tego rzędu*), jeśli

$$[x_1, \dots, x_{n+2}; f] \geqslant 0$$

dla każdych $n+2$ parami różnych punktów $x_1, \dots, x_{n+2} \in I$. Funkcja $f$ jest *$n$–wklęsła,* jeśli funkcja $-f$ jest $n$–wypukła.

W ten sposób funkcje 1–wypukłe są wypukłe w zwykłym sensie.

**Funkcje $n$-wypukłe – własności.** Wiele wyników o funkcjach $n$-wypukłych można znaleźć, między innymi, w [**141, 79**]. W szczególności, wiemy że, funkcja $f(x)\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest $n$-wypukła ($n \geqslant 1$) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna prawostronna $f_R^{(n)}(x)$ (lub lewostronna $f_L^{(n)}(x)$) istnieje i jest nie-malejąca na odcinku $(a,b)$. W dalszym ciągu pracy $f^{(n)}(x)$ będziemy używać do oznaczenia $f_R^{(n)}(x)$.

**Funkcje $n$-wypukłe – reprezentacja całkowa.** Jeżeli $f(x)$ jest wystarczająco gładka na $[a,b]$ (tzn. jest $(n+1)$-razy różniczkowalna na $[a,b]$ w sposób ciągły, przy czym na końcach przedziału zakłada się różniczkowalność z lewej, bądź odpowiednio z prawej strony), wtedy ze wzoru Taylora otrzymujemy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_a^b (x-t)_+^n f^{(n)}(t)dt$$

($x \in (a,b)$), gdzie $(x-t)_+^{n-1} = \max\{(x-t)^{n-1}, 0\}$ (patrz [**131**]).

Załóżmy, że $f(x)$ jest $n$-wypukła na $(a,b)$ ($n \geqslant 1$). Wtedy pochodne lewo i prawostronne $n$-tego rzędu ($f_L^{(n)}(x)$ and $f_R^{(n)}(x)$) istnieją na $(a,b)$. Dodatkowo, obie te funkcje są niemalejące. Z taką funkcją $f$ związujemy pewną miarę $\mu$ zdefiniowaną na $(a,b)$ następującym wzorem

$$\mu([x,y]) = f_R^{(n)}(y) - f_L^{(n)}(x),$$

dla $a < x \leqslant y < b$. Jest to nieujemna borelowska miara na $(a,b)$. Jeśli granica prawostronna $f_R^{(n)}(a) = \lim_{x\to a+} f_R^{(n)}(x)$ jest skończona, wtedy miara $\mu$ może być rozszerzona do ograniczonej (skończonej) miary na całym odcinku $[a,c]$, dla wszystkich $c < b$. W tym przypadku funkcja $f(x)$ ma reprezentację

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_R^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_a^b (x-t)_+^n d\mu(t),$$

dla wszystkich $x \in (a,b)$. Jeśli nie możemy rozszerzyć miary $\mu$ do punktu końcowego $a$, wtedy będziemy mieć te reprezentacje tylko na domkniętych podprzedziałach przedziału $(a,b)$. Twierdzenie odwrotne również zachodzi. Wyniki te można znaleźć w Popoviciu [**136**] (patrz też Karlin i Studden [**76**], Bullen [**22**], Brown [**21**], Granata [**45**], Pinkus i Wulbert [**131**]). Inaczej mówiąc, powyższa reprezentacja jest prawdziwa dla $x \in (a,b)$, jeżeli $\mu$ jest o wahaniu skończonym na $(a,b)$, w przeciwnym razie mamy te reprezentację tylko na podprzedziałach domkniętych $(a,b)$.

W pracy [**R1**], podaję analogiczną reprezentację całkową, w ogólnym przypadku. Reprezentacja, którą otrzymuję ([**R1**], Theorems:2.9 and Theorem 2.10) dotyczy miar $\mu$ z niekoniecznie skończonymi wahaniami. Jest to jeden z głównych wyników rozprawy. Niech $\xi \in (a,b)$. Dowodzę, że $n$-wypukła funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma reprezentację dana wzorem

$$f(x) = \int_{(a,\xi]} (-1)^{n+1} \frac{[-(x-u)]_+^n}{n!} \mu_{(n)\xi-}(du) + \int_{[\xi,b)} \frac{(x-u)_+^n}{n!} \mu_{(n)\xi+}(du) + Q_\xi(x), \tag{15}$$

gdzie $\mu_{(n)\xi-}(du) = d[f^{(n)}(u) - f^{(n)}(\xi+)]_-$, $\mu_{(n)\xi+}(du) = d[f^{(n)}(u) - f^{(n)}(\xi+)]_+$, $Q_\xi \in \Pi_n$ ([**R1**], Theorem 2.10). Ponadto. miara $\mu_{(n)} = \mu_{(n)\xi-} + \mu_{(n)\xi+}$ jest niezależna od $\xi$ oraz zachodzi wzór $\mu_{(n)}(du) = df^{(n)}(u)$. Miara $\mu_{(n)}$ jest nazywana miarą spektralną odpowiadającą funkcji $f$. Jeżeli przynajmniej jedna z granic jednostronnych $\lim_{x\to a+} f_R^{(n)}(x)$ lub $\lim_{x\to b-} f_L^{(n)}(x)$ jest skończona, to w powyższej reprezentacji, może występować tylko jedna z całek, pierwsza (z $\xi = b$) lub druga (z $\xi = a$), odpowiednio ([**R1**], Theorem 2.9). Natomiast, jeżeli obie powyższe granice jednostronne są nieskończone to w reprezentacji (15) muszą być dwie całki (z $\xi \in (a,b)$).

**$n$-wypukłość i wielokrotna monotoniczność.** Zgodnie z klasyczną definicją (patrz Williamson [**185**]), funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest nazywana $(n+1)$-*krotnie monotoniczną nierosnącą* ($n \geqslant 1$), gdy $(-1)^k f^{(k)}(x)$ jest nieujemna, nierosnąca i wypukła dla $x \in (a,b)$ i dla wszystkich $k = 0,1,\ldots,n-1$. Gdy $n = 1$, $f(x)$ jest zwykłą funkcją nieujemną i nierosnącą. Zbiór wszystkich takich funkcji będziemy oznaczać jako $\mathcal{M}_{(n+1)-}((a,b))$. Każda $f \in \mathcal{M}_{(n+1)-}((a,b))$ jest dana wzorem

$$f(x) = \int_a^b \frac{[-(x-u)]_+^n}{n!} d\beta(u), \tag{16}$$

dla $x \in (a,b)$, gdzie $\beta(u)$ jest funkcją niemalejącą (patrz Williamson [**185**]).

Funkcja $f$ jest nazywana $(n+1)$-*krotnie monotoniczną niemalejącą* (w skrócie $(n+1)$-*krotnie monotoniczną*) $(n \geqslant 1)$, gdy $f^{(k)}(x)$ jest nieujemna, niemalejąca i wypukła dla $x \in (a,b)$ i dla wszystkich $k = 0,1,2,\dots,n-1$. Gdy $n=1$, $f(x)$ jest zwykłą nieujemną funkcją niemalejącą. Zbiór wszystkich takich funkcji będziemy oznaczać jako $\mathcal{M}_{(n+1)+}((a,b))$. Każda $f \in \mathcal{M}_{(n+1)+}((a,b))$ ma reprezentację

$$f(x) = \int_a^b \frac{(x-u)_+^n}{n!} d\beta(u), \tag{17}$$

dla $x \in (a,b)$, gdzie $\beta(u)$ jest funkcją niemalejącą. Gdy $f$ jest postaci (17), wtedy będziemy pisać $f = I_n(\beta)$, i powiemy, że $f$ jest generowana przez funkcję $\beta$.

Korzystając z reprezentacji (15), otrzymujemy, że $n$-wypukła funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ może być przedstawiona w postaci sumy dwóch $(n+1)$-krotnie monotonicznych funkcji oraz wielomianu stopnia co najwyżej $n$ ([**R1**], Theorem 3.2)

$$f(x) = M_1(x) + M_2(x) + Q(x),$$

dla $x \in (a,b)$, gdzie $(-1)^{n+1}M_1(x) \in \mathcal{M}_{(n+1)-}((a,\xi))$, $M_2(x) \in \mathcal{M}_{(n+1)+}((\xi,b))$, z $a \leqslant \xi \leqslant b$ oraz $Q(x) \in \Pi_n$.

Jednym z zastosowań powyższego twierdzenia jest uzyskanie twierdzenia o reprezentacji funkcji $n$-Wright-wypukłej ([**R1**], Theorem 3.6), które uzupełnia i uogólnia wyniki Maksy i Pálesa [**99**].

**Względna $n$-wypukłość.** Reprezentację dana wzorem (15) będę dalej stosować przy badaniu względnej $n$-wypukłości ([**R1**], Theorems 4.3-4.7 and 4.10-4.12), silnej $n$-wypukłości ([**R1**], Theorem 4.15, Corollary 4.16) oraz interpolacji funkcji przez funkcje $n$-wypukłe ([**R1**], Theorem 5.4). Wyniki te uzupełniają i uogólniają wyniki o silnej $n$-wypukłości podane przez Gera i Nikodema w [**40**] oraz wyniki Wąsowicza podane w pracy [**181**], o własnościach typu podparciowego dla funkcji $n$-wypukłych, między innymi.

Niech $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją $n$-wypukłą. Mówimy, że funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest $n$-*wypukła względem* $g$, jeśli $f-g$ jest $n$-wypukła, i oznaczamy to jako $f \succeq_n g$. Zauważmy, że jeżeli $f$ jest $n$-wypukła względem $g$, to obie funkcje $f-g$ oraz $g$ są $n$-wypukłe. Pisząc $f = g + (f-g)$, otrzymujemy, że $f$ koniecznie musi być $n$-wypukła.

Znanych jest wiele uogólnień wypukłości poprzez względną wypukłość. Względna $n$-wypukłość zdefiniowana wyżej jest uogólnieniem względnej wypukłości (dla $n=1$) badanej w pracy [**76**] Karlina i Studdena (patrz również [**24**], [**52**], [**125**], [**129**]).

Względna $n$-wypukłość indukuje częściowy porządek w rodzinie pewnych podzbiorów zbioru funkcji $n$-wypukłych ([**R1**], Theorem 4.5). Badam miarę $n$-wypukłości funkcji $n$-wypukłej $f$, korzystając z miar $n$-spektralnych występujących w reprezentacji funkcji $n$-wypukłej ([**R1**], str. 743). Podaję charakteryzację względnej $n$-wypukłości w terminach miary $n$-wypukłości, jak również w języku pochodnych dystrybucyjnych $n$-tego rzędu, jak również w języku pochodnych Radona-Nikodyma ([**R1**], Theorem 4.7). Wykorzystując rozkład Lebesgue'a miary $n$-spektralnej odpowiadającej funkcji $n$-wypukłej $f$, rozważam odpowiadający mu rozkład funkcji $f$ ([**R1**], Remark 4.8). Rozkład ten jest zastosowany do otrzymania pewnych użytecznych własności względnej $n$-wypukłości ([**R1**], Theorems 4.10 – 4.12).

**Silna $n$-wypukłość.** Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest nazywana *silnie wypukłą z modułem* $c > 0$, gdy

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2,$$

dla wszystkich $x, y \in (a,b)$ i $t \in [0,1]$. Silnie wypukłe funkcje były wprowadzone przez Polyaka w [**135**]. Pewne ich własności można znaleźć , między innymi, w [**141**], [**54**], [**134**]. Silną wypukłość można scharakteryzować w języku wypukłości. Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest silnie wypukła z modułem $c > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f(x) - cx^2$ jest wypukła. Funkcja silnie wypukła dwukrotnie różniczkowalna może być scharakteryzowana w języku drugiej pochodnej $f''(x)$, jako funkcja dla której $f''(x) \geqslant 2c$ $(x \in (a,b))$.

Jako uogólnienie silnej wypukłości z modułem $c$, w pracy [**R1**], definiuję silną $n$-wypukłość z modułem $c$ ([**R1**], str. 745). Mówimy, że funkcja $f$ jest *silnie $n$-wypukła z modułem* $c$ $(n \geqslant 1$, $c > 0)$, gdy $f$ jest $n$-wypukła względem funkcji $g(x) = \frac{cx^{(n+1)}}{(n+1)!}$. Wtedy silna wypukłość z modułem $2c$ (patrz Roberts and Varberg [**141**]) pokrywa się z naszą silną 1-wypukłością z modułem $c$. Pisząc $f(x) = \left(f(x) - \frac{cx^{(n+1)}}{(n+1)!}\right) + \frac{cx^{(n+1)}}{(n+1)!}$, otrzymujemy, że $f$ jest silnie $n$-wypukła z modułem $c > 0$, to $f$ jest również $n$-wypukła. Zauważmy, że silna $n$-wypukłość była niezależnie zdefiniowana również przez R. Gera and K. Nikodema w [**40**] inaczej, mianowicie w języku ilorazów różnicowych, w ten sposób, że silna $n$-wypukłość z modułem $c$ pokrywa się z silną $n$-wypukłością z modułem $\frac{c}{(n+1)!}$ według naszej definicji podanej w pracy [**R1**]. W pracy [**R1**] podaję charakteryzację silnej $n$-wypukłości funkcji $f$ z modułem $c$ bez żadnych dodatkowych warunków dotyczących różniczkowalności funkcji $f$, i jako wniosek otrzymuję charakteryzację silnej $n$-wypukłości dla funkcji $(n+1)$-krotnie różniczkowalnych. Funkcja $n$-wypukła $f$ jest silnie $n$-wypukła z modułem $c$ ([**R1**], Theorem 4.15) wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{(n+1)}(x) \geqslant c$ dla $x \in (a,b)$ $\lambda$ p.w. ($\lambda$ oznacza miarę Lebesgue'a). Inaczej mówiąc, funkcja $f$ silnie $n$-wypukła jest to funkcja postaci $f(x) = f_{cont}(x) + R(x) \quad (x \in (a,b))$, gdzie funkcja $f_{cont}\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna i silnie $n$-wypukła z modułem $c$, a funkcja $R\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest $n$-wypukła i taka że $R^{(n+1)}(x) = 0$ dla $x \in (a,b)$ $\lambda$ p.w. ([**R1**], Corollary 4.16). Jako wniosek, otrzymuję charakteryzację funkcji $f$, które są silnie $n$-wypukłe z modułem $c$ oraz $(n+1)$-krotnie różniczkowalne ([**R1**], Corollary 4.17) jako funkcji dla których $f^{(n+1)}(x) \geqslant c \quad (x \in (a,b))$. Tę charakteryzację funkcji, które są silnie $n$-wypukłe i $(n+1)$-krotnie różniczkowalne można znaleźć również w pracy [**40**].

**Własności typu podparciowego dla funkcji $n$-wypukłych.** Wiadomo, że funkcji wypukłej $f\colon I \to \mathbb{R}$, w każdym punkcie wewnętrznym $I$ odpowiada podparcie afiniczne (tzn. dla każdego $x_0 \in Int I$ istnieje funkcja afiniczna $a\colon I \to \mathbb{R}$ taka, że $a(x_0) = f(x_0)$ i $a \leqslant f$ on $I$). Funkcje wypukłe wyższych rzędów (dokładniej nieparzystych rzędów) mają podobną własność; są one podpierane przez wielomiany rzędu nie wyższego niż rząd wypukłości (patrz Kuczma [**79**], Popoviciu [**136**], Roberts and Varberg [**141**]). W pracy [**181**] Wąsowicz wprowadził podparcia wielomianowe typu $(l_1, \ldots, l_k)$, i udowodnił, że $n$-wypukłe funkcje są podpierane przez wielomiany, które są podparciami typu $(l_1, \ldots, l_k)$, w punktach $x_1, \ldots, x_k \in I$, gdzie $l_1 + \ldots l_k = n+1$, $k \leqslant n$. Liczby $l_1, \ldots, l_k$ mogą być interpretowane jako krotności punktów $x_1, \ldots, x_k$, odpowiednio. W pracy [**R1**] wykorzystuję powyższe wyniki Wąsowicza [**181**], otrzymując ogólniejszy wynik, że dla każdych dwóch funkcji $n$-wypukłych $f$ i $g$, takich, że $f$ jest $n$-wypukła względem $g$, funkcja $g$ jest podparciem typu $(l_1, \ldots, l_k)$ dla funkcji $f$, z dokładnością do pewnego wielomianu $p \in \Pi_n$ ([**R1**], Theorem 5.4).

## 5. Randomizacja funkcji $n$-Wright-wypukłych

**Klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$.** Oznaczmy, dla $n = 1, 2, \ldots$

$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{n+}((-\infty, \infty)) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f$ jest $n$-krotnie monotoniczna (niemalejąca) $\}$.

Niech $\mathcal{M}_0 = \{f' : f \in \mathcal{M}_1\}$, gdzie $f'$ oznacza tutaj pochodna dystrybucyjną. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest *całkowicie monotoniczna* (niemalejąca), gdy $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Niech $\mathcal{M}_\infty$ będzie klasą wszystkich funkcji całkowicie monotonicznych. Każda $f \in \mathcal{M}_\infty$ ma reprezentację ([**179**])

$$f(x) = \int_0^\infty e^{xu} d\beta(u),$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, gdzie $\beta(u)$ jest niemalejąca.

Niech $Q \in \{\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots\}$. Niech $f \in Q$ i niech $\Theta$ będzie zmienną losową skoncentrowaną na $[0, \infty)$ $(\mu_\Theta \neq \delta_0)$. Niech $n \geqslant 1$. Niech $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ będą niezależnymi kopiami zmiennej losowej $\Theta$. Na podstawie (8) i (11) funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest $(p-1)$-Wright-wypukła $(p \geqslant 2)$, gdy

$$\nabla_{h_1 \ldots h_p} f(x) \geqslant 0, \tag{18}$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i $h_1, \ldots, h_p > 0$. Będziemy rozważać pewne uogólnienie funkcji spełniającej (18). Zamieniamy w (18) $h_1, \ldots, h_p$ przez zmienne losowe $\Theta_1, \ldots, \Theta_p$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$, a następnie bierzemy wartość oczekiwaną. Mówimy, że *$f \in Q$ jest $n$- krotnie $\Theta$-Wright-wypukła względem $Q$* [**R3**], gdy

$$E\nabla_{\Theta_1 \ldots \Theta_p} f(x) \in Q,\ p = 1, 2, \ldots, n.$$

Niech $\mathcal{W}_n = \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ będzie zbiorem wszystkich funkcji $f \in Q$ takich, że $f$ jest $n$-krotnie $\Theta$-Wright-wypukła względem $Q$. Definiujemy $\mathcal{W}_0(\Theta, Q) = Q$, $\mathcal{W}(\Theta, Q) = \mathcal{W}_1(\Theta, Q)$.

Rozważmy przypadek, gdy $Q = \mathcal{M}_0$. Mamy wtedy

$$f \in \mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_0) \iff E\nabla_{\Theta_1 \ldots \Theta_k} f(x) \geqslant 0,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Inaczej mówiąc, $f$ może być uważana za zrandomizowaną wersję funkcji $(n-1)$-krotnie-Wright-wypukłej.

**Klasy $\mathcal{W}_1(\Theta, \mathcal{M}_1)$. Miary $\Theta$-nadniezmiennicze.** Rozważmy teraz przypadek, gdy $Q = \mathcal{M}_1$ i $n = 1$. Jeżeli $f \in \mathcal{M}_1$, to $f$ jest dystrybuantą miary $\nu$, takiej, że $\nu((-\infty, x)) = f_\nu(x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Stad, możemy utożsamiać klasę funkcji $\mathcal{W}_1(\Theta, \mathcal{M}_1)$ z klasą $M(\Theta)$ składająca się z miar $\nu$ spełniających nierówność

$$E\nabla_\Theta \nu \geqslant 0, \tag{19}$$

gdzie $E\nabla_\Theta \nu(B) = \nu(B) - E\nu(B - \Theta)$, gdy $\nu(B) < \infty$ $(B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Miarę $\nu$ spełniającą nierówność (19) będziemy nazywać miarą $\Theta$-*nadniezmienniczą*. Zauważmy, że nierówność ta może być przepisana w postaci

$$\nu(B) \geqslant E\nu(B - \Theta) \quad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

W pracy [**R2**] stosujemy twierdzenie Choqueta theorem o reprezentacji punktów zwartego zbioru jako barycentrum zbioru punktów ekstremalnych ([**130**], p.17), w celu otrzymania reprezentacji całkowej miar $\nu$ spełniających powyższą nierówność ([**R2**], Theorem 4.3). Podajemy również reprezentację całkową tych miar w szczególnych przypadkach zmiennych losowych $\Theta$ ([**R2**], Theorem 4.4). Miarę probabilistyczną skoncentrowaną w punkcie $x$ $(x \in \mathbb{R})$ będziemy oznaczać jako $\delta_x$. Zauważmy, że gdy $\nu_\Theta = \delta_h$ dla pewnego $h > 0$, to $\nu$ jest $\Theta$ nadniezmiennicza, gdy

$$\Delta_h \nu \geqslant 0. \tag{20}$$

Stąd miary $\Theta$-nadniezmiennicze mogą być uważane jako zrandomizowane wersje miar spełniających (20) (albo jako losowo nadniezmiennicze względem $\Theta$). W pracy [**R2**] dowodzę, że istnieje miara $\nu$ oraz zmienna losowa $\Theta$, takie, że $\nu$ jest $\Theta$-nadniezmiennicza, jakkolwiek, nie istnieje $h > 0$ dla którego zależność (20) byłaby spełniona (patrz [**R2**], Remark 4.5). W pracy [**P11**] można znaleźć charakteryzację miar spełniających (20), dla wszystkich $h \in H$, gdzie $H \subset [0, \infty)$. Niech $\mathcal{L}(X)$ oznacza rozkład probabilistyczny zmiennej losowej $X$. Miary spełniające nierówność typu (20) pojawiają się w rachunku prawdopodobieństwa przy badaniu tak zwanych klas $L_c$ (with $c = \exp(-h)$, patrz [**90**]) składających się z rozkładów zmiennych losowych $Y$, dla których spełnione jest równanie $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(cY + X)$, z pewną zmienną losową $X$ taką, że $Y$ i $X$ are są niezależnymi zmiennymi losowymi. Wtedy miary spektralne Lévy'ego odpowiadające mierze nieskończenie podzielnej z klasy $L_c$ (w reprezentacji Lévy-Khinthine'a) spełniają multiplikatywną wersję nierówności (20). Z kolei, $\Theta$-nadniezmiennicze miary pojawiają się w rachunku prawdopodobieństwa przy badaniu tzw. perpetuit [**178**], spełniających stochastyczne równanie $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(\xi Y + X)$, gdzie $Y$, $\xi$ i $X$ są niezależnymi zmiennymi losowymi (z $\xi = \exp(-\Theta)$).

**Zrandomizowane operatory różnicowe i przesunięcia.** Niech $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją i niech $h > 0$. Przypomnijmy definicję operatora przesunięcia i różnicowego (wstecznego) $\tau_h$ i $\nabla_h$ zdefiniowanych następująco

$$\tau_h f(x) = f(x - h), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

$$\nabla_h f(x) = f(x) - f(x - h), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{22}$$

odpowiednio. Zamieniając w (21) i (22) liczbę rzeczywistą $h$ przez zmienną losowa $\Theta$ i biorąc wartości oczekiwane, definiujemy zrandomizowane operatory przesunięcia i różnicowego $U$ and $\Phi$ jako

$$Uf(x) = U_\Theta f(x) = E\tau_\Theta f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

$$\Phi f(x) = \Phi_\Theta f(x) = E\nabla_\Theta f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{24}$$

odpowiednio. Iterując (23) i(24) definiujemy $U^n$ i $\Phi^n$ dla $n = 1, 2, \ldots$, następująco

$$U^n f(x) = U^n_\Theta f(x) = U_{\Theta_n \ldots \Theta_1} f(x) = U_{\Theta_n}(U_{\Theta_{n-1} \ldots \Theta_1} f(x)), \tag{25}$$

$$\Phi^n f(x) = \Phi^n_\Theta F(x) = \Phi_{\Theta_n \ldots \Theta_1} f(x) = \Phi_{\Theta_n}(\Phi_{\Theta_{n-1} \ldots \Theta_1} f(x)), \tag{26}$$

gdzie $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ są niezależnymi kopiami zmiennej losowej $\Theta$. Dla $n = 0$ definiujemy $U^0 f(x) = f(x)$ i $\Phi^0 f(x) \equiv 0$.

**Generatory funkcji z klas $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$.** Niech $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ będą niezależnymi kopiami $\Theta$ i niech $G \in Q$. Definiuję operator $J(G)$ następująco

$$J(G) = J_\Theta(G) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{\Theta_n \ldots \Theta_1} G = \sum_{n=0}^{\infty} U^n G. \tag{27}$$

Iterując (27), definiuję $J^n$ ( $n = 1, 2, \ldots$)

$$J^n(G) = J(J^{n-1}(G)), \tag{28}$$

przyjmując umowę, że $J^0(G) = G$. Wtedy $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ ( [**R3**])Lemma 2.7, Theorem 2.8) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f = J^n(G_n), \tag{29}$$

gdzie $G_n \in Q$. Funkcja $G_n$ opisana wyżej jest jedyna, ponadto mamy, że

$$G_n = \Phi^n f. \tag{30}$$

Inaczej mówiąc, używając operatora $J^n$, przy pomocy wzoru (28), można otrzymywać funkcje z klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$. Ponadto, dla danej $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$, na podstawie wzoru (30), używając operatora $\Phi^n$, dostaje się funkcję $G_n$ która jest funkcją generującą. Stąd, możemy powiedzieć, że $f$ jest generowana przy pomocy funkcji $G_n$ i będziemy nazywać $G_n$ *generatorem* funkcji $f$. Operatory $J^n$ and $\Phi^n$ są operatorami wzajemnie odwrotnymi. Wzory (28) i (30) są użyteczne przy otrzymywaniu reprezentacji całkowych funkcji należących do klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ ([**R3**], Lemma 2.12).

**Przypadek wykładniczy, $\Theta \sim$ Exp(1).**
Podaję reprezentację całkową funkcji z klas $\mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1), \mathcal{M}_j)$ ($n = 1, 2, \ldots$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.) (see [**R3**], Theorem 3.3, Theorem 5.2, Remark 5.4). Dowodzę, że jeżeli $f \in \mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1), \mathcal{M}_1)$, to $U^n_{\mathrm{Exp}(1)} f \in \mathcal{M}_{n+1}$ ([**R3**], Theorem 3.6). Podaję również inny sposób generowania funkcji z klas $\mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1), \mathcal{M}_1)$. Pokazuję, że funkcja $f \in \mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1), \mathcal{M}_1)$ może być przedstawiona jako pewna suma generowana przez funkcję z klasy $\mathcal{M}_{n+1}$ ([**R3**], Theorem 3.9). Badam również klasę $\mathcal{W}_\infty(\Theta, Q)$ funkcji *całkowicie* $\Theta$-*Wright-wypukłych*, zdefiniowaną następująco

$$\mathcal{W}_\infty(\Theta, Q) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n(\Theta, Q).$$

Dowodzę, że

$$\mathcal{W}_\infty(\mathrm{Exp}(1), \mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_\infty$$

(patrz [**R3**], Theorem 4.1). Jest to bardzo ciekawy wynik, którego pokazanie nie było proste. Trzeba było wykonać wiele przekształceń tak, żeby otrzymać pewien ciąg dążący w granicy do funkcji wykładniczej. Dowód wymagał użycia metod i twierdzeń z teorii miary (np. twierdzenie Helly'ego o wyborze).

**Przypadek dyskretny, $\Theta = X_p$.**
Rozważam zmienną losową $\Theta = X_p$ taką, że

$$\mu_{X_p} = q\delta_0 + p\delta_1 \quad (0 < p < 1,\ q = 1 - p).$$

Otrzymuję reprezentację całkową funkcji z klasy $\mathcal{W}_n(X_p, \mathcal{M}_j)$ ($n = 1, 2, \ldots$, $j = 0, 1$) oraz z klasy $\mathcal{W}_\infty(X_p, \mathcal{M}_j)$ ($n = 1, 2, \ldots$, $j = 0, 1$) (patrz [**R3**], Theorem 7.1, Theorem 7.4). W szczególności dowodzę, że

$$\mathcal{M}_\infty \subsetneq \mathcal{W}_\infty(X_p, \mathcal{M}_1).$$

Jak widzimy, w tym przypadku nie ma równości.

**Wersja multiplikatywna.** Badam również przypadek multiplikatywnej wersji funkcji wielokrotnej Wright-wypukłej, otrzymując reprezentacje całkowe (patrz [**R3**], Theorem 6.2, Theorem 6.3).

**Problemy otwarte.** W [**R3**] (Section 8, Remarks 8.1–8.10) podaję wiele otwartych problemów dotyczących zrandomizowanych funkcji wielokrotnie Wright-wypukłych. W szczególności mogłoby być interesujące, czy zachodzi równość $\mathcal{W}_\infty(X, \mathcal{M}_j) = \mathcal{M}_\infty$, w przypadku, gdy zmienna losowa $X$ ma rozkład dyskretny, ale nie arytmetyczny, np. $P(X = 1) = p$ and $P(X = \sqrt{2}) = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

ROZDZIAŁ 2

# $(k,h)$–wypukłe funkcje

## 1. $h$-wypukłe funkcje

Przypomnijmy definicję $h$-wypukłych funkcji wprowadzoną przez Varošanec [**177**].

Definicja 1. Niech $I$ będzie przedziałem rzeczywistym i niech $h:(0,1)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją nieujemną, $h\neq 0$. Nieujemna funkcja $f:I\to\mathbb{R}$ jest nazywana $h$-wypukłą, jeśli dla wszystkich $x,y\in I$ i $t\in(0,1)$, mamy

$$f\big(tx+(1-t)y\big)\le h(t)f(x)+h(1-t)f(y). \tag{31}$$

Jest oczywiste, że to pojęcie uogólnia pojęcie zwykłej wypukłości (dla $h(t)=t$, patrz np. [**79, 141**]), $s$-Breckner-wypukłości (dla $h(t)=t^s$ z pewnym $s\in(0,1)$, patrz [**20, 56**]), P-funkcji (dla $h(t)=1$, patrz [**128**]) i Godunova-Levin funkcji (dla $h(t)=t^{-1}$, patrz [**44**]).

W ich ostatniej pracy [**18**], Bombardelli and Varošanec otrzymali następujące nierówności typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra dla $h$-wypukłych funkcji (istnienie całek jest zakładane we wszystkich wzorach).

Stwierdzenie 2. ( [**18**] ) *Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie $h$-wypukła i niech $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g\ge 0$ będzie symetryczna względem punktu $\frac{a+b}{2}$. Wtedy*

$$\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(t)g(t)\,dt\le[f(a)+f(b)]\cdot\int_0^1 h(t)\cdot g\big(ta+(1-t)b\big)\,dt. \tag{32}$$

Stwierdzenie 3. ( [**18**] ) *Niech $h$ będzie zdefiniowaną na $[0,\max\{1,b-a\}]$ i niech $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ funkcją $h$-wypukłą. Ponadto, zakładamy, że $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g\ge 0$ jest symetryczna względem punktu $\frac{a+b}{2}$ i $\int_a^b g(t)\,dt>0$. Wtedy*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le C\int_a^b f(t)g(t)\,dt, \tag{33}$$

*gdzie* $C=\dfrac{2h\left(\frac12\right)}{\int_a^b g(t)\,dt}$.

W [**149**] Sarikaya, Set i Özdemir udowodnili inna wersję nierówności Fejéra dla $h$-wypukłych funkcji.

Stwierdzenie 4. ( [**149**] ) *Niech $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie $h$-wypukła i całkowalna, $h\left(\frac12\right)>0$, i zakładamy, że $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest nieujemna, całkowalna i symetryczna względem $\frac{a+b}{2}$. Wtedy*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h\left(\frac12\right)}\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\int_a^b g(x)\,dx&\le\int_a^b f(x)g(x)\,dx\\ &\le\frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot[h(t)+h(1-t)]\cdot\int_a^b g(x)\,dx,\end{aligned} \tag{34}$$

*dla wszystkich $t\in(0,1)$.*

W pracy [**98**], Maksa and Palés podali jeszcze ogólniejszą wersję rodzaju wypukłości, dokładniej $(\alpha,\beta,a,b)$-wypukłych funkcji zdefiniowanych jako rozwiązania $f$ spełniające nierówność funkcyjną

$$f\big(\alpha(t)x+\beta(t)y\big)\le a(t)f(x)+b(t)f(y), \tag{35}$$

gdzie $\emptyset\neq T\subset[0,1]$ i $\alpha,\beta,a,b:T\to\mathbb{R}$ są danymi funkcjami.

W [**R4**] definiujemy i badamy własności $(k,h)$-wypukłych funkcji na $k$-wypukłej dziedzinie ([**R4**], Definitions 2.1 and 2.4). Odwzorowanie takie spełniają nierówność (35) z $T=(0,1)$

i $\alpha(t) = k(t)$, $\beta(t) = k(1-t)$, $a(t) = h(t)$, $b(t) = h(1-t)$. W szczególności, mamy że $(k,h)$-wypukłość jest uogólnieniem $s$-Orlicz-wypukłości (patrz [**30, 56**]), podaddytywności (patrz np. [**101, 145**]) i $h$-wypukłości.

Ponadto, dowodzimy dwie nierówności typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra dla $(k,h)$-wypukłych funkcji ([**R4**], Theorems 3.1 and 3.5), i stosujemy je do wielu ciekawych klas odwzorowań.

## 2. $k$-wypukłe zbiory

Definiujemy klasy $k$-wypukłych zbiorów i $(k,h)$-wypukłych funkcji i omawiamy ich własności.

DEFINICJA 5. ([**R4**], **Def. 2.1**) Niech $k : (0,1) \to \mathbb{R}$ będzie daną funkcją. Wtedy podzbiór $D$ przestrzeni rzeczywistej $X$ będziemy nazywać $k$-wypukłym, gdy $k(t)x + k(1-t)y \in D$ dla wszystkich $x, y \in D$ i $t \in (0,1)$.

Możemy zauważyć, że na podstawie definicji podanej wyżej, biorąc odpowiednio dobraną funkcję $k$, możemy otrzymać rodziny wielu znanych zbiorów.

PRZYKŁAD 6. ([**R4**], **Ex. 2.2.1**)

1. Nasza definicja pokrywa się z definicją zwykłej wypukłości dla $k(t) = t$.

2. Jeżeli $k(t) = t^{\frac{1}{p}}$ z $p \in (0,1)$, to $D$ jest $k$-wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy jest $p$-wypukły (patrz np. [**143**]).

3. Dla $s > 0$ i $k(t) = t^{\frac{1}{s}}$, rodzina $k$-wypukłych zbiorów pokrywa się z rodziną $s$-Orlicz-wypukłych zbiorów zdefiniowanych przez Dragomira i Fitzpatricka w [**30**].

4. Gdy $k(t) = 1$ dla wszystkich $t$, to $D$ jest $k$-wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy $(D,+)$ jest półgrupą.

5. Dla $k(t) = \frac{1}{2}$, nasza definicja generuje rodzinę podwypukłych podzbiorów $X$.

6. Niech $k$ będzie zdefiniowana wzorem

$$k(t) = \begin{cases} 2t & \text{dla } t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{for } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{36}$$

Wtedy $D$ jest $k$-wypukłym zbiorem wtedy i tylko wtedy, gdy jest gwiaździsty względem 0, tzn. $tx \in D$ dla wszystkich $t \in [0,1]$ i $x \in D$.

Dalej, podamy pewne podstawowe fakty o $k$-wypukłych podzbiorach przestrzeni liniowej.

UWAGA 7. ([**R4**], **Rem. 2.3**)

1. Każda liniowa podprzestrzeń $Y$ przestrzeni $X$ jest $k$-wypukłym podzbiorem $X$. Jednak afiniczna podprzestrzeń może nie być $k$-wypukłym zbiorem.

2. Jeżeli $k(t) \geq 0$ dla wszystkich $t$, to każdy punktowo wypukły stożek $K \subset X$, tzn. zbiór, który jest zamknięty ze względu na liniowe kombinacje z nieujemnymi współczynnikami jest $k$-wypukły.

3. Dla każdej pary $k$-wypukłych zbiorów $C, D \subset X$ i dla każdej $\alpha \in \mathbb{R}$, zbiory $C + D$ i $\alpha D$ są również $k$-wypukłe.

4. Jeżeli $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest rodziną $k$-wypukłych zbiorów, to ich przekrój $\bigcap\limits_{\alpha \in A} D_\alpha$ jest również $k$-wypukły.

5. Jeżeli wszystkie zbiory $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \ldots$ są $k$-to ich suma $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} D_\alpha$ jest też $k$-wypukła.

6. Załóżmy, że $X$ jest metryczną liniową przestrzenią oraz $D \subset X$ jest $k$-wypukłym zbiorem. Wtedy ich domknięcie $clD$ jest też $k$-wypukłym zbiorem.

## 3. $(k,h)$-wypukłe funkcje

Jesteśmy gotowi do podania definicji $(k,h)$-wypukłości, której pomysł jest również jednym z głównych wyników tej rozprawy.

DEFINICJA 8. ([**R4**], **Def. 2.4**) Niech $k, h : (0,1) \to \mathbb{R}$ będą dwiema funkcjami i załóżmy, że $D \subset X$ jest $k$-wypukłym zbiorem. Wtedy funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest $(k,h)$-wypukła, gdy dla wszystkich $x, y \in D$ i $t \in (0,1)$,

$$f\big(k(t)x + k(1-t)y\big) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y). \tag{37}$$

Jeżeli w (37) nierówność zastąpimy odpowiednio równością, $f$ będziemy nazywać $(k,h)$-afiniczną (ogólniejsze funkcje tego typu są badane w **[98]**).

I znów, powyższa definicja stanowi uogólnienie wielu wcześniej znanych uogólnień funkcji wypukłych, które przedstawiamy niżej.

Przykład 9. (**[R4], Ex. 2.5**)
1. Dla $k(t)=t$, pojęcie $(k,h)$-wypukłości pokrywa się z pojęciem $h$-wypukłości danym przez (5) (bez dodatkowego założenia nieujemności).

W szczególności dla odpowiednio dobranych funkcji $h$, warunek (6) generuje rodziny funkcji wypukłych, $s$-Breckner-wypukłych funkcji, $P$-funkcji i Godunova-Levin funkcji.

2. Jeżeli $s>0$, $k(t)=t^{\frac{1}{s}}$ i $h(t)=t$, to $f$ is $(k,h)$-wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy jest $s$-Orlicz-wypukła.

3. Dla $k(t)=h(t)=1$, klasa $(k,h)$-wypukłych funkcji składa się ze wszystkich podaddytywnych funkcji.

4. Jeżeli $k(t)=h(t)=\frac{1}{2}$ dla wszystkich $t$, to warunek(37) odpowiada rodzinie Jensen-wypukłych funkcji.

5. Niech $k$ będzie dana poprzez (36). Wtedy $f$ jest $(k,k)$-wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona gwiaździsta, tzn. $f(tx)\le tf(x)$ dla wszystkich $t\in[0,1]$ i $x\in D$.

Żeby przekonać się o tym, ustalmy $x,y\in D$ i wybierzmy $t\in(0,1)$. Wtedy, zakładając, że $f$ jest $(k,k)$-wypukła otrzymujemy

$$f(tx)=f\big(k(\frac{t}{2})x+k(1-t/2)x\big)\le k(\frac{t}{2})f(x)+k(1-\frac{t}{2})f(x)=tf(x)$$

i

$$f(0)=f\big(k(\frac{1}{2})x+k(\frac{1}{2})x\big)\le k(\frac{1}{2})f(x)+k(\frac{1}{2})f(x)=0.$$

Z drugiej strony, jeśli $f$ jest gwiaździsta, otrzymujemy

$$f\big(k(t)x+k(1-t)y\big)=\begin{cases} f(2t\cdot x)\le 2t\cdot f(x) & \text{dla } t\in(0,\frac{1}{2}),\\ f(0)\le 0 & \text{dla } t=\frac{1}{2},\\ f\big((2-2t)\cdot y\big)\le(2-2t)\cdot f(y) & \text{dla } t\in(\frac{1}{2},1),\end{cases}$$

zatem warunek (37) zachodzi dla wszystkich $t$, biorąc $h=k$.

Wiele znanych własności dotyczących funkcji wypukłych jest również spełnionych dla funkcji $(k,h)$-wypukłych. W szczególności, mamy

Wniosek 10. (**[R4], Rem. 2.6**)
1. Jeżeli $f,g:D\to\mathbb{R}$ są $(k,h)$-wypukłymi funkcjami i $c\ge 0$, wtedy $f+g$, $cf$ są również funkcjami $(k,h)$-wypukłymi.

2. Załóżmy, że $h\ge 0$ i niech $\{f_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną $(k,h)$-wypukłych funkcji zdefiniowanych na $D$. Wtedy, nietrudno jest sprawdzić, że $f=\sup_{i\in I} f_i$ również spełnia (6) dla wszystkich $x,y$ i $t$.

3. Niech $f$ będzie $(k,h)$-wypukłą funkcją z $h(t)=t$, i zdefiniujmy zbiór podpoziomicowy $f^c=\{x\in D: f(x)\le c\}$. Wtedy zbiór $f^c$ jest $k$-wypukłym zbiorem dla każdego $c\in\mathbb{R}$.

Faktycznie, dla $x,y\in f^c$ i $t\in(0,1)$ otrzymujemy

$$f\big(k(t)x+k(1-t)y\big)\le t\cdot f(x)+(1-t)\cdot f(y)\le tc+(1-t)c=c.$$

4. Jeżeli $f$ jest $(k,k)$-wypukłą funkcją z $k\ge 0$, to wykres funkcji $f$, tzn. zbiór $\operatorname{epi} f=\big\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}: x\in D,\, y\ge f(x)\big\}$, jest $k$-wypukły.

Wynika to z nierówności

$$f\big(k(t)x_1+k(1-t)x_2\big)\le k(t)\cdot f(x_1)+k(1-t)\cdot f(x_2)\le k(t)y_1+k(1-t)y_2,$$

która zachodzi dla $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\operatorname{epi} f$ i $t\in(0,1)$.

5. Przypuśćmy, że wykres funkcji $f$ jest $k$-wypukły. Wtedy $f$ jest $(k,k)$-wypukłą funkcją.

Faktycznie, ponieważ $P_1=(x,f(x))$ i $P_2=(y,f(y))$ są elementami wykresu, mamy $k(t)\cdot P_1+k(1-t)\cdot P_2\in\operatorname{epi} f$, co daje

$$f\big(k(t)x+k(1-t)y\big)\le k(t)f(x)+k(1-t)f(y).$$

6. Jeżeli $D$ jest $k$-wypukłym podzbiorem $X$ i $f : D \to \mathbb{R}$ jest $(k, h)$-afiniczną funkcją, to łatwo jest sprawdzić, że zbiór $f(D)$ jest $h$-wypukły w $\mathbb{R}$.

7. Załóżmy, że $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ jest $(k, h)$-wypukły, $f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$ jest $(h, h)$-wypukła niemalejąca, i $f_1(D_1) \subset D_2$. Wtedy $f = f_2 \circ f_1$ jest $(k, h)$-wypukłą funkcją.

Również możemy zauważyć, że każda nieujemna $(k, h_1)$-wypukła funkcja jest również $(k, h_2)$-wypukła dla wszystkich $h_2 \geq h_1$.

## 4. Nierówności typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra dla $(k, h)$-wypukłych funkcji

W [**R4**] dowodzimy nowych nierówności typu Hermite'a-Hadamarda i Fejéra dla $(k, h)$-wypukłych funkcji. Poniższe nierówności stanowią jeden z głównych wyników rozprawy.

Od teraz, zakładamy, że $D$ jest $k$-wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}$ i że wszystkie rozważane poniżej całki istnieją.

**Pierwsza nierówność typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra.**

Twierdzenie 11. ([**R4**], **Th. 3.1, Pierwsza nierówność typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra dla** $(k, h)$**-wypukłych funkcji**) *Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie $(k, h)$-wypukłą funkcją z $h(1/2) > 0$, ustalamy $a < b$ takie, że $[a, b] \subset D$ i niech $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie nieujemną funkcją symetryczną względem $(a + b)/2$. Wtedy*

$$\frac{f\big(k(1/2)\cdot(a+b)\big)}{2\cdot h(1/2)} \cdot \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{38}$$

**Pierwsza nierówność typu Hermite'a-Hadamarda.** Jeżeli założymy, że $g(t) = 1$ dla wszystkich $t \in (0, 1)$, z (38) otrzymujemy pierwszą nierówność typu Hermite'a-Hadamarda dla $(k, h)$-wypukłych funkcji.

Wniosek 12. ([**R4**], **Cor. 3.2**) *Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie $(k, h)$-wypukłą funkcją z $h(1/2) > 0$ i ustalmy $a < b$ takie że $[a, b] \subset D$. Wtedy*

$$\frac{f\big(k(1/2)\cdot(a+b)\big)}{2\cdot h(1/2)} \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx. \tag{39}$$

**Pierwsza nierówność typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra – przypadek szczególny.** Rozważając (38) z $k(t) = t^{1/s}$ i $h(t) = t$, otrzymujemy

Wniosek 13. ([**R4**], **Cor. 3.3**) *Przypuśćmy, że $f : D \to \mathbb{R}$ jest $s$-Orlicz-wypukłą funkcją oraz $a, b, g$ spełniają założenia Twierdzenia 11. Wtedy*

$$f\left(\frac{a+b}{2^{1/s}}\right) \cdot \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{40}$$

Uwaga 14. ([**R4**], **Rem. 3.4**)

1. Jeżeli zastosujemy (38) do $h$-wypukłej funkcji $f$, otrzymamy (33), która jest również lewą stroną (34).

2. Warunek (40) dla $g = 1$ daje nierówność

$$f\left(\frac{a+b}{2^{1/s}}\right) \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx,$$

która była również udowodniona w [**31**].

3. Z Twierdzenia 11, dla każdej podaddytywnej funkcji $f$, zachodzi następująca nierówność typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra:

$$\frac{f(a+b)}{2} \cdot \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

W szczególności, dla $g = 1$ otrzymujemy nierowność typu Hermite'a-Hadamarda

$$\frac{f(a+b)}{2} \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

4. Dla Jensen-wypukłej funkcji, na podstawie (38) i (39), otrzymujemy lewą stronę klasycznych nierówności (3) i (2), odpowiednio.

**Druga nierówność typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra.**

TWIERDZENIE 15. ([**R4**], **Th. 3.5, Druga nierówność typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra dla** $(k,h)$**-wypukłych funkcji**) *Zakładamy, że* $f : D \to \mathbb{R}$ *jest* $(k,h)$*-wypukłą funkcją z* $h(1/2) > 0$, $a, b \in D$, $a < b$ *i* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest nieujemną funkcją symetryczną względem* $(a+b)/2$. *Wtedy*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h(1/2)} \cdot \int_0^1 & f\big(k(1/2)\cdot[k(t)+k(1-t)]\cdot(a+b)\big)\cdot g\big(ta+(1-t)b\big)\,dt \\ &\le \int_0^1 f\big(k(t)a+k(1-t)b\big)\cdot g\big(ta+(1-t)b\big)\,dt \\ &\le [f(a)+f(b)]\cdot\int_0^1 h(t)\cdot g\big(ta+(1-t)b\big)\,dt. \end{aligned} \tag{41}$$

**Druga nierówność typu Hermite'a-Hadamarda.** Jako wniosek otrzymujemy drugą nierówność typu Hermite'a-Hadamarda dla $(k,h)$-wypukłych funkcji.

WNIOSEK 16. ([**R4**], **Cor. 3.6**) *Niech* $f : D \to \mathbb{R}$ *będzie* $(k,h)$*-wypukłą funkcją,* $h(1/2) > 0$ *i wybierzmy* $a, b \in D$ *takie, że* $a < b$. *Wtedy*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h(1/2)} \cdot \int_0^1 & f\big(k(1/2)\cdot[k(t)+k(1-t)]\cdot(a+b)\big)\,dt \\ &\le \int_0^1 f\big(k(t)a+k(1-t)b\big)\,dt \le [f(a)+f(b)]\cdot\int_0^1 h(t)\,dt. \end{aligned} \tag{42}$$

**Druga nierówność typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra – przypadki szczególne.** Podaliśmy również następująca wersję drugiej nierówności typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra $s$-Orlicz-wypukłych funkcji.

WNIOSEK 17. ([**R4**], **Cor. 3.7**) *Przypuśćmy, że* $f : D \to \mathbb{R}$ *jest* $s$*-Orlicz-wypukłą funkcją i że* $a, b, g$ *spełniają założenia Twierdzenia 15. Wtedy*

$$\begin{aligned}\int_0^1 & f\left(\frac{1}{2^{1/s}}\cdot\big[t^{1/s}+(1-t)^{1/s}\big]\cdot(a+b)\right)\cdot g\big(ta+(1-t)b\big)\,dt \\ &\le \int_0^1 f\big(t^{1/s}a+(1-t)^{1/s}b\big)\cdot g\big(ta+(1-t)b\big)\,dt \\ &\le [f(a)+f(b)]\cdot\int_0^1 t\cdot g\big(ta+(1-t)b\big)\,dt. \end{aligned} \tag{43}$$

UWAGA 18. ([**R4**], **Rem. 3.8**)

1. Stosując (41) do $h$-wypukłej funkcji $f$, otrzymujemy nierówności (32) i (33).
2. Jeżeli $f$ jest $s$-Orlicz-wypukłą funkcją i $g = 1$, to na podstawie nierówności (43) dostajemy

$$\begin{aligned}\int_0^1 & f\left(\frac{1}{2^{1/s}}\cdot\big[t^{1/s}+(1-t)^{1/s}\big]\cdot(a+b)\right)dt \\ &\le \int_0^1 f\big(t^{1/s}a+(1-t)^{1/s}b\big)\,dt \le \frac{f(a)+f(b)}{2}, \end{aligned}$$

która była również otrzymana w [**31**].

3. Jeżeli $f$ jest gwiaździsta i $a, b \neq 0$, prawa część (42) ma postać

$$\frac{1}{a}\cdot\int_0^a f(t)\,dt + \frac{1}{b}\cdot\int_0^b f(t)\,dt \le \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

która była również podana w [**32**, Theorem 196] z $m = 0$.

4. Dla funkcji wypukłych, na podstawie (42) i (41) otrzymujemy klasyczne nierówności (2) i (3), odpowiednio.

ROZDZIAŁ 3

# Funkcje $n$-Jensen-wypukłe oraz $n$-Wright-wypukłe

## 1. $n$-Wright-wypukłość implikuje $n$-Jensen-wypukłość

Przypomnijmy, że $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest $n$–Wright–wypukła, gdy

$$\Delta_{h_1\dots h_{n+1}} f(x) \geqslant 0 \tag{44}$$

dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$ i $h_1,\dots,h_{n+1}>0$. Oczywiście, biorąc wyżej $h_1=\cdots=h_{n+1}=h$, otrzymujemy $\Delta_h^{n+1}f(x)\geqslant 0$, co oznacza, że każda $n$–Wright wypukła funkcja jest $n$–Jensen wypukła.

## 2. Jensen-wypukłość implikuje Wright-wypukłość

Powstaje naturalne pytanie, czy odwrotna implikacja jest prawdziwa, tzn., czy $n$–Jensen–wypukłe funkcje są również $n$–Wright–wypukłe. Dla $n=1$ nie jest trudno dać negatywną odpowiedź. Mianowicie, funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dana wzorem $f(x)=|a(x)|$, gdzie $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest nieciągłą addytywną funkcją jest Jensen–wypukła i nie jest Wright–wypukła (patrz [**122**]). Rzeczywiście, ze znanego twierdzenia Ng'ego o reprezentacji (patrz. [**119**]) wiemy, że jeżeli funkcja jest Wright–wypukła, to jest ona sumą funkcji addytywnej i wypukłej. Gdyby $f$ była Wright-wypukła, to wtedy albo $f$ musiałaby być ciągła albo jej wykres byłby gęsty na całej płaszczyźnie (patrz np. [**79**]). Ale ani $f$ nie jest ciągła, ani wykres $f$ nie jest gęsty na całej płaszczyźnie. Stąd $f$ nie jest Wright-wypukła.

Funkcje Wright–wypukłe wyższych rzędów badane są w wielu pracach [**41, 42, 99**], ale w żadnej z nich nie był rozważany przedstawiony wyżej problem. W pracy [**R5**] podajemy negatywną odpowiedź dla $n$ naturalnych nieparzystych.

## 3. $n$-Jensen-wypukłość

Przypomnijmy, że dla $x\in\mathbb{R}$ mamy $x_+=\max\{x,0\}=\frac{x+|x|}{2}$ i $x_+^n=(x_+)^n$. Nietrudno pokazać następujący lemat.

Lemat 19. *Niech $n\in\mathbb{N}$, $c\geqslant 0$. Funkcja $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ given by $\varphi(x)=cx_+^n$ jest $n$–Jensen–wypukła.*

W pracy [**R5**] dowodzimy ogólniejsze twierdzenie, dla funkcji addytywnych.

Twierdzenie 20. ([**R5**], **Cor. 2.2**) *Jeżeli $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcja addytywna i $n$ jest naturalną liczbą nieparzystą, to $f(x)=a(x)_+^n$ jest $n$–Jensen–wypukła.*

## 4. Funkcja, która jest $n$-Jensen-wypukła i nie jest $n$-Wright-wypukła

W pracy [**R5**] wykorzystujemy funkcje addytywne skonstruowane w oparciu o bazę Hamela. Wiadomo, że funkcja addytywna $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest jednoznacznie wyznaczona przez jej wartości na bazie Hamela (patrz np [**79**]). W poniższym twierdzeniu podajemy przykład funkcji, która jest $n$-Jensen wypukła, ale nie jest $n$-Wright wypukła. Jest to jeden z głównych wyników rozprawy.

Twierdzenie 21. ([**R5**], **Th. 2.3**) *Niech $n$ będzie naturalną liczba naturalną i niech $H\subset\mathbb{R}$ będzie bazą Hamela, taką że $h_1,\dots,h_{n+1}\in H$ są dodatnie. Niech $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie addytywną funkcją, taką że*

$$a(h_1)=-1,\quad a(h_2)=\cdots=a(h_{n+1})=1.$$

*Wtedy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem*

$$f(x)=\big(a(x)\big)_+^n \tag{45}$$

*jest $n$–Jensen–wypukła i nie jest $n$–Wright–wypukła.*

$f$ **jest** $n$–**Jensen wypukła.** Z twierdzenia 20 funkcja $f$ jest $n$–Jensen wypukła.
$f$ **nie jest** $n$–**Wright–wypukła.** Żeby udowodnić, że $f$ nie jest $n$–Wright–wypukła, wystarczy sprawdzić, że $\Delta_{h_1 \dots h_{n+1}} f(0) = -1$ (patrz (11)). Jakkolwiek to zadanie nie jest trywialne. Wymaga to wprowadzenia nowych narzędzi i jest raczej długie.

## 5. Dwa przypadki szczególne

**Przypadek** $n = 3$**.** Jak już o tym wspomnieliśmy, dowód Twierdzenia 21 jest trudny. Żeby zilustrować zagadnienie, najpierw przedstawimy prostszy dowód w szczególnym przypadku $n = 3$.

Weźmy bazę Hamela $H$ taką, że $h_1, h_2, h_3, h_4 \in H$ są dodatnie. Niech $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie addytywną funkcją, taką że $a(h_1) = -1$, $a(h_2) = a(h_3) = a(h_4) = 1$. Niech $f(x) = \big(a(x)\big)^3_+$. Na podstawie Twierdzenia 20, funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest 3–Jensen–wypukła. Chcemy pokazać, że $f$ nie jest 3–Wright–wypukła. Żeby to udowodnić, wystarczy sprawdzić, że $\Delta_{h_1 h_2 h_3 h_4} f(0) = -1 < 0$, wtedy nierówność (44) nie zachodziłaby dla $n = 3$. Mamy

$$f(0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4) = \big(a(0) + a(h_1) + a(h_2) + a(h_3) + a(h_4)\big)^3_+ = 8\,.$$

Podobnie

$$\begin{aligned} f(0 + h_1 + h_2 + h_3) = f(0 + h_1 + h_2 + h_4) = f(0 + h_1 + h_3 + h_4) &= 1\,, \\ f(0 + h_2 + h_3 + h_4) &= 27\,, \\[1ex] f(0 + h_1 + h_2) = f(0 + h_1 + h_3) = f(0 + h_1 + h_4) &= 0\,, \\ f(0 + h_2 + h_3) = f(0 + h_2 + h_4) = f(0 + h_3 + h_4) &= 8\,, \\[1ex] f(0 + h_1) &= 0\,, \\ f(0 + h_2) = f(0 + h_3) = f(0 + h_4) &= 1\,, \\[2ex] f(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

Wtedy otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Delta^4_{h_1 h_2 h_3 h_4} f(x) = {} & f(0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \\ & - \big[f(0 + h_1 + h_2 + h_3) + f(0 + h_1 + h_2 + h_4) \\ & \quad + f(0 + h_1 + h_3 + h_4) + f(0 + h_2 + h_3 + h_4)\big] \\ & + \big[f(0 + h_1 + h_2) + f(0 + h_1 + h_3) + f(0 + h_1 + h_4) \\ & \quad + f(0 + h_2 + h_3) + f(0 + h_2 + h_4) + f(0 + h_3 + h_4)\big] \\ & - \big[f(0 + h_1) + f(0 + h_2) + f(0 + h_3) + f(0 + h_4)\big] \\ & + f(0) = 8 - 30 + 24 - 3 + 0 = -1\,. \end{aligned}$$

Podobny dowód powtórzyliśmy dla $n \in \{5, 7, 9, 11\}$, chociaż obliczenia były przeprowadzone przy pomocy komputera.

**Przypadek** $n = 2$**.** Przeprowadzimy teraz dyskusję przypadku $n = 2$, żeby przekonać się, że w przypadku $n$ parzystych nasz problem nie jest łatwy do rozwiązania. Dokładniej chcemy porównać klasę 2–Jensen–wypukłych funkcji z klasą 2–Wright–wypukłych funkcji.

Być może funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = |Q(x)|$, gdzie funkcja $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie funkcyjne kwadratowe

$$Q(x + y) + Q(x - y) = 2Q(x) + 2Q(y), \tag{46}$$

mogłaby być dobrym przykładem funkcji 2–Jensen–wypukłej, która nie jest 2–Wright–wypukła. Niestety, taka funkcja $f$ może nie być 2–Jensen–wypukła. Żeby się o tym przekonać weźmy bazę Hamela $H$ zawierającą wektory 1, $\sqrt{2}$ i $\sqrt[4]{2}$. Następnie rozpatrzmy funkcję addytywną $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną na $H$ równościami $a(1) = -9$, $a(\sqrt{2}) = 4$ oraz $a(h) = 0$ dla $h \in H \setminus \{1, \sqrt{2}\}$. Wtedy funkcja $Q(x) = a(x^2)$ spełnia równanie kwadratowe (46). Ostatecznie, dla $x = 1$, $h = \sqrt[4]{2} - 1 > 0$ mamy $Q(x) = -9$, $Q(x + h) = 4$, $Q(x + 2h) = 7$, $Q(x + 3h) = 0$, zatem

$$\Delta^3_h f(x) = \Delta^3_h |Q(x)| = |Q(x + 3h)| - 3|Q(x + 2h)| + 3|Q(x + h)| - |Q(x)| = -18 < 0,$$

co, zgodnie z (9), dowodzi, że $f$ nie może być 2–Jensen–wypukła.

Mając na względzie Twierdzenie 21, można byłoby oczekiwać, że funkcja $f(x) = \big(a(x)\big)_+^2$ (dla odpowiednio wybranej funkcji $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) mogłaby być dobrym przykładem funkcji 2–Jensen–wypukłej, która nie jest 2–Wright–wypukła. Jakkolwiek, takie funkcje nie są 2–Jensen–wypukłe dla dowolnej nieciągłej addytywnej $a$ i dla dowolnej funkcji postaci $a(x) = cx$ z $c < 0$, co pokazujemy niżej. Jeżeli $a(x) = cx$ z pewnym $c \geqslant 0$, to $f$ jest ciągła, $f$ jest 2–Jensen–wypukła. stąd, z ciągłości, otrzymujemy, że $f$ jest również 2–Wright–wypukła (patrz [**79**, Theorem 15.7.1]), zatem nie jest ona dobrym kandydatem dla naszego przykładu.

Stwierdzenie 22. ([**R5**], **Prop. 3.1**) *Jeżeli $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nieciągłą addytywną funkcją, to $f(x) = \big(a(x)\big)_+^2$ nie jest 2–Jensen–wypukła.*

Dowód. Ponieważ $a$ jest nieciągła addytywna, to jej wykres jest gęsty na całej płaszczyźnie (patrz np. [**79**]). Wtedy w otoczeniu punktu $(0, 1)$ istnieje punkt $\big(x, a(x)\big)$, taki że

$$0.9 < a(x) < 1.1\,. \tag{47}$$

Podobnie, w otoczeniu punktu $(1, -2)$ istnieje punkt $\big(h, a(h)\big)$ z $h > 0$ taki że

$$-2.1 < a(h) < -1.9\,.$$

Zatem

$$\begin{aligned} -5.4 < a(x+3h) = a(x) + 3a(h) < -4.6 &\implies \big(a(x+3h)\big)_+ = 0,\\ -3.3 < a(x+2h) = a(x) + 2a(h) < -2.7 &\implies \big(a(x+2h)\big)_+ = 0,\\ -1.2 < a(x+h) = (x) + a(h) < -0.8 &\implies \big(a(x+h)\big)_+ = 0. \end{aligned}$$

Z (47) otrzymujemy $\big(a(x)\big)_+ = a(x) > 0$, stąd, na podstawie $f(x) = \big(a(x)\big)_+^2$,

$$\Delta_h^3 f(x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x) = -\big(a(x)\big)^2 < 0,$$

czyli nierówność (9) nie zachodzi dla $n = 2$ i dla pewnych $x \in \mathbb{R}$ i $h > 0$. □

Stwierdzenie 23. ([**R5**], **Prop. 3.2**) *Jeżeli $a(x) = cx$ dla pewnego $c \geqslant 0$, to $f(x) = \big(a(x)\big)_+^2$ jest 2–Jensen–convex.*

Stwierdzenie 24. ([**R5**], **Prop. 3.3**) *Jeżeli $a(x) = cx$ dla pewnego $c < 0$, to $f(x) = \big(a(x)\big)_+^2$ nie jest 2–Jensen–wypukła.*

## 6. Dowód Twierdzenia 21

W pracy [**R5**] podaję nowe narzędzia z teorii miary i stosuję je do dowodu, że funkcja $f$ zdefiniowana w Twierdzeniu 21 nie jest $n$–Wright–wypukła. Zgodnie z naszą najlepszą wiedzą, przy badaniu tego typu funkcji, takie podejście nie było dotychczas stosowane.

**Operatory $\mathcal{J}_h$, $\mathcal{J}_{h_1 h_2 \ldots h_n}$.** Niech $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ będzie zbiorem wszystkich miar borelowskich $\nu$ na $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, takich że $\nu\big((-\infty, x)\big) < \infty$, $x \in \mathbb{R}$. Niech $\nu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$. Definiuję

$$\mathcal{J}_h \nu(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_h^n \nu(B)\,, \quad h > 0\,,\ B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\,,$$

gdzie $\tau_h^0 \nu(B) = \nu(B)$, $\tau_h^{n+1}(B) = \tau_h\big(\tau_h^n \nu\big)(B)$.

Stwierdzenie 25. ([**R5**], **Prop. 4.2**) *Niech $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ i $h > 0$.*

1. *Jeżeli*

$$\nabla_h\, \mu \geqslant 0\,, \tag{48}$$

*to istnieje $\nu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ taka, że $\mu$ ma postać*

$$\mu = \mathcal{J}_h \nu\,. \tag{49}$$

*Ponadto, miara $\nu$ jest jedyna i jest ona postaci*

$$\nu = \nabla_h\, \mu\,. \tag{50}$$

2. *Jeżeli $\mu$ jest postaci (49) z $\nu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$, wtedy warunki (48) i (50) zachodzą.*

Dla $\nu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ i $h_1, \ldots, h_n > 0$ oznaczamy $\mathcal{J}_{h_1 h_2 \ldots h_n}\nu = \mathcal{J}_{h_1}\mathcal{J}_{h_2} \ldots \mathcal{J}_{h_n}\nu$. Jako konsekwencję Stwierdzenia 25 otrzymujemy

STWIERDZENIE 26. (**[R5], Prop. 4.3**) *Niech $h_1, \ldots, h_n > 0$.*

(a) *Jeżeli $\nu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ spełnia warunek $\mathcal{J}_{h_1 \ldots h_n}\nu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$, to $\nabla_{h_1 \ldots h_n}\big(\mathcal{J}_{h_1 \ldots h_n}\nu\big) = \nu$.*

(b) *Jeżeli $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ spełnia warunek $\nabla_{h_1 \ldots h_n}\mu \geqslant 0$, to $\mathcal{J}_{h_1 \ldots h_n}\big(\nabla_{h_1 \ldots h_n}\mu\big) = \mu$.*

**Przygotowania do szkicu dowodu Twierdzenia 21.** Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i rozważmy bazę Hamela $H \subset \mathbb{R}$ taka, że $h_1, \ldots, h_{n+1} \in H$ są dodatnie. Zachowujemy te konwencję do końca dowodu tego twierdzenia. Definiujemy miary $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1} \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ wzorem

$$\mu_i = \mathcal{J}_{h_1 \ldots h_{n+1}}\delta_{h_i}\,, \quad i = 1, \ldots, n+1\,, \tag{51}$$

gdzie $\delta_x$ jest miarą probabilistyczną skupioną w punkcie $x$. Dalej, definiujemy miarę znakowaną $\mu$ jako

$$\mu = \mu_2 + \cdots + \mu_{n+1} - \mu_1\,. \tag{52}$$

Elementy $h_1, \ldots, h_{n+1}$, jako elementy bazy Hamela są niewspółmierne, i nietrudno jest sprawdzić, że zachodzą wzory

$$\mu_i = \sum_{j_1, \ldots, j_{n+1}=0}^{\infty} \delta_{h_i + j_1 h_1 + \cdots + j_{n+1}h_{n+1}}\,, \quad i = 1, \ldots, n+1\,. \tag{53}$$

Następnie rozważamy zbiory $A, A_1, \ldots, A_{n+1} \subset \mathbb{R}$ zdefiniowane jako

$$A_i = \left\{ h_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \varepsilon_j h_j \ : \ \varepsilon_j \in \{0,1\},\ j = 1, \ldots, n+1 \right\}, \quad i = 1, \ldots, n+1\,,$$
$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}\,.$$

Będziemy używać oznaczenia $\mu(x) = \mu\big(\{x\}\big)$.

TWIERDZENIE 27. (**[R5], Th. 4.5**) *Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana jak w Twierdzeniu 21 i $\mu$ będzie miarą znakowaną daną przez* (52)*. Wtedy*

$$f(x) = (\,\mu + \delta_{h_1})^n(x) \quad \textit{dla każdego } x \in A\,. \tag{54}$$

*W szczególności,*

$$\nabla_{h_1 \ldots h_{n+1}} f(h_1 + \cdots + h_{n+1}) = \nabla_{h_1 \ldots h_{n+1}}(\,\mu + \delta_{h_1})^n(h_1 + \cdots + h_{n+1})\,. \tag{55}$$

Twierdzenie 27 pozwala nam pracować z miarami zamiast oryginalnej funkcji $f$. Niżej podajemy trzy użyteczne wzory.

LEMAT 28. (**[R5], Lem. 4.6**) *Niech $\mu = \mu_2 + \cdots + \mu_{n+1} - \mu_1$ będzie miarą znakowaną daną wzorem* (52)*. Wtedy*

$$(\,\mu + \delta_{h_1})^n(x) = \big(\,\mu(x)\big)^n - (-1)^n\delta_{h_1}(x) \quad \textit{dla każdego } x \in A\,, \tag{56}$$

$$\nabla_{h_1 \ldots h_{n+1}}\big(\,\mu(h_1 + \cdots + h_{n+1})\big)^n = 0\,, \tag{57}$$

$$\nabla_{h_1 \ldots h_{n+1}}\delta_{h_1}(h_1 + \cdots + h_{n+1}) = (-1)^n\,. \tag{58}$$

**Szkic końcowego kroku dowodu Twierdzenia 21.**
Przypomnijmy, że rozważaliśmy nieparzyste $n \in \mathbb{N}$ i że mieliśmy wybraną bazę Hamela $H \subset \mathbb{R}$ taką, że $h_1, \ldots, h_{n+1} \in H$ były dodatnie. Zdefiniowaliśmy funkcję addytywną $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że $a(h_1) = -1$ i $a(h_2) = \cdots = a(h_{n+1}) = 1$ oraz funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako $f(x) = \big(a(x)\big)_+^n$. Pokazaliśmy, że $f$ jest $n$–Jensen–wypukła. Pozostało do udowodnienia, że $f$ nie jest $n$–Wright–wypukła. Żeby to pokazać wystarczy sprawdzić, że $\Delta_{h_1 \ldots h_{n+1}} f(0) = -1$. Z (8) jest to równoważne równości $\nabla_{h_1 \ldots h_{n+1}} f(h_1 + \cdots + h_{n+1}) = -1$. Używając (55) – (58) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\nabla_{h_1 \ldots h_{n+1}} f(h_1 + \cdots + h_{n+1}) &= \nabla_{h_1 \ldots h_{n+1}}(\,\mu + \delta_{h_1})^n(h_1 + \cdots + h_{n+1}) \\
&= \nabla_{h_1 \ldots h_{n+1}}\Big(\big(\,\mu(h_1 + \cdots + h_{n+1})\big)^n - (-1)^n\delta_{h_1}(h_1 + \cdots + h_{n+1})\Big) \\
&= \nabla_{h_1 \ldots h_{n+1}}\big(\,\mu(h_1 + \cdots + h_{n+1})\big)^n + \nabla_{h_1 \ldots h_{n+1}}\delta_{h_1}(h_1 + \cdots + h_{n+1}) = -1,
\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

ROZDZIAŁ 4

# Funkcje $n$-wypukłe

W tym rozdziale, w Części 1 podaję całkową reprezentację $n$-wypukłej funkcji $f$ bez żadnych dodatkowych założeń o $f$. Jest ona następnie stosowana do dalszego badania $n$-wypukłości, do charakteryzacji silnej $n$-wypukłości, $n$-Wright-wypukłości, i względnej $n$-wypukłości funkcji, między innymi. Również wykorzystuję tę reprezentację do badania własności typu podparciowego funkcji $n$-wypukłych.

W Części 2, dowodzę, że $n$-wypukła funkcja może być przedstawiona w postaci sumy dwóch $(n+1)$-krotnie monotonicznych funkcji i wielomianu stopnia co najwyżej $n$. Ten wynik jest odpowiednikiem charakteryzacji funkcji wypukłej podanej przez Robertsa i Varberga w [**141**]). Używając tego rozkładu otrzymuję nowy rozkład funkcji $n$-Wright-wypukłej, co uogólnia wyniki Maksy i Pálesa [**99**].

W Części 3, definiuję i badam względną $n$-wypukłość funkcji $n$-wypukłych. Względna $n$-wypukłość indukuje częściowy porządek w zbiorze funkcji $n$-wypukłych. Definiuję miarę $n$-wypukłości funkcji $n$-wypukłej $f$ używając $n$-spektralnych miar występujących w jej reprezentacji całkowej. Podaję charakteryzację względnej $n$-wypukłości w terminach miar $n$-wypukłości, używając pochodnych dystrybucyjnych $n$-tego rzędu jak rownież w terminologii pochodnych Radona-Nikodyma. Używając rozkładu Lebesgue'a miar $n$-spektralnych odpowiadających funkcji $n$-wypukłej $f$, rozważam odpowiedni rozkład funkcji $f$. Rozkład ten jest stosowany do uzyskania użytecznej charakteryzacji względnej $n$-wypukłości.

W Części 4, definiuję i badam pojęcie silnej $n$-wypukłości, które uogólnia pojęcie silnej wypukłości. Wiemy, że silna wypukłość może być scharakteryzowana w terminach drugiej pochodnej $f''(x)$ dla funkcji $f$ dwukrotnie różniczkowalnej. Ja podaję charakteryzację silnej $n$-wypukłości funkcji $n$-wypukłej $f$ w terminach własności $f^{(n+1)}(x)$ prawie wszędzie względem miary Lebesgue'a ($f^{(n+1)}(x)$ istnieje prawie wszędzie dla $n$-wypukłej funkcji $f$), bez dodatkowych założeń o różniczkowalności funkcji $f$.

W Części 5, dowodzę, że dla każdych dwóch $n$-wypukłych funkcji $f$ and $g$, takich, że $f$ jest $n$-wypukła względem $g$, funkcja $g$ jest podparciem dla $f$, w sensie zdefiniowanym przez Wąsowicza [**181**], z dokładnością do wielomianu stopnia co najwyżej $n$. Jest to uogólnienie wyników Wąsowicza [**181**].

## 1. Reprezentacja całkowa

W [**R1**] podaję następującą reprezentację funkcji $n$-wypukłej $f$.

TWIERDZENIE 29. ([**R1**], **Th. 2.9, Th. 2.10**) *Niech $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będzie $n$-wypukłą funkcją.*
a) *Dla każdego $\xi\in(a,b)$, funkcja $f$ ma reprezentację*

$$f(x)=\int_{(a,\xi]}(-1)^{n+1}\frac{[-(x-u)]_+^n}{n!}\mu_{(n)\xi-}(du)+\int_{[\xi,b)}\frac{(x-u)_+^n}{n!}\mu_{(n)\xi+}(du)+Q_\xi(x), \tag{59}$$

*dla wszystkich $x\in(a,b)$, gdzie*

$$\begin{aligned}\mu_{(n)\xi-}(du)&=d[f^{(n)}(u)-f^{(n)}(\xi+)]_-,\\ \mu_{(n)\xi+}(du)&=d[f^{(n)}(u)-f^{(n)}(\xi+)]_+,\\ Q_\xi&\in\Pi_n.\end{aligned}\tag{60}$$

*Ponadto, miara $\mu_{(n)}$ dana wzorem*

$$\mu_{(n)}(du)=\mu^f_{(n)}(du)=\mu_{(n)\xi-}(du)+\mu_{(n)\xi+}(du)=df^{(n)}(u)\tag{61}$$

*jest niezależna od wyboru $\xi$. Będziemy nazywać $\mu_{(n)}$ $n$-spektralną miarą odpowiadającą $f$.*

b) *Jeżeli* $\lim_{x\to a+} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(a+) = \alpha$ *jest skończona, to* $f(x)$ $(x \in (a,b))$ *może być przedstawiona w postaci*

$$f(x) = \int_a^b \frac{(x-u)_+^n}{n!} \mu_{(n)a+}(du) + Q_a(x), \tag{62}$$

*gdzie* $\mu_{(n)a+}(du) = d[f^{(n)}(u) - \alpha]_+$, $Q_a(x) \in \Pi_n$.

c) *Jeżeli* $\lim_{x\to b-} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(b-) = \beta$ *jest skończona, to* $f(x)$ $(x \in (a,b))$ *może być przedstawiona w postaci*

$$f(x) = \int_a^b (-1)^{n+1} \frac{[-(x-u)]_+^n}{n!} \mu_{(n)b-}(du) + Q_b(x), \tag{63}$$

*gdzie* $\mu_{(n)b-}(du) = d[f^{(n)}(u) - \beta]_-$, $Q_b(x) \in \Pi_n$.

Zachodzi również twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 30. ([**R1**], **Th. 2.9, Th. 2.10**)

a) *Jeżeli funkcja* $f(x)$ $(x \in (a,b))$ *dana jest wzorem* (61), *gdzie* $Q_\xi \in \Pi_n$ *i* $\mu_{(n)}((c,d)) < \infty$ *dla wszystkich* $a < c < d < b$, *to* $f$ *jest* $n$*-wypukła.*
b) *Jeżeli funkcja* $f(x)$ $(x \in (a,b))$ *dana jest wzorem* (62), *gdzie* $Q_a(x) \in \Pi_n$ *i* $\mu_{(n)}((a,d)) < \infty$ *dla wszystkich* $a < d < b$, *to* $f$ *jest* $n$*-wypukła.*
c) *Jeżeli funkcja* $f(x)$ $(x \in (a,b))$ *dana jest wzorem* (63), *gdzie* $Q_b(x) \in \Pi_n$ *i* $\mu_{(n)}((c,b)) < \infty$ *dla wszystkich* $a < c < b$, *to* $f$ *jest* $n$*-wypukła.*

## 2. $n$-wypukłość i wielokrotna monotoniczność

Z Twierdzenia 29 o reprezentacji funkcji $n$-wypukłej $f$, oraz biorąc pod uwagę wzory na reprezentację funkcji $(n+1)$-krotnie monotonicznej nierosnącej i niemalejącej, (17) i (16), odpowiednio, otrzymujemy, że $f$ może być reprezentowana jako suma dwóch funkcji $(n+1)$-krotnie monotonicznej nierosnącej i niemalejącej, oraz wielomianu stopnia co najwyżej $n$. Ten wynik uogólnia znane twierdzenie o reprezentacji funkcji wypukłej jako sumy pewnych dwóch funkcji nierosnącej i niemalejącej, i wielomianu stopnia co najwyżej 1, podanego przez Robertsa i Varberga w [**141**]). Niech $\mathcal{M}_{(n+1)+}((a,b))$ i $\mathcal{M}_{(n+1)-}((a,b))$ będą klasami funkcji $(n+1)$-krotnie monotonicznych niemalejących oraz nierosnących na $(a,b)$, odpowiednio.

Twierdzenie 31. ([**R1**], **Th. 3.2**) *Niech* $n \geqslant 1$, $a \leqslant \xi \leqslant b$ *i niech* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. *Wtedy* $f$ *jest* $n$*-wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy* $f$ *jest postaci*

$$f(x) = M_1(x) + M_2(x) + Q(x),$$

*gdzie* $(-1)^{n+1}M_1(x) \in \mathcal{M}_{(n+1)-}((a,\xi))$, $M_2(x) \in \mathcal{M}_{(n+1)+}((\xi,b))$, $M_1(x) + M_2(x)$ *jest ciągła na* $(a,b)$ *oraz* $Q(x) \in \Pi_n$.

Przy badaniu nierówności (9), funkcje, które spełniają (9) z równością odgrywają dużą rolę przy badaniu nierówności (patrz [**79**]). Dla $n \in \mathbb{N}$, funkcja $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nazywana *funkcją wielomianową stopnia co najwyżej* $n$, gdy spełnia ona równanie Frécheta , tzn. jeśli

$$(\Delta_h)^{n+1} P(x) = 0 \quad (h, x \in \mathbb{R}).$$

Wielomiany są dokładnie ciągłymi funkcjami wielomianowymi, jakkolwiek w terminach baz Hamela można skonstruować funkcje wielomianowe nieciągłe [**79**]). Maksa and Páles [**99**] udowodnili, że każda funkcja $n$-Wright-wypukła może być reprezentowana jako suma funkcji $n$-wypukłej i funkcji wielomianowej.

Stwierdzenie 32. ([**99**]) *Niech* $n \geqslant 1$ *i* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. *Wtedy* $f$ *jest* $n$*-Wright-wypukłą funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy* $f$ *jest postaci*

$$f(x) = C(x) + P(x) \quad (x \in (a,b)), \tag{64}$$

*gdzie* $C\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *jest ciągła* $n$*-wypukła i* $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją wielomianową stopnia co najwyżej* $n$ *z* $P(\mathbb{Q}) = \{0\}$. *Przy dodatkowym założeniu* $P(\mathbb{Q}) = 0$, *rozkład (64) jest jedyny.*

Z Twierdzenia 31 i Stwierdzenia 32 otrzymujemy następujący rozkład funkcji $n$-Wright-wypukłej.

Twierdzenie 33. (**[R1], Theorem 3.6**) *Niech $n \geqslant 1$, $a < \xi < b$ i $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Wtedy $f$ jest $n$-Wright-wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = M_1(x) + M_2(x) + Q(x) + P(x),$$

*gdzie $(-1)^{n+1}M_1(x)$ jest $(n+1)$-krotnie monotoniczna niemalejąca na $(a,\xi)$, $M_2(x)$ jest $(n+1)$-krotnie monotoniczna nierosnąca na $(\xi,b)$, $M_1(x)+M_2(x)$ jest ciągła na$(a,b)$, $Q(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej $n$ (jak w Twierdzeniu 31) i $P(x)$ jest funkcją wielomianową stopnia co najwyżej $n$.*

## 3. Względna $n$-wypukłość

Niech $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie $n$-wypukłą funkcją. Mówimy, że funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest *$n$-wypukła względem $g$*, gdy $f - g$ jest $n$-wypukła, i oznaczamy to jako $f \succeq_n g$.

Względna $n$-wypukłość zdefiniowana wyżej jest uogólnieniem względnej wypukłości badanej w pracy Karlina i Studdena [**76**] (dla $n = 1$) (patrz również [**24**], [**52**], [**125**], [**129**]).

Gdy $f$ jest $n$-wypukła względem $g$, to obie funkcje $f-g$ i $g$ są $n$-wypukłe. Pisząc $f = g+(f-g)$, otrzymujemy, że $f$ też musi być $n$-wypukła. Funkcje $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ i $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, które są niemalejące i nierosnące na tych samych przedziałach nazywają się *izotoniczne*, lub mówimy, że są elementami tej samej izotonicznej klasy.

Twierdzenie 34. (**[R1], Th. 4.3**)

$$f \succeq_n g \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mu^f_{(n)} \geqslant \mu^g_{(n)}.$$

Na podstawie Twierdzenia 34, miara $\mu^f_{(n)}$ może być uważana jako *miara $n$-wypukłości funkcji* $f$ (lub krócej *miara $n$-wypukłości*). Będziemy mówić, że funkcje $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ są równe *modulo* $\Pi_n$, albo że są elementami tej samej *modulo* $\Pi_n$ *klasy*, gdy różnią się o wielomian $Q \in \Pi_n$. Relacja modulo $\Pi_n$ jest relacją równoważności i stąd definiuje klasy równoważności. Dla $n$-wypukłej $f$ i $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, które są elementami tej samej modulo $\Pi_n$ klasy otrzymujemy, że $f^{(n)}(x)$ i $g^{(n)}(x)$ różnią się na $(a,b)$ o stałą. Stąd, na podstawie Twierdzenia 29, otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 35. (**[R1], Th. 4.4**)

$$f = g \ (mod\, \Pi_n) \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \mu^f_{(n)} = \mu^g_{(n)}.$$

Relacja względnej $n$-wypukłości indukuje częściowy porządek.

Twierdzenie 36. (**[R1], Th. 4.5**) *Relacja względnej $n$-wypukłości indukuje częściowy porządek na modulo $\Pi_n$ klasach równoważności funkcji $n$-wypukłych.*

Jako prosty przykład zastosowania Twierdzenia 29 można udowodnić następujące twierdzenie. Oznaczamy przez $d\mu/d\nu = \varphi$ pochodną Radona-Nikodyma miary $\mu$ względem miary $\nu$ (patrz [**144**]).

Twierdzenie 37. (**[R1], Th. 4.6**) *Niech $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będą $n$-wypukłe. Wtedy*

a) *istnieje funkcja $n$-wypukła $f_{max}$, taka że*

$$f_{max} \succeq_n f, \quad f_{max} \succeq_n g,$$

*i dla każdej $n$-wypukłej funkcji $h$*

$$(h \succeq_n f \text{ i } h \succeq_n g) \Rightarrow h \succeq_n f_{max},$$

b) *istnieje funkcja $n$-wypukła $f_{min}$, taka że*

$$f \succeq_n f_{min}, \quad g \succeq_n f_{min},$$

*i dla każdej $n$-wypukłej funkcji $h$*

$$(f \succeq_n h \text{ and } g \succeq_n h) \Rightarrow f_{min} \succeq_n h,$$

c) *gdy $f \succeq_n g$ i $f \neq g(mod\ \Pi_n)$, to istnieje funkcja $n$-wypukła $w$, taka że $f \neq w$ $(mod\ \Pi_n)$, $g \neq w$ $(mod\, \Pi_n)$ i*

$$f \succeq_n w \succeq_n g.$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o rozkładzie miary i o rozkładzie miary singularnej, każda $\sigma$-skończona miara $\mu$ może być przedstawiona w postaci sumy miary absolutnie ciągłej (względem miary Lebesgue'a), singularnej ciągłej oraz dyskretnej, tzn.

$$\mu = \mu_{cont} + \mu_{sing} + \mu_{pp},$$

gdzie $\mu_{cont}$ jest absolutnie ciągła, $\mu_{sing}$ jest singularna ciągła i $\mu_{pp}$ czysto punktowa (miara dyskretna, patrz Royden [**144**]). Miary te są wyznaczone jednoznacznie.

Rozkład miary $n$-spektralnej $\mu^f_{(n)}$ w postaci sumy miary absolutnie ciągłej, singularnej ciągłej oraz dyskretnej, implikuje analogiczne rozkład $n$-wypukłej funkcji $f$.

Twierdzenie 38. ([**R1**], **Th. 4.8**) *Każda $n$-wypukła funkcja $f$ z miarą $n$-spektralną $\mu^f_{(n)}$ może być przedstawiona w postaci sumy*

$$f = f_{cont} + f_{sing} + f_{pp}, \tag{65}$$

*gdzie $f_{cont}$, $f_{sing}$ and $f_{pp}$ odpowiadają absolutnie ciągłej, singularnej ciągłej oraz dyskretnej części rozkładu miary $n$-spectral measure $\mu^f_{(n)}$, odpowiednio ($\mu^f_{(n)} = \mu_{(n)cont} + \mu_{(n)sing} + \mu_{(n)pp}$). Funkcje $f_{cont}$, $f_{sing}$ i $f_{pp}$ są $n$-wypukłe. Poza tym, są one jednoznacznie wyznaczone, z dokładnością do wielomianów stopnia co najwyżej $n$.*

Nietrudno jest udowodnić następujący lemat.

Lemat 39. *Niech $\mu$ i $\nu$ będą dwiema $\sigma$-skończonymi miarami o następujących rozkładach na części absolutnie ciągłe, singularne ciągłe oraz dyskretne*

$$\mu = \mu_{cont} + \mu_{sing} + \mu_{pp} \quad i \quad \nu = \nu_{cont} + \nu_{sing} + \nu_{pp}.$$

*Wtedy $\mu \geqslant \nu$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_{cont} \geqslant \nu_{cont}$, $\mu_{sing} \geqslant \nu_{sing}$ i $\mu_{pp} \geqslant \nu_{pp}$.*

Biorąc pod uwagę rozkład (65) funkcji $n$-wypukłej, z Lematu 39, otrzymujemy natychmiast trzy twierdzenia użyteczne przy badaniu względnej $n$-wypukłości funkcji.

Twierdzenie 40. ([**R1**], **Th. 4.10**) *Niech $f$ i $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będą $n$-wypukłymi funkcjami, mającymi rozkłady $f = f_{cont}+f_{sing}+f_{pp}$, $g = g_{cont}+g_{sing}+g_{pp}$ (patrz (65)), odpowiednio. Wtedy $f \succeq_n g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_{cont} \succeq_n g_{cont}$, $f_{sing} \succeq_n g_{sing}$ i $f_{pp} \succeq_n g_{pp}$.*

Twierdzenie 41. ([**R1**], **Th. 4.11**)

$$f_{cont} \succeq_n g_{cont} \quad \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f^{(n+1)}_{cont}(x) \geqslant g^{(n+1)}_{cont}(x).$$

Twierdzenie 42. ([**R1**], **Th. 4.12**)

$$f_{pp} \succeq_n g_{pp} \quad \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f^{(n+1)}_{pp} \geqslant g^{(n+1)}_{pp},$$

*gdzie $f^{(n+1)}_{pp} = \sum_k a_k\delta_{x_k}$, $g^{(n+1)}_{pp} = \sum_k b_k\delta_{y_k}$.*

### 4. Silna $n$-wypukłość.

Jednym z ważniejszych uogólnień wypukłości jest pojęcie silnej wypukłości. Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest nazywana *silnie wypukłą z modułem $c > 0$*, gdy

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2,$$

dla wszystkich $x, y \in (a,b)$ i $t \in [0,1]$. Silnie wypukłe funkcje były wprowadzone przez Polyaka w [**135**]. Pewne ich własności można znaleźć, między innymi, w [**141**], [**54**], [**134**]. Przypomnę teraz kilka ich własności, które będą istotne w dalszych rozważaniach (patrz [**141**]). Pierwsza, charakteryzuje silną wypukłość w terminach wypukłości, natomiast druga charakteryzuje funkcje silnie wypukłe dwukrotnie różniczkowalne w terminach drugiej pochodnej $f''(x)$.

Stwierdzenie 43. *Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest silnie wypukła z modułem $c > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f(x) - cx^2$ jest wypukła.*

Stwierdzenie 44. *Załóżmy, że $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i że $c > 0$. Wtedy $f$ jest silnie wypukła z modułem $c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) \geqslant 2c$ ($x \in (a,b)$).*

Jako uogólnienie silnej wypukłości, definiuję silną $n$-wypukłość. Mówimy, że funkcja $f$ jest *silnie n-wypukła zmodułem c* ($n \geqslant 1$, $c > 0$), gdy $f$ jest $n$-wypukła względem funkcji $g(x) = \frac{cx^{n+1}}{(n+1)!}$.

Na podstawie Stwierdzenia 43, silna wypukłość z modułem $2c$ (por. Roberts i Varberg [**141**]) pokrywa się z naszą silną 1-wypukłością z modułem $c$. Pisząc $f(x) = \Big(f(x) - \frac{cx^{n+1}}{(n+1)!}\Big) + \frac{cx^{n+1}}{(n+1)!}$, otrzymujemy, że gdy $f$ jest silnie $n$-wypukła z modułem $c > 0$, to $f$ jest $n$-wypukła. Można zauważyć, że funkcja $g(x) = \frac{cx^{n+1}}{(n+1)!}$ jest $n$-wypukła z miarą $n$-wypukłości $\mu^g_{(n)}(dx) = dg^{(n)}(x) = cdx$ and $g^{(n)}(x) = cx$. Pisząc $g(x)$ w postaci (65), mamy $g = g_{cont}$. Stosując Twierdzenia 40 – 42 o względnej $n$-wypukłości funkcji, otrzymujemy następujące charakteryzacje silnie $n$-wypukłej funkcji $f$ z modułem $c$, bez żadnych dodatkowych założeń dotyczących $f$. W szczególnym przypadku $n = 1$, charakteryzacje te podają własności funkcji silnie wypukłych i uogólniają własności funkcji silnie wypukłych zawarte w Stwierdzeniu 44.

Twierdzenie 45. ([**R1**], **Th. 4.15**) *Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją $n$-wypukłą i $c > 0$. Wtedy $f$ jest silnie $n$-wypukła z modułem $c$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f^{(n+1)}(x) \geqslant c \text{ dla } x \in (a,b) \quad \lambda \text{ p.w.}$$

Twierdzenie 46. ([**R1**], **Cor. 4.16**) *Niech $c > 0$, $n \in \mathbb{N}$ i $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Wtedy $f$ jest silnie $n$-wypukła z modułem $c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f$ jest postaci*

$$f(x) = f_{cont}(x) + R(x) \quad (x \in (a,b)),$$

*gdzie $f_{cont}\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna silnie $n$-wypukłą funkcją z modułem $c$, i $R\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest $n$-wypukłą funkcją taką, że $R^{(n+1)}(x) = 0$ dla $x \in (a,b)$ $\lambda$ p.w.*

Jako wniosek otrzymujemy charakteryzację funkcji $f$ silnie $n$-wypukłych z modułem $c$, które są $(n+1)$-krotnie różniczkowalne.

Wniosek 47. ([**R1**], **Th. 4.17**) *Niech $c > 0$, $n \in \mathbb{N}$ i niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie $(n+1)$-krotnie różniczkowalną funkcją. Wtedy $f$ jest silnie $n$-wypukła z modułem $c$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f^{(n+1)}(x) \geqslant c \quad (x \in (a,b)).$$

Zauważmy, że silnie $n$-wypukłe funkcje zostały zdefiniowane również niezależnie przez R. Gera i K. Nikodema w [**40**], w inny sposób, mianowicie w terminach ilorazów różnicowych, tak że silna $n$-wypukłość z modułem $c$ pokrywa się z silną $n$-wypukłością z modułem $\frac{c}{(n+1)!}$ według mojej definicji (z pracy[**R1**]). Powyższa charakteryzacja silnej $n$-wypukłości, dla funkcji $(n+1)$-krotnie różniczkowalnych, podana we Wniosku 47, jest również otrzymana w [**40**]).

## 5. Interpolacja funkcji przez $n$-wypukłe funkcje

Wiadomo, że każdej funkcji $f\colon I \to \mathbb{R}$ odpowiada w każdym punkcie wewnętrznym $I$ podparcie afiniczne (tzn. dla każdego $x_0 \in IntI$ istnieje funkcja afiniczna $a\colon I \to \mathbb{R}$, taka że $a(x_0) = f(x_0)$ i $a \leqslant f$ na $I$). Funkcje wypukłe wyższych rzędów (dokładniej nieparzystych) mają podparcia wielomianami stopnia nie większego niż rząd wypukłości.

Następujące własności funkcji wypukłych są dobrze znane (patrz Kuczma [**79**], Popoviciu [**136**], Roberts and Varberg [**141**]): funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest $n$-wypukła ($I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ z $x_1 < \ldots x_{n+1}$ wykres wielomianu interpolacyjnego $p := P(x_1, \ldots, x_{n+1}; f)$ przechodząc przez punkty $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \ldots, n+1$, zmienia kolejno strony wykresu funkcji $f$ z jednej na drugą (zawsze $p(x) \leqslant f(x)$ dla $x \in I$ takich, że $x > x_{n+1}$ o ile takie punkty istnieją). Dokładniej, $(-1)^{n+1}(f(x) - p(x) \geqslant 0)$ $x < x_1$, $x \in I$, $(-1)^{n+1-i}(f(x) - p(x)) \geqslant 0$, $x_i < x < x_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n$, $f(x) - p(x) \geqslant 0$, $x > x_{n+1}$, $x \in I$. Nietrudno zauważyć, że $n$-wypukłość redukuje się do zwykłej wypukłości, gdy $n = 1$.

W pracy Wąsowicza [**181**], dla funkcji wypukłych wyższych rzędów, jest rozwijana pewna metoda dotycząca podparć wielomianami. W pracy tej autor udowodnił następujące twierdzenie.

Stwierdzenie 48. ([**181**]) *Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f\colon I \to \mathbb{R}$ będzie $n$-wypukłą funkcją. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, i weźmy $x_1, \ldots, x_k \in I$ takie, że $x_1 < \ldots < x_k$. Każdemu punktowi $x_j$ ($j = 1, \ldots, k$) przyporządkowujemy wielokrotność $l_j \in \mathbb{N}$, tak że $l_1 + \ldots l_j = n+1$. Dodatkowo zakładamy, że $x_1 = \inf I$, gdy $l_1 = 1$, oraz jeżeli $x_k = \sup I$, to $l_k = 1$. Oznaczmy $I_0 = (-\infty, x_1)$, $I_j = (x_j, x_{j+1})$, $j = 1, \ldots, k-1$, and $I_k = (x_k, \infty)$. Przy tych założeniach, istnieje wielomian $p \in \Pi_n$, taki że $p(x_j) = f(x_j)$, $j = 1, \ldots, k$, oraz $(-1)^{n+1}(f(x) - p(x)) \geqslant 0$ dla $x \in I_0 \cap I$, $(-1)^{n+1-(l_1+\ldots l_j)}(f(x) - p(x)) \geqslant 0$ dla $x \in I_j$, $j = 1, \ldots, k-1$, $f(x) - p(x) \geqslant 0$ dla $x \in I_k \cap I$.*

Liczby $l_1, \dots, l_k$ mogą być interpretowane jako wielokrotności punktów $x_1, \dots, x_k$, odpowiednio. Wielomian $p(x)$ w powyższym stwierdzeniu będziemy nazywać *podparciem* $(l_1, \dots, l_k)$*-typu.*

WNIOSEK 49. *Powyższa własność została pokazana przez Wąsowicza* [**182**] *również w ogólniejszej wersji, mianowicie dla funkcji wypukłych względem układu Czebyszewa (dla układu Czebyszewa* $(1, x, \dots, x^n)$ *taka wypukłość redukuje się do* $n$*-wypukłości).*

UWAGA 50. Wielomian $p(x)$ opisany w Stwierdzeniu 48 ma następujące własności:

(i) $p(x) \leqslant f(x)$, $x > x_k$, $x \in I$,
(ii) if $l_j$ (wielokrotność $x_j$) jest parzysta, to $p(x)$ przechodzi przez $x_j$ pozostając po tej samej stronie wykresu funkcji $f$, natomiast zmienia stronę, gdy $l_j$ jest nieparzysta.

W pracy [**R1**], stosując Stwierdzenie 48 i otrzymane wcześniej wyniki dotyczące względnej $n$-wypukłości, otrzymuję ogólniejszy wynik, że dla każdych dwóch $n$-wypukłych funkcji $f$ i $g$, takich, że $f$ jest $n$-wypukła względem $g$, funkcja $g$ jest podparciem $(l_1, \dots, l_k)$-typu dla funkcji $f$, z dokładnością do wielomianu należącego do $\Pi_n$.

TWIERDZENIE 51. ([**R1**]**, Th. 5.4**) *Niech* $n \in \mathbb{N}$ *i niech* $f$ *i* $g \colon I \to \mathbb{R}$ *będą dwiema* $n$*-wypukłymi funkcjami, takimi że* $f$ *jest* $n$*-wypukła względem* $g$*. Ustalmy* $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, *i niech* $x_1, \dots, x_k \in I$ *będą takie że* $x_1 < \ldots < x_k$*. Załóżmy, że* $l_j$, $I_j$ *spełniają założenia Twierdzenia 48. Wtedy istnieje wielomian* $p \in \Pi_n$*, taki że*

$$f(x_j) = g(x_j) + p(x_j), \quad j = 1, \dots, k, \tag{66}$$

*i dodatkowo*

$$\begin{aligned} &(-1)^{n+1}[f(x) - (g(x) + p(x))] \geqslant 0 \quad \text{dla } x \in I_0 \cap I \\ &(-1)^{n+1-(l_1+\ldots+l_j)}[f(x) - (g(x) + p(x))] \geqslant 0 \quad \text{dla } x \in I_j, j = 1, \dots, k-1, \\ &f(x) - (g(x) + p(x)) \geqslant 0 \quad \text{dla } x \in I_k \cap I. \end{aligned} \tag{67}$$

*Funkcję* $g(x) + p(x)$ *będziemy nazywać podparciem* $(l_1, \dots, l_k)$*-typu dla funkcji* $f$*.*

ROZDZIAŁ 5

# Randomizacja funkcji $n$-Wright-wypukłych

## 1. Klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ – definicja

Niech $Q \in \{\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots\}$ i niech $\Theta$ będzie zmienną losową skoncentrowaną na $[0, \infty)$ $(\mu_\Theta \neq \delta_0)$. Niech $n \geqslant 1$. Niech $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ będą niezależnymi kopiami zmiennej losowej $\Theta$. Niech $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją, taką że $f \in Q$. Mówimy, że $f$ *jest $n$- krotnie $\Theta$-Wright-wypukła względem $Q$* **[R3]** gdy

$$E\nabla_{\Theta_1 \dots \Theta_p} f(x) \in Q, \ p = 1, 2, \dots, n.$$

Niech $\mathcal{W}_n = \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ $(n = 1, 2, \dots)$ będzie zbiorem wszystkich funkcji $f \in Q$, takich że $f$ jest $n$-krotnie $\Theta$-Wright-wypukła względem $Q$. Definiuję $\mathcal{W}_0(\Theta, Q) = Q$, $\mathcal{W}(\Theta, Q) = \mathcal{W}_1(\Theta, Q)$. Najpierw rozpatruję przypadek, gdy $Q = \mathcal{M}_0$. Wtedy

$$f \in \mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_0) \Longleftrightarrow E\nabla_{\Theta_1 \dots \Theta_k} f(x) \geqslant 0, \ k = 1, 2, \dots, n.$$

Inaczej mówiąc, $f$ może być uważana jako zrandomizowana wersja $(n-1)$-krotnie-Wright-wypukłej funkcji.

## 2. Klasa $\mathcal{W}_1(\Theta, \mathcal{M}_1)$. Klasa $M(\Theta)$ miar $\Theta$-nadniezmienniczych

$M(\Theta)$ – **klasa $\Theta$-nadniezmienniczych miar.** Rozważam przypadek, gdy $Q = \mathcal{M}_1$ i $n = 1$. Jeżeli $f \in \mathcal{M}_1$, to $f$ jest dystrybuantą miary $\mu$, takiej że $\mu((-\infty, x)) = f_\mu(x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Można zauważyć, że klasę $\mathcal{W}_1(\Theta, \mathcal{M}_1)$ można utożsamić z klasą miar $M(\Theta)$ składającą się z miar $\mu$ spełniających nierówność

$$E\nabla_\Theta \mu \geqslant 0, \tag{68}$$

gdzie

$$E\nabla_\Theta \mu(B) = \mu(B) - E\mu(B - \Theta) = \mu(B) - E\tau_\Theta \mu(B), \tag{69}$$

gdy $\mu(B) < \infty$ $(B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (patrz **[R2]**). Miarę $\mu$ spełniającą nierówność (68) będziemy nazywać miarą $\Theta$-*nadniezmienniczą*. Operatory $E\nabla_\Theta$ i $E\tau_\Theta$ (działające zarówno na miarach jak i na funkcjach) nazywamy *zrandomizowanymi operatorami różnicowym i przesunięcia*, odpowiednio.

Twierdzenie 52. (**[R2], Th. 2.3**) *Niech $\Theta_1, \Theta_2, \dots$ będą niezależnymi kopiami zmiennej losowej $\Theta$. Wtedy $\mu \in M(\Theta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu$ jest postaci*

$$\mu(B) = \sum_{j=2}^{\infty} E\tau_{\Theta_j} \dots E\tau_{\Theta_2} \nu(B) + \nu(B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \tag{70}$$

*gdzie $\nu$ jest miarą borelowską na $\mathbb{R}$. Ponadto, mamy*

$$\nu(B) = E\nabla_{\Theta_1} \mu(B). \tag{71}$$

Inaczej mówiąc, miary z klasy $M(\Theta)$, możemy otrzymywać przy pomocy wzoru (70). Ponadto, dla danej $\mu \in M(\Theta)$, poprzez wzór (71), otrzymuje się miarę $\nu$ będącą miarą generującą. Stąd, można powiedzieć, że $\mu$ jest generowana przez miarę $\nu$, i $\nu$ będziemy nazywać *generatorem* miary $\mu$.

**Klasa $M(\Theta, I_0)$.** Niech $I_a = (-\infty, a)$ i niech $\tilde{I}_a = [-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$. Niech $M(\Theta, \tilde{I}_a)$ będzie zbiorem miar na $\tilde{I}_a$, takich że $E\nabla_\Theta \mu(B) \geqslant 0$, dla wszystkich $B \in \mathcal{B}(\tilde{I}_a)$ (zakładając $\mu([-\infty, x]) < \infty$, $-\infty \leqslant x \leqslant a$). Niech $M(\Theta, I_a)$ będzie zbiorem $\mu \in M(\Theta, \tilde{I}_a)$ dla których $\mu(\{-\infty, a\}) = 0$. Analogicznie definiuję zbiór $M(\Theta, (-\infty, a])$.

Rozważmy teraz $a = 0$. Niech $K(\Theta, \tilde{I}_0)$ będzie podzbiorem $M(\Theta, \tilde{I}_0)$ składającym się z miar probabilistycznych. Przez $e(K(\Theta, \tilde{I}_0))$ będę oznaczać zbiór punktów ekstremalnych zbioru $K(\Theta, \tilde{I}_0)$. Niech $\nu_{(x)}$ $(-\infty < x < 0)$ będzie miarą daną wzorem

$$\nu_{(x)} = A_x \delta_x, \tag{72}$$

gdzie

$$A_x = \left[\sum_{j=2}^{\infty} E\tau_{\Theta_j} \ldots E\tau_{\Theta_2}\delta_x((-\infty,0)) + \delta_x((-\infty,0))\right]^{-1}. \tag{73}$$

Niech $\mu_{(x)}(-\infty < x < 0)$ będzie miarą daną wzorem

$$\mu_{(x)}(B) = \sum_{j=2}^{\infty} E\tau_{\Theta_j} \ldots E\tau_{\Theta_2}\nu_{(x)}(B) + \nu_{(x)}(B), \tag{74}$$

dla $B \in \mathcal{B}(I_0)$. Niech $\mu_{(-\infty)} = \delta_{-\infty}$ and $\mu_{(0)} = \delta_0$.

Twierdzenie 53.
$$e(K(\Theta,\tilde{I}_0)) = \{\mu_{(x)} \colon x \in [-\infty, 0]\}.$$

**Twierdzenie o reprezentacji.** Przestrzeń miar probabilistycznych na $[-\infty,0]$ ze słabą zbieżnością jest zwartą przestrzenią metryzowalną. Rozważmy indukowaną topologię na $K(\Theta,\tilde{I}_0)$. Można sprawdzić, że $e(K(\Theta,\tilde{I}_0))$ jest domknięty, stąd zwarty, i w konsekwencji, $K(\Theta,\tilde{I}_0)$ też jest zwarty.

Będę stosować twierdzenie Choqueta o reprezentacji punktów zwartego wypukłego zbioru jako barycentrum punktów ekstremalnych [**130**, p. 17]. Wtedy, biorąc pod uwagę Twierdzenie 53, otrzymuję reprezentację dla miar $\mu$ is in $K(\Theta,\tilde{I}_0)$. Używając tej reprezentacji, otrzymuję kolejno reprezentacje miar $\mu \in K(\Theta, I_0)$, następnie $\mu \in M(\Theta, I_0)$, i ostatecznie otrzymuję wzór na reprezentację miary $\mu \in M(\Theta)$.

Twierdzenie 54. ([**R2**], **Th. 4.3**) *$\mu \in M(\Theta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu$ jest postaci*

$$\mu(du) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{j=2}^{\infty} E\tau_{\Theta_j} \ldots E\tau_{\Theta_2}\delta_x(u)du + \delta_x(u)du\right]\gamma(dx), \tag{75}$$

*gdzie $\gamma$ jest miarą borelowską $\mathbb{R}$. Ponadto, $\gamma$ jest wyznaczona jednoznacznie,*

$$\gamma = E\nabla_\Theta \mu. \tag{76}$$

**Przypadki szczególne.** Jako zastosowanie, rozważam Twierdzenie 54 w pewnych szczególnych przypadkach zmiennej losowej $\Theta$.

Twierdzenie 55. ([**R2**], **Th. 4.4**) *Mierze $\mu \in M(\Theta)$ odpowiada reprezentacja dana wzorem*

(i) $\mu(du) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\chi_{(x,\infty)}(u)du + \delta_x(u)du\right]\gamma(dx)$, *gdy $\Theta$ ma rozkład wykładniczy, $\Theta \sim Exp(1)$ i $\mu_\Theta(dh) = e^{-h}\chi_{(0,\infty)}(h)$,*

(ii) $\mu(du) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p}\delta_{x+k}(u)du\right]\gamma(dx)$, *gdy $P(\Theta = 0) = 1-p$ i $P(\Theta = 1) = p$ $(0 < p < 1)$,*

(iii) $\mu(du) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta_x(u)du + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}q^j p^{n-j}\delta_{x+n+j}(u)du\right]\gamma(dx)$, *gdy $P(\Theta = 1) = q$ i $P(\Theta = 2) = p$ $(0 < p < 1,\ q = 1-p)$,*

(iv) $\mu(du) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{j,k=0}^{\infty}q^j p^k\delta_{x+j+k\sqrt{2}}(u)du\right]\gamma(dx)$, *gdy $P(\Theta = 1) = q$ i $P(\Theta = \sqrt{2}) = p$ $(0 < p < 1,\ q = 1-p)$,*

*gdzie $\gamma$ jest miarą borelowską na $\mathbb{R}$.*

Wniosek 56. ([**R2**], **Rem. 4.5**) *Niech $\Theta$ będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym, $\Theta \sim Exp(1)$ i $\mu_\Theta(dh) = e^{-h}\chi_{(0,\infty)}(h)$. Biorąc $\gamma = \delta_0$ w Twierdzeniu 55(i), otrzymuję, że miara $\mu(du) = \chi_{(0,\infty)}(u)du + \delta_0(u)du$ należy do $M(\Theta)$. Na podstawie* (68) *implikuje to, że*

$$E\nabla_\Theta(\chi_{(0,\infty)}(u)du + \delta_0(u)du) \geqslant 0. \tag{77}$$

*Z drugiej strony, nietrudno jest sprawdzić, że nie istnieje $h > 0$ dla którego byłaby spełniona nierówność*

$$\nabla_h\left(\chi_{(0,\infty)}(u)du + \delta_0(u)du\right) \geqslant 0. \tag{78}$$

*Inaczej mówiąc istnieje zmienna losowa $\Theta$ (mianowicie $\Theta \sim Exp(1)$), dla której zachodzi* (77)*, jakkolwiek dla wszystkich $h > 0$, warunek* (78) *nie jest spełniony.*

## 3. Klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$

**Zrandomizowane operatory przesunięcia i różnicowy.** Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Przypomnijmy definicje zrandomizowanych operatorów przesunięcia i różnicowego $U$, $U^n$, $\Phi$ i $\Phi^n$ $(n \in \mathbb{N})$:

$$Uf(x) = U_\Theta f(x) = E\tau_\Theta f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{79}$$

$$\Phi f(x) = \Phi_\Theta f(x) = E\nabla_\Theta f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{80}$$

$$U^n f(x) = U^n_\Theta f(x) = U_{\Theta_n\ldots\Theta_1} f(x) = U_{\Theta_n}(U_{\Theta_{n-1}\ldots\Theta_1} f(x)), \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \tag{81}$$

$$\Phi^n f(x) = \Phi^n_\Theta F(x) = \Phi_{\Theta_n\ldots\Theta_1} f(x) = \Phi_{\Theta_n}(\Phi_{\Theta_{n-1}\ldots\Theta_1} f(x)), \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \tag{82}$$

gdzie $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ $(n \in \mathbb{N})$ są niezależnymi kopiami zmiennej losowej $\Theta$. Dla $n = 0$ definiujemy $U^0 f(x) = f(x)$ i $\Phi^0 f(x) \equiv 0$.

**Klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ – charakteryzacja.** Przypomnijmy definicje operatorów $J$ i $J^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Niech $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ będą niezależnymi kopiami zmiennej losowej $\Theta$ i niech $G \in Q$. Definiuję operator $J(G)$ następująco

$$J(G) = J_\Theta(G) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{\Theta_n\ldots\Theta_1} G = \sum_{n=0}^{\infty} U^n G. \tag{83}$$

Iterując (27), definiuję $J^n$

$$J^n(G) = J(J^{n-1}(G)), \tag{84}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$, definiując dodatkowo $J^0(G) = G$.

Twierdzenie 57. (**[R3], Th. 2.6**) *Niech $f \in Q$. Następujące zdania są równoważne:*

(i) $f \in \mathcal{W}(\Theta, Q)$,
(ii) $\Phi f \in Q$,
(iii) $(I - U)f \in Q$,
(iv) $f = Uf + G$, *gdzie* $G \in Q$,
(v)

$$f = J(G), \tag{85}$$

*gdzie $G \in Q$. Ponadto, funkcja $G$ jest jedyna*

$$G = \Phi f = (I - U)f. \tag{86}$$

Inaczej mówiąc, przy pomocy operatora $J$, ze wzoru (85), można otrzymywać funkcje z klasy $\mathcal{W}(\Theta, Q)$. Ponadto, dla danej funkcji $f \in \mathcal{W}(\Theta, Q)$, ze wzoru (86), otrzymuję funkcję $G$, która jest funkcją generującą. Stąd, możemy powiedzieć, że $f$ jest generowana przez funkcję $G$ i funkcję $G$ będziemy nazywać *generatorem* funkcji $f$. Operatory $J$ i $\Phi = I - U$ są operatorami wzajemnie odwrotnymi jeden do drugiego. Wzory (85) i (86) są bardzo użyteczne przy otrzymywaniu reprezentacji całkowej funkcji $f \in \mathcal{W}(\Theta, Q)$. Warunek (iv) charakteryzuje funkcję $f \in \mathcal{W}(\Theta, Q)$ w terminach tzw. rozkładalności funkcji $f$ w zbiorze $Q$, tzn. mówimy, że $f$ jest $U$-rozkładalna w zbiorze $Q$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $G \in Q$ taka, że $f = Uf + G$.

Twierdzenie 58. (**[R3], Lem. 2.7, Th. 2.8**) *Niech $n = 1, 2, \ldots$. Wtedy $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f = J^n(G_n), \tag{87}$$

*gdzie $G_n \in Q$. Funkcja $G_n$ jest jedyna*

$$G_n = \Phi^n f = (I - U)^n f. \tag{88}$$

Inaczej mówiąc, przy pomocy operatora $J^n$, ze wzoru (87), można otrzymywać funkcje z klasy $\mathcal{W}_n(\Theta, Q)$. Ponadto, dla danej funkcji $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$, ze wzoru (88), otrzymujemy funkcję $G_n$ która jest funkcją generującą. Stąd, można powiedzieć, że $f$ jest generowana przez funkcję $G_n$ i funkcję $G_n$ będziemy nazywać *generatorem* funkcji $f$. Operatory $J^n$ and $\Phi^n$ są operatorami wzajemnie odwrotnymi jeden do drugiego. Wzory (87) i (88) są bardzo użyteczne przy otrzymywaniu reprezentacji całkowej funkcji $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$. Z Twierdzenia 58 otrzymuję następujące cztery wnioski.

WNIOSEK 59. (**[R3], Cor. 2.9**) *Niech $n = 1, 2, \ldots$. Wtedy $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $G_1, G_2, \ldots, G_n \in Q$ takie, że $G_j = UG_j + G_{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $G_0 = F$. Ponadto, dla każdego $j = 0, 1, \ldots, n$ mamy*

a) $f = J^j G_j$,
b) $G_j = (I - U)^j f$,
c) $G_j = \Phi^j f$.
d) $G_{n-j} = J^j G_n$.

WNIOSEK 60. (**[R3], Cor. 2.10**) *Niech $n = 1, 2, \ldots$ and $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Wtedy $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, Q)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $G_j \in \mathcal{W}_{n-j}(\Theta, Q)$ taka, że*

$$f = J^j(G_j).$$

Inaczej mówiąc, każda $n$-krotnie $\Theta$-Wright wypukła funkcja $f$ jest $j$-krotnie $\Theta$-Wright wypukła ($j = 1, 2, \ldots, n-1$) z $(n-j)$-krotnie $\Theta$-Wright wypukłą funkcją generującą $G_j$.

WNIOSEK 61. (**[R3], Cor. 2.11**) *Niech $j, k = 0, 1, 2, \ldots$. Jeżeli $F \in \mathcal{W}_j(\Theta, Q)$ ma funkcję generującą $G_j$, taką że $G_j \in \mathcal{W}_k(\Theta, Q)$, to $F \in \mathcal{W}_{j+k}(\Theta, Q)$.*

WNIOSEK 62. (**[R3], Lem. 2.12**) *Niech $n = 1, 2, \ldots$, $d = 0, 1, \ldots$. Wtedy $f \in \mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_{d+1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} J^n \left( \frac{[(x-u)_+]^d}{d!} \right) dG(u),$$

*gdzie $G \in \mathcal{M}_1$.*

### 4. Klasa $\mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_1)$. Przypadek wykładniczy, $\Theta \sim \mathbf{Exp}(1)$

Zakładam, że $\Theta$ ma rozkład wykładniczy, $\Theta \sim \mathrm{Exp}(1)$,

$$\mu_\Theta(dh) = e^{-h}\chi_{(0,\infty)}(h)dh.$$

Z definicji operatora $J$, po pewnych obliczeniach, otrzymuję następujący lemat.

LEMAT 63.

*E1.* $J_{Exp(1)}(\chi_{(0,\infty)}(x)) = \chi_{(0,\infty)}(x) + x_+$,
*E2.* $J_{Exp(1)}\left(\frac{x_+^n}{n!}\right) = \frac{x_+^n}{n!} + \frac{x_+^{n+1}}{(n+1)!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,
*E3.* $U_{Exp(1)}(x_+ + \chi_{(0,\infty)}(x)) = x_+$,
*E4.* $U_{Exp(1)}\left(\frac{x_+^{n+1}}{(n+1)!}\right) = \frac{x_+^{n+1}}{(n+1)!} - U_{Exp(1)}\left(\frac{x_+^n}{n!}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

W dalszym ciągu będę często używać następującego technicznego lematu dotyczącego ciągów rzeczywistych. Niech $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Definiuję ciąg $\{Ry_j\}_{j=0}^{\infty}$

$$R(y_j) = y_j + y_{j+1} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ponadto, indukcyjnie, definiuję ciągi $\{R^n(y_j)\}_{j=0}^{\infty}$, $n = 1, 2, \ldots$, wzorem $R^n(y_j) = R(R^{n-1}(y_j))$ ($j = 0, 1, 2, \ldots$), z konwencją, że $R^0(y_j) = y_j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots$).

LEMAT 64. (**[R3], Lem. 3.1**)

$$R^n(y_j) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y_{j+k} \quad (n = 1, 2, \ldots, j = 0, 1, 2, \ldots)$$

Z Lematu 64 z $R^n = J^n_{\mathrm{Exp}(1)}$ i biorąc pod uwagę przykład E2, otrzymuję następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 65. (**[R3], Th. 3.2**)

$$J^n_{Exp(1)}(\chi_{(0,\infty)}(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x_+^k}{k!} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{89}$$

Oznaczam

$$K_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x_+^k}{k!}\quad (n=1,2,\ldots). \tag{90}$$

Zgodnie z Twierdzeniem 58, $f\in\mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1),\mathcal{M}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f=J^n_{\mathrm{Exp}(1)}(G_n)$, gdzie $G_n=(I-U_{\mathrm{Exp}(1)})^n f=\Phi^n_{\mathrm{Exp}(1)}f\in\mathcal{M}_1$. Dalej, pisząc funkcję $G_n$ w postaci $G_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(0,\infty)}(x-u)dG_n(u)$ $(x\in\mathbb{R})$, z Twierdzenia 65, otrzymuję twierdzenie o reprezentacji funkcji z klasy $\mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1),\mathcal{M}_1)$.

Twierdzenie 66. (**[R3], Th. 3.3**) *Niech* $n=1,2,\ldots$. *Wtedy* $f\in\mathcal{W}_n(Exp(1),\mathcal{M}_1)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}K_n(x-u)dG_n(u)\quad (x\in\mathbb{R}), \tag{91}$$

*gdzie* $G_n\in\mathcal{M}_1$. *Ponadto, powyższa funkcja* $G_n$ *jest jedyna*

$$G_n=(I-U_{Exp(1)})^n f=\Phi^n_{Exp(1)}f. \tag{92}$$

Następnym etapem mojej analizy jest zbadanie własności operatora $U^n_{\mathrm{Exp}(1)}$. Stosując Lemat 64 z $U^{-1}_{\mathrm{Exp}(1)}$ zamiast $R$, biorąc pod uwage przykład E2 i na podstawie Twierdzenia 57 otrzymuję następujący lemat.

Lemat 67. (**[R3], Lem. 3.5**)

$$U^n_{Exp(1)}(K_n(x))=\frac{x_+^n}{n!}\quad (n=1,2,\ldots).$$

Z Twierdzeń 58, 66, Lematu 67 i biorąc pod uwagę wzór (17) o reprezentacji $(n+1)$-krotnie monotonicznej funkcji, otrzymuję następujące twierdzenie.

Twierdzenie 68. (**[R3], Th. 3.6**) *Niech* $n=1,2,\ldots$. *Jeżeli* $f\in\mathcal{W}_n(Exp(1),\mathcal{M}_1)$, *to* $U^n_{Exp(1)}f\in\mathcal{M}_{n+1}$. *Ponadto, jeżeli* $f=J^n_{Exp(1)}(G)$, *gdzie* $G\in\mathcal{M}_1$, *wtedy* $U^n_{Exp(1)}f=I_n(G)$, *gdzie*

$$I_n(G)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-u)_+^n}{n!}dG(u).$$

Innymi słowami, jeżeli funkcja $f$ jest $n$-krotnie wykładniczo Exp(1)-Wright-wypukła względem $\mathcal{M}_1$, wtedy funkcja $U^n_{\mathrm{Exp}(1)}f\in\mathcal{M}_{n+1}$ (tzn. jest ona $(n+1)$-krotnie monotoniczna). Ponadto $f=J^n_{\mathrm{Exp}(1)}(G)$ i $U^n_{\mathrm{Exp}(1)}f=I_n(G)$ z ta samą funkcją generującą $G$.

W następnym twierdzeniu pokazuję, że funkcja $f\in\mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1),\mathcal{M}_1)$ może być reprezentowana jako suma pewnych funkcji generowanych przez funkcję z klasy $\mathcal{M}_{n+1}$.

Twierdzenie 69. (**[R3], Th. 3.9**) *Niech* $f\in\mathcal{M}_1$ *i niech* $n=1,2,\ldots$. *Wtedy* $f\in\mathcal{W}_n(Exp(1),\mathcal{M}_1)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja* $H\in\mathcal{M}_{n+1}$ *taka, że*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H^{(k)}(x). \tag{93}$$

Inaczej mówiąc, funkcja $f\in\mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1),\mathcal{M}_1)$ może być otrzymana przy pomocy dwóch wzorów, ze wzoru (91) z funkcją generującą $G_n\in\mathcal{M}_1$ jak również ze wzoru (93) z funkcją generującą $H\in\mathcal{M}_{n+1}$.

## 5. Klasa $\mathcal{W}_\infty(\Theta,\mathcal{M}_1)$. Przypadek wykładniczy $\Theta\sim\mathbf{Exp}(1)$

Przechodzę teraz do opisania klasy $\mathcal{W}_\infty(\Theta,Q)$ funkcji *całkowicie* $\Theta$-*Wright-wypukłych* zdefiniowanej jako

$$\mathcal{W}_\infty(\Theta,Q)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{W}_n(\Theta,Q).$$

Dowodzę, że w przypadku $\Theta\sim\mathrm{Exp}(1)$ klasa ta pokrywa się z klasą funkcji całkowicie monotonicznych.

Twierdzenie 70. (**[R3], Th. 4.1**)

$$\mathcal{W}_\infty(Exp(1),\mathcal{M}_1)=\mathcal{M}_\infty.$$

## 6. Klasa $\mathcal{W}_n(\Theta,\mathcal{M}_j)$. Przypadek wykładniczy, $\Theta \sim \mathbf{Exp}(1)$

Zwyczajowo, będę oznaczać pochodną dystrybucyjną przez by $f'$ i punktową pochodną jako $f'(x)$ (patrz [**157**], [**160**]). Niech $\mathcal{M}_0 = \{f' \colon f \in \mathcal{M}_1\}$. Ponieważ $\mathcal{M}_1$ składa się z funkcji niemalejących, $\mathcal{M}_0$ składa się z nieujemnych dystrybucji pierwszego rzędu. Będę teraz badać własności klasy $\mathcal{W}_n(\Theta,\mathcal{M}_1)$ $(n=1,2,\ldots)$. Z Wniosku 59, funkcja $f \in \mathcal{W}_n(\Theta,\mathcal{M}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \mathcal{M}_1$ takie, że $G_j = UG_j + G_{j+1}$, $j = 0,1,\ldots,n-1$ $(G_0 = f)$. Równoważnie, $f \in \mathcal{W}_n(\Theta,\mathcal{M}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$G_k = \Phi^k f = E\nabla_{\Theta_1,\ldots,\Theta_k} f \in \mathcal{M}_1 \quad (k=1,2,\ldots,n). \tag{94}$$

Zapisując to w terminach operatorów różnicowych otrzymuję, że $f \in \mathcal{W}_n(\Theta,\mathcal{M}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\nabla_h E\nabla_{\Theta_1\ldots\Theta_k} f \geqslant 0, \quad h>0, k=1,2,\ldots,n. \tag{95}$$

Oczywiście (95) jest równoważne $E\nabla_{\Theta_1,\ldots,\Theta_k}\nabla_h f \geqslant 0$, co jest z kolei równoważne

$$E\nabla_{\Theta_1\ldots\Theta_k} f' \geqslant 0, \quad k=1,2,\ldots,n. \tag{96}$$

Dalej, ponieważ (94) jest równoważne (96), otrzymuję następujące twierdzenie.

Twierdzenie 71. ([**R3**], **Th. 5.1**)

$$f \in \mathcal{W}_n(\Theta,\mathcal{M}_1) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } f' \in \mathcal{W}_n(\Theta,\mathcal{M}_0).$$

Niech

$$K_{n,j}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x_+^{k+j}}{(k+j)!},$$

$n=1,2,\ldots$, $j=-1,0,1,2,\ldots$, z konwencją, że $x_+^{-1}/(-1)! = \delta_0(x)$. Oczywiście $K_{n,0}(x) = K_n(x)$.

W następnym twierdzeniu podaję reprezentację całkową funkcji z klasy $\mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1),\mathcal{M}_j)$ dla dowolnego $j=0,1,2,\ldots$.

Twierdzenie 72. ([**R3**], **Th. 5.2**) *Niech $n=1,2,\ldots$, $j=0,1,2,\ldots$. Wtedy $f \in \mathcal{W}_n(Exp(1),\mathcal{M}_j)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{n,j-1}(x-u)\,dG(u), \tag{97}$$

*gdzie $G \in \mathcal{M}_1$. Ponadto, $G(x) = [(I-U_{Exp(1)})^n f(x)]^{(j-1)}$ dla $j=1,2,\ldots$, oraz $G(x) = (I-U_{Exp(1)})^n f(x)$ dla $j=0$.*

Wniosek 73. ([**R3**], **Cor. 5.3**) *Niech $n=1,2,\ldots$, $j=0,1,2,\ldots$. Wtedy*

(i) *$f \in \mathcal{W}_n(Exp(1),\mathcal{M}_{j+1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f' \in \mathcal{W}_n(Exp(1),\mathcal{M}_j)$,*
(ii) *$f \in \mathcal{W}_n(Exp(1),\mathcal{M}_{j+1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{(j)} \in \mathcal{W}_n(Exp(1),\mathcal{M}_1)$,*
(iii) *$\mathcal{W}_\infty(Exp(1),\mathcal{M}_j) = \mathcal{M}_\infty$.*

Uwaga 74. ([**R3**], **Rem. 5.4**) Z Twierdzenia 72 wynika, że funkcja $f \in \mathcal{W}_n(\mathrm{Exp}(1),\mathcal{M}_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f$ jest postaci

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \delta_0(x-u) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-u)_+^k/k! \right) dG(u),$$

gdzie $G \in \mathcal{M}_1$. Ponadto $G = (I-U_{\mathrm{Exp}(1)})^n$. Z definicji, $f \in \mathcal{W}_n(\Theta,\mathcal{M}_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Phi_\Theta^k f(x) = E\nabla_{\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_k} f(x) \geqslant 0, \quad k=1,2,\ldots,n, \tag{98}$$

gdzie $\Theta_1,\Theta_2,\ldots,\Theta_n$ są niezależnymi kopiami $\Theta$. Z kolei, funkcja $f$ jest $(k-1)$-krotnie Wright-wypukła $(k=2,\ldots,n)$, gdy

$$\nabla_{h_1\ldots h_k} f(x) \geqslant 0, \quad h_1,\ldots,h_k > 0. \tag{99}$$

Nierówności (98) i (99) sugerują, że można nazwać funkcję $f$ spełniającą (98) funkcją $(n-1)$-*krotnie Wright-wypukłą losowo względem zmiennej losowej* $\Theta$.

Ustalmy $u \in \mathbb{R}$. Można pokazać, że nie istnieją $h_1,h_2,\ldots,h_n > 0$ dla których

$$\nabla_{h_1\ldots h_k} \left( \delta_0(x-u) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-u)^k/k! \right) \geqslant 0 \quad (x \in \mathbb{R},\ k=1,2,\ldots,n).$$

Ale zachodzą nierówności

$$E\nabla_{\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_k}\left(\delta_0(x-u)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(x-u)^k/k!\right) \geqslant 0 \quad (k=1,2,\ldots,n),$$

gdzie $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ są niezależnymi kopiami $\Theta \sim \mathrm{Exp}(1)$. Inaczej mówiąc, dystrybucja (funkcja uogólniona) $\delta_0(x-u)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(x-u)_+^k/k$ jest $(n-1)$-krotnie Wright-wypukła losowo względem zmiennej losowej $\Theta \sim \mathrm{Exp}(1)$, ale nie jest $(n-1)$-krotnie Wright wypukła.

## 7. Klasa $\tilde{\mathcal{W}}_n(\tilde{\Theta}, \mathcal{M}_1((-\infty, 0))$. Przypadek multiplikatywny

Można zauważyć, że wyniki otrzymane w poprzedniej części, dotyczące $\Theta$-Wright wypukłości można zastosować, z niewielką modyfikacją, do przypadku multiplikatywnego. W tej części będziemy zajmować się reprezentacją całkową mulltiplikatywnie wypukłych funkcji.

Niech $\tilde{\Theta}$ będzie zmienną losową skoncentrowaną na $(0,1]$. Mówimy, że funkcja $H \in \mathcal{M}_1(($-$\infty, 0))$ jest *multiplikatywnie* $\tilde{\Theta}$*-Wright-wypukła względem klasy* $\mathcal{M}_1((-\infty,0))$, gdy

$$\begin{aligned} H(u) &= \tilde{U}H(u)+\tilde{G}(u), \\ \tilde{U}H(u) &= \tilde{U}_{\tilde{\Theta}}H(u) = \int_0^1 H\left(\frac{u}{c}\right)\mu_{\tilde{\Theta}}(dc), \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{G} \in \mathcal{M}_1((-\infty, 0))$. Multiplikatywna $n$-krotna $\tilde{\Theta}$-Wright wypukłość może być zdefiniowana analogicznie. Niech $\tilde{\mathcal{W}}_n(\tilde{\Theta}, \mathcal{M}_1(-\infty, 0))$ $(n=1,2,\ldots,\infty)$ będzie klasą $n$-krotnie $\tilde{\Theta}$-Wright-wypukłych funkcji. Definiujemy $\tilde{\mathcal{W}}(\tilde{\Theta}, \mathcal{M}_1(-\infty,0)) = \tilde{\mathcal{W}}_1(\tilde{\Theta}, \mathcal{M}_1(-\infty,))$.

Uwaga 75. (**[R3], Rem. 6.1**) Niech $\Theta$ będzie rzeczywistą zmienną losową z rozkładem $\mu_\Theta$ skoncentrowanym na $(0,\infty)$ i niech $F \in \mathcal{W}(\Theta, \mathcal{M}_1)$. Wtedy $F(x)$ jest postaci

$$F(x) = \int_0^\infty F(x-h)\mu_\Theta(dh)+G(x), \tag{100}$$

gdzie $G(x) \in \mathcal{M}_1$. Niech $x=-\ln u$ $(u<0)$, $h=-\ln c$ $(0<c\leqslant 1)$, $\tilde{F}(u) = F(-\ln(-u))$, $\tilde{G}(u) = G(-\ln(-u))$ i $\tilde{\Theta} = e^{-\Theta}$. Wtedy, $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{W}}(\tilde{\Theta}, \mathcal{M}_1((-\infty,0)))$ i zachodzi wzór

$$\tilde{F}(u) = \int_0^1 \tilde{F}\left(\frac{u}{c}\right)\mu_{\tilde{\Theta}}(dc)+\tilde{G}(u) \quad (u<0). \tag{101}$$

Ponadto, jeżeli $F \in \mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_1)$ $(n=1,2,\ldots)$, to $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{W}}(\tilde{\Theta}, \mathcal{M}_1((-\infty,0)))$.

Odwrotnie, jeżeli $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{W}}(\tilde{\Theta}, \mathcal{M}_1((-\infty,0)))$ spełnia (101), to dla $F(x) = \tilde{F}(-e^{-x}) \in \mathcal{W}(\Theta, \mathcal{M}_1)$, $G(x) = \tilde{G}(-e^{-x})$, $\Theta = -\ln\tilde{\Theta}$, jest spełniona równość: (100).

Ponadto, jeżeli $\Theta \sim \mathrm{Exp}(1)$, to $\tilde{\Theta} = e^{-\Theta}$ ma rozkład jednostajny na $(0,1)$, $\tilde{\Theta} \sim U(0,1)$. Odwrotnie, jeżeli $\tilde{\Theta} \sim U(0,1)$, to $\Theta = -\ln\tilde{\Theta} \sim \mathrm{Exp}(1)$.

Z Twierdzeń 66 i 70 otrzymuję następujące dwa twierdzenia o reprezentacji funkcji z klas $\tilde{\mathcal{W}}_n$ i $\tilde{\mathcal{W}}_\infty$, odpowiednio.

Twierdzenie 76. (**[R3], Th. 6.2**) *Niech $n=1,2,\ldots$. Funkcja $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{W}}(U(0,1), \mathcal{M}_1((-\infty,0)))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{F}$ ma reprezentację*

$$\tilde{F}(u) = \int_{-\infty}^0 \tilde{K}_n\left(\frac{u}{s}\right)d\tilde{G}(s),$$

*gdzie*

$$\begin{aligned} \tilde{K}_n\left(\frac{u}{s}\right) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\left[\left(-\ln\frac{u}{s}\right)_+\right]^k}{k!}, \\ \tilde{G}(s) &\in \mathcal{M}_1((-\infty,0)). \end{aligned}$$

*Ponadto, mamy równość $\tilde{G} = (I-\tilde{U})^n\tilde{F}$.*

Twierdzenie 77. (**[R3], Th. 6.3**) *$\tilde{F}(u) \in \tilde{\mathcal{W}}_\infty(U(0,1), \mathcal{M}((-\infty,0)))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{F}$ może być zapisana w postaci*

$$\tilde{F}(u) = \int_0^\infty (-u)^{-t}\gamma(dt), \quad u<0,$$

*gdzie $\gamma$ jest miarą na $(0,\infty)$.*

## 8. Klasa $\mathcal{W}_n(\Theta, \mathcal{M}_1)$. Przypadek dyskretny

Zakładam teraz, że zmienna losowa $\Theta = X_p$ ma rozkład arytmetyczny

$$\mu_{X_p} = q\delta_0 + p\delta_1 \quad (0 < p < 1, q = 1 - p).$$

W [**R3**] otrzymuję następujące dwa twierdzenia o reprezentacji funkcji z klas $\mathcal{W}_n$ i $\mathcal{W}_\infty$.

Twierdzenie 78. ([**R3**], **Th. 7.1**) *Niech $n = 1, 2, \dots$ i $\mu_{X_p} = q\delta_0 + p\delta_1$ $(0 < p < 1,\ q = 1 - p)$. Wtedy*

(i) *$f \in \mathcal{W}_n(X_p, \mathcal{M}_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} C_{j,n} \delta_j(x - u) dG(u), \tag{102}$$

*gdzie $G \in \mathcal{M}_1$ i $C_{j,n}$, $j = 0, 1, 2, \dots$ są dane jako*

$$\begin{aligned} C_{j,1} &= 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \\ C_{j,n} &= \frac{(j+1)(j+2)\dots(j+n-1)}{(n-1)!}, \quad n = 2, 3, \dots, j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{103}$$

(ii) *$f \in \mathcal{W}_\infty(X_p, \mathcal{M}_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = \int_{-1}^{0} \int_{0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{t(j+u)} \delta_{j+u}(x) \nu_u(dt) \lambda(du),$$

*gdzie $\nu_u(dt)\lambda(du)$ $(-1 < u \leqslant 0,\ t > 0)$ jest miarą borelowską na $(-1, 0] \times (0, \infty)$.*

Twierdzenie 79. ([**R3**], **Th. 7.4**) *Niech $n = 1, 2, \dots$ i $\mu_{X_p} = q\delta_0 + p\delta_1$ $(0 < p < 1,\ q = 1 - p)$. Wtedy*

(i) *$F \in \mathcal{W}_n(X_p, \mathcal{M}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} C_{j,n} (x - j - u)_+ dG(u),$$

*gdzie $G(u) \in \mathcal{M}_1$ i $C_{j,n}$ są dane wzorem* (103).

(ii) *$F \in \mathcal{W}_\infty(X_p, \mathcal{M}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$F(x) = \int_{-1}^{0} \int_{0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{t(j+u)} (x - j - u)_+ \nu_u(dt) \lambda(du),$$

*gdzie $\nu_u(dt)\lambda(du)$ jest miarą borelowską na $(-1, 0] \times (0, \infty)$.*

Z Twierdzeń 78 i 79 otrzymuję następujący wniosek.

Wniosek 80.

$$\mathcal{W}_\infty(X_p, \mathcal{M}_0) \supsetneq \mathcal{M}_\infty$$
$$\mathcal{W}_\infty(X_p, \mathcal{M}_1) \supsetneq \mathcal{M}_\infty$$

Uwaga 81. ([**R3**], **Rem. 8.7**) Mogłoby być interesujące wiedzieć, czy równość $\mathcal{W}_\infty(X, \mathcal{M}_j) = \mathcal{M}_\infty$ pozostaje prawdziwa, gdy $X$ ma rozkład dyskretny, ale niearytmetyczny, na przykład, gdy $P(X = 1) = p$ i $P(X = \sqrt{2}) = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

ROZDZIAŁ 6

# Krótkie omówienie pozostałych wyników niewchodzących w skład rozprawy

### Uogólnienia funkcji wypukłych

Problemy dotyczące uogólnień funkcji wypukłych są badane w pracach [**R1, R2, R3, R4, R5**] , które są włączone do rozprawy, oraz w pracach [**P21, P23, P25, P26, P27**].

W pracy [**P21**] jest podana probabilistyczna charakteryzacja silnej wypukłości jak również jej geometryczna charakteryzacja. Jedną z najbardziej znanych i elementarnych jest następująca nierówność Jensena

$$E\big[f(X)\big] \geqslant f\big(E[X]\big),$$

gdzie $f$ jest funkcją wypukłą, określoną na zbiorze wypukłym, zawartym w zbiorze wartości zmiennej losowej $X$ (patrz [**16**]). Nierówność ta daje probabilistyczną charakteryzację funkcji wypukłych i może być przepisana w postaci

$$E\big[f(X)\big] - f\big(E[X]\big) \geqslant 0,$$

gdzie lewa strona nierówności jest tzw. *Jensen gapem* funkcji $f$. W [**P21**], dowodzimy,że dla funkcji $\varphi$ silnie wypukłej z modułem $c > 0$ mamy następującą nierówność

$$E[\varphi(X)] - \varphi\big(E[X]\big) \geqslant c\, D^2[X],$$

gdzie $D^2[X]$ jest wariancją zmiennej losowej $X$. Inaczej mówiąc, Jensen gap funkcji silnie wypukłej z modułem $c$ jest nie mniejszy niż wariancja zmiennej losowej $X$ pomnożona przez $c$. Używając tej charakteryzacji, otrzymane są pewne nierówności typu Jensena, które są również udowodnione w [**105**] przy użyciu technik podparciowych. Praca [**P21**] jest cytowana w pracach: S. Abramovich, S. Ivelić i J. Pečarić (2012) [**2**], F. C. Mitroi (2012) [**117**] oraz N. Merentes i K. Nikodem (2012) [**106**].

W pracy [**P23**] są wprowadzone i badane funkcje silnie wypukłe w sensie Schura oraz funkcje generujące sumy silnie wypukłe w sensie Schura. Otrzymane wyniki są odpowiednikami klasycznego twierdzenia Hardy-Littlewood-Pólya o majoryzacji [**52**] i twierdzenia Ng'ego [**119**] charakteryzującego funkcje wypukłe w sensie Schura. Pojęcie Schur-wypukłości i funkcji generujących Schur-wypukłe sumy zostało wprowadzone przez Schura [**156**] (por. też [**100, 52, 75**]). W 1987 C.T. Ng [**119**] podał pełną charakteryzację funkcji generujących Schur-wypukłe sumy. Pojęcia silnej wypukłości, silnej-Jensen wypukłości oraz silnej Wright-wypukłości były inspirowane przez teorię optymizacji i w literaturze można znaleźć wiele ich własności i przykładów ich zastosowań (patrz np. [**3, 54, 135, 141, 106, P21**]). My dowodzimy, że funkcje silnie wypukłe generują sumy silnie Schur-wypukłe, oraz że funkcje generujące silnie Schur wypukłe sumy są silnie Jensen-wypukłe. Podajemy kontrprzykład na to, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Dowodzimy, że silna Jensen-wypukłość jest warunkiem koniecznym, żeby funkcja generowała sumy silnie Schur-wypukłe. Charakteryzujemy również funkcje generujące sumy silnie Schur-wypukłe, bez żadnych dodatkowych warunków regularnościowych. Praca [**P23**] jest cytowana w pracy M. Castilla, N. Merentesa i J.L. Sáncheza [**25**].

Wiele wyników dotyczących względnej wypukłości można znaleźć w [**24, 34, 120, 121, 129, 76, 8, 137, 124, 125, 129, 77, 76, 141**], między innymi. W pracy [**P25**] badam dwa typy względnej wypukłości funkcji $f$ i $g$. Mówimy, że $f$ jest wypukła względem $g$ w sensie Palmera (patrz Palmer(2002,2003) [**124, 125**]), gdy $f$ jest postaci $f = h(g)$, gdzie $h$ jest jakąś ściśle rosnącą funkcją wypukłą, i oznaczamy to jako $f{\succ_{(1)}}g$. Podobnie, jeśli $f$ jest wypukła względem $g$ w sensie badanym w Rajba (2011)[**R1**], to znaczy wtedy, gdy $f - g$ jest wypukła to oznaczamy to przez $f{\succ_{(2)}}g$. Relacja względnej wypukłości $\succ_{(2)}$ funkcji $f$ względem funkcji $g(x) = cx^2$ oznacza zwykłą silną wypukłość funkcji $f$. Podaję charakteryzacje, jak również badam związki zachodzące między tymi dwoma rodzajami względnej wypukłości. Charakteryzuję je bez żadnych dodatkowych założeń o dwukrotnej różniczkowalności funkcji $f$ i $g$, zarówno w języku pochodnych prawostronnych tych funkcji jak również pochodnych dystrybucyjnych. Otrzymuję również ich probabilistyczne charakteryzacje. Podaję uogólnienie silnej wypukłości funkcji i otrzymuję pewne nierówności typu Jensena.

W pracy [**P26**], używając lematu Ohlina [**126**] o wypukłym stochastycznym porządku, otrzymuję prosty dowód znanych nierówności typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra. Podaję również nowe nierówności. Wykorzystując własności $s$-wypukłego stochastycznego porządku [**29**], podaję również pewne nierówności typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra w przypadku funkcji wypukłych wyższych rzędów. Otrzymane wyniki są użyteczne przy badaniu nierówności między operatorami kwadraturowymi [**183**], [**184**].

W pracy [**P27**] podaję reprezentację całkową funkcji $f$ delta-wypukłych $n$-tego rzędu (wprowadzonych przez R. Gera (1994)) w [**39**]), które mogą być przedstawione w postaci różnicy dwóch $n$-wypukłych funkcji. Moja reprezentacja jest prawdziwa bez żadnych dodatkowych założeń o funkcji $f$, i uogólnia ona znane wyniki o reprezentacji funkcji delta-wypukłej (patrz np. Roberts i Varberg (1973) [**141**]). Dalej, reprezentację tę stosuję do otrzymania pewnej przydatnej charakteryzacji funkcji kontrolnych odpowiadających funkcji $f$, do zdefiniowania kanonicznego rozkładu funkcji $f$, do dowodu istnienia i do zbadania własności minimalnej funkcji kontrolnej związanej z funkcją $f$ (co uogólnia charakteryzację Hartmana (1959) [**50**] minimalnej funkcji kontrolnej związanej z delta-wypukłą funkcją), oraz do zdefiniowania i zbadania silnej delta-wypukłości $n$-tego rzędu, która uogólnia silną $n$-wypukłość zdefiniowaną i badaną w pracach Rajba (2011) [**R1**], i Ger i Nikodem (2011) [**40**]. Proponuję również pewne użyteczne narzędzia do otrzymywania nierówności typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów, które uogólniają znane nierówności Dragomira i in. (2002) [**33**]. Wyniki te stosuję następnie do otrzymywania pewnych nierówności pomiędzy operatorami kwadraturowymi dla funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów.

### c-rozkładalność miar probabilistycznych

Problemy dotyczące $c$-rozkładalności miar probabilistycznych są badane w pracach [**P1, P2, P3, P5, P8, P9, P10, P15, P16, P18, P19**].

Niech $c \in \mathbb{R}$. Mówimy, że zmienna losowa $X$ (albo, że jej rozkład $P = \mathcal{L}(X)$) jest *$c$-rozkładalna* ($c$-rozkładalny), gdy

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(cX + X_c), \tag{104}$$

gdzie $X_c$ jest zmienną losowa niezależna od $X$. $L_c$ jest rodziną wszystkich $c$-rozkładalnych rozkładów, gdzie $|c| < 1$. Pisząc powyższą równość w języku funkcji charakterystycznych, otrzymujemy, że funkcja charakterystyczna $\varphi$ jest *$c$-rozkładalna*, gdy jest postaci

$$\varphi(t) = \varphi(ct)\varphi_c(t), \tag{105}$$

gdzie $\varphi_c$ jest funkcją charakterystyczną. Mówimy, że $\varphi$ jest *$C$-rozkładalna*, lub $\varphi \in L_C$, gdzie $C \subset \mathbb{R}$, gdy $\varphi$ jest $c$-rozkładalna dla każdego $c \in C$.

Samorozkładalność może być zdefiniowana jako własność rozkładalności miar probabilistycznych. Mówimy, że zmienna losowa $X$, lub, że jej rozkład $P = \mathcal{L}(X)$, jest *samorozkładalna* (samorozkładalny), gdy $X$ jest $c$-rozkładalna dla każdego $0 < c < 1$.

Historycznie, uważa się rok 1937, rok w którym Lèvy opublikował pracę o *klasie* $L$, znanej również jako klasa Lèvyégo $L$ (patrz [**86**]), jako początek badań $c$-rozkładalności rozkładów. Klasa $L$ pojawia się w rachunku prawdopodobieństwa jako rozwiązanie centralnego problemu granicznego. To jest dokładnie klasa granicznych rozkładów znormalizowanych sum częściowych niezależnych (niekoniecznie jednakowo rozłożonych) zmiennych losowych,

$$b_n^{-1}(X_1 + \ldots + X_n) - a_n, \tag{106}$$

gdzie $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$, $b_n^{-1}X_k$ ($k = 1, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$) tworzą jednostajnie infinitezymalną macierz trójkątną. Problem scharakteryzowania takiej klasy został zaproponowany przez A. Ya. Khintchina w 1936 r., i rozwiązany przez P. Lèvyégo ([**86**]). Udowodnił on, że miara należy do $L$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest samorozkładalna. Klasę $L$ można opisać w języku funkcji charakterystycznych ( patrz [**86**] p.319, [**91**] p. 195). Inna charakteryzacja klasy $L$ została podana w pracach [**170**], [**70**], [**71**], [**64**]. Uogólnienia klasy $L$-rozkładów na przestrzenie Euklidesowe wyższych wymiarów zostało wprowadzone w pracy Urbanika w 1969 [**171**]. Następnie Sato [**151**], [**152**] zajmował się ich reprezentacjami oraz ich podklas. Kumar i Schreiber [**80**], [**82**] otrzymali inne reprezentacje pewnych podklas klasy $L$-rozkładów na przestrzeniach Banacha.

Klasy $L$-rozkładów znalazły wiele zastosowań, patrz np. Barndorff-Nielsen and Shephard (2001) [**7**] i bibliografia tam podana. Loève (1945) [**90**] był pierwszym , który rozważał $C$-rozkładalność w *monotetycznym* przypadku $C = \{c^k : k = 0, 1, 2, \ldots\} \cup \{0\}$, $c \in (0, 1)$, tzw $c$-rozkładalność. Opisał on $c$-rozkładalny rozkład jako rozkład graniczny ciągu unormowanych sum, jak również jako rozkład pewnego szeregu niezależnych zmiennych losowych.

FAKT 82 (Loève (1945), (1955) [**90**], [**91**]). Niech $c \in (0, 1)$, $C = \{c^k : k = 0, 1, 2, \ldots\} \cup \{0\}$ i niech $P$ będzie miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}$.

a) $P \in L_c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P$ jest granicznym rozkładem ciągu unormowanych sum danych przez (106), gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$, $n \geq 1$ i $\lim_{n\to\infty} b_{n+1}^{-1} b_n = c$,

b) $P \in L_c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P$ jest rozkładem szeregu postaci

$$\sum_{j\geq 0} c^j Y_j, \tag{107}$$

gdzie $Y_0, Y_1, \ldots$ są niezależnymi jednakowo rozłożonymi zmiennymi losowymi i szereg jest zbieżny według rozkładu.

Na podstawie (107) wnioskujemy, że rozkład zmiennej losowej $Y_0$ jest generatorem rozkładu $P$, $c$-rozkładalnego. Pisząc (107) w terminach funkcji charakterystycznych wnioskujemy, że $\varphi \in L_c$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja charakterystyczna $\varphi_c$ taka, że $\varphi$ jest postaci

$$\varphi(t) = \prod_{k=0}^{\infty} \varphi_c(c^k t). \tag{108}$$

Z powyższego wzoru mamy, że $\varphi_c$ jest *generatorem* $c$-rozkładalnej funkcji charakterystycznej $\varphi$. Misheikis (1972) [**111**] badał następny problem, rozważając przypadek granic bez zakładania jednostajnej infinitezymalności. Udowodnił on wersję Faktu 82(a) dla dowolnej (niekoniecznie monotetycznej) $C$, i w wielu pracach również uogólnił wyniki na wielowymiarowe przestrzenie (patrz Misheikis (1972, 1974, 1975, 1976, 1983) [**110**]. W innym kontekście, Grincevičius (1974) [**48**] pokazał, że szereg w Fakcie 82(b) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $E(\log(1+|Y_0|) < \infty$, i że jego rozkład musi być albo absolutnie ciągły, albo singularny ciągły (względem miary Lebesgue'a). Zakusilo (1976, 1977, 1978) niezależnie udowodnił te wyniki w [**194**], [**195**], [**196**] . Uogólnił on wyniki zbieżnościowe na przestrzenie Euklidesowe, a Wolfe (1983) [**191**] uogólnił wyniki o ciągłości na przestrzenie Euklidesowe. Zakusilo w 1976 [**194**] udowodnił własność ciągłości klas $L_c$, gdzie $0 < |c| < 1$. Ja uogólniłam w Rajba (2001) [**P9**] jego wyniki na przypadek $|c| < 1$.

Urbanik (1975) w [**174**] wprowadził pojęcie *półgrupy rozkładalności* $D(P)$ związanej z miarą probabilistyczną $P$ jako zbioru wszystkich liczb rzeczywistych $c$ dla których $P$ jest $c$-rozkładalna. Zostało również udowodnione, że pewne probabilistyczne własności miar odpowiadają algebraicznym i topologicznym własnościom ich półgrup rozkładalności. Dla dowolnej $P$, $D(P)$ jest domkniętą multiplikatywną podpółgrupą prostej $\mathbb{R}$ zawierającą 0 and 1. Ponadto, dla każdej niezdegenerowanej $P$, $D(P)$ jest zwartą podpółgrupą półgrupy $[-1, 1]$.

Urbanik rozważał problem, czy te warunki charakteryzują półgrupy rozkładalności spośród wszystkich zwartych półgrup. Pewne nietrywialne przykłady półgrup rozkładalności zostały podane w pracach Urbanik (1976) [**175**], Iljinskij (1978) [**58**], Niedbalska (1978) [**P1**], Niedbalska-Rajba (1981) [**P3**], Rajba (1980) [**P2**].

W pracy Rajba(1980)[**P2**], podałam charakteryzację półgrup rozkładalności miar nieskończenie podzielnych, które maja gaussowską komponentę i należą do pewnej klasy $I_0$.

Nawet na prostej rzeczywistej, problem charakteryzacji wszystkich półgrup, które są półgrupami rozkładalności jest ciągle otwarty. Wszystko co było dotychczas zrobione o warunkach wystarczających, żeby półgrupa była półgrupą rozkładalności, jest podane w mojej pracy [**P3**]. Udowodniłam, że półgrupy rozkładalności tworzą gęsty podzbiór w zbiorze wszystkich półgrup spełniających nasze warunki konieczne. Dla symetrycznych miar probabilistycznych problem charakteryzacyjny został rozwiązany przez Iljinskijego w [**58**]. Mianowicie, każda zwarta podpółgrupa liczb rzeczywistych o module mniejszym lub równym 1 jest półgrupą rozkładalności miary probabilistycznej symetrycznej wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera 0 i $-1$.

Zauważmy, że charakteryzacja Lèvy'ego niezdegenerowanych samorozkładalnych $P$ jest równoważna inkluzji $[0,1] \subset D(P)$ (patrz Loève[**91**], Section 23.3). Stąd, w szczególności mamy następujące stwierdzenie: niezdegenerowana miara probabilistyczna $P$ jest translacją symetrycznej samorozkładalnej wtedy i tylko wtedy, gdy $D(P) = [-1,1]$. K. Urbanik (1976) [**175**] rozważał następujący problem: czy symetryczna miara probabilistyczna $P$ taka, że jej półgrupa rozkładalności zawiera otoczenie zera, jest samorozkładalna. Inaczej mówiąc, czy równość $D(P) = [-1,1]$ jest prawdziwa? W mojej pracy Niedbalska (1978) [**P1**] podałam rozwiązanie tego problemu i dałam negatywną odpowiedź. Mianowicie, podałam przykład miary $P$ symetrycznej, której półgrupa rozkładalności zawiera otoczenie zera, ale która nie jest samorozkładalna (a nawet nie jest nieskończenie podzielna), czyli $D(P) \neq [-1,1]$.

W [**P3**] definiuję $c$-rozkładalność miar względem podzbiorów zbioru miar probabilistycznych $\mathcal{P}$. Niech $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$ będzie zbiorem całkowicie domkniętym (patrz [**151**]). Mówimy, że $\varphi$ jest *$c$-rozkładalna względem $\mathcal{H}$*, gdy $\varphi$ jest $c$-rozkładalna i współczynnik $\varphi_c$ we wzorze (106) należy do klasy $\mathcal{H}$. Definiuję półgrupę rozkładalności $D(P,\mathcal{H})$ jako zbiór wszystkich $c \in \mathbb{R}$, dla których $P$ jest $c$-rozkładalne względem $\mathcal{H}$. W [**P3**] badam $c$-rozkładalność względem klasy $Id$ nieskończenie podzielnych rozkładów (patrz np. [**37**]). Wiadomo, że dla $P \in L$, $D(P) = D(P, Id)$. Inaczej mówiąc, dla $\varphi \in L$ wszystkie współczynniki $\varphi_c$ $(c \in D(P))$ są nieskończenie podzielne. W [**P3**] podaję przykład miary $P$ nieskończenie podzielnej z funkcją charakterystyczną $\varphi$, takiej że $\varphi$ jest $c$-rozkładalna dla pewnego $0 < c < 1$ i $\varphi_c$ nie jest nieskończenie podzielna, tzn. $D(P) \neq D(P, Id)$.

Warto zaznaczyć, że w mojej pracy Niedbalska-Rajba (1981) [**P3**] udowodniłam, że każda zwarta półgrupa zawierająca 0 i 1 jest półgrupą rozkładalności $D(P, Id)$, tzn. dla każdej takiej półgrupy $C$ istnieje $P \in Id$, taka że $D(P, Id) = C$. Jest to rozwiązanie problemu Urbanika charakteryzacji półgrup, które są półgrupami rozkładalności, dla półgrup rozkładalności $D(P, Id)$.

Ponadto, w pracy Rajba (2001) [**P9**] badam klasę $L_C(Id)$ rozkładów $P$, które są $C$-rozkładalne względem $Id$ $(C \subset [-1,1])$, tzn. dla których $C \subset D(P, Id)$. Podaję reprezentację funkcji charakterystycznych rozkładów $P \in L_C(Id)$. Metoda mojego dowodu, stymulowana wynikami Urbanika [**170**], polega na znalezieniu punktów ekstremalnych pewnego zbioru zwartego utworzonego przez miary spektralne rozkładów z $L_C(Id)$. Kiedy już punkty ekstremalne są znalezione, stosuję twierdzenie Choqueta o reprezentacji punktów zwartego wypukłego zbioru jako barycentrum punktów ekstremalnych ([**130**], p. 19). Z twierdzenia Choqueta o jednoznaczności dla metryzowalnej przestrzeni $X$ ([**130**], p. 70), otrzymuję jednoznaczność reprezentacji.

Zbiór rozkładów samorozkładalnych odgrywa dużą w opisie rozkładów granicznych ciągów zmiennych losowych. Warunek infinitezymalności $\{b_n^{-1} X_k\}$ implikuje, że klasa $L$ jest podzbiorem zbioru $Id$ zbioru wszystkich rozkładów nieskończenie podzielnych. Ponadto zawiera ona *stabilne miary probabilistyczne*, tzn. granice (106), ale dla jednakowo rozłożonych zmiennych losowych. Stabilne zmienne losowe i wektory odgrywają kluczowa rolę w teorii rachunku prawdopodobieństwa. Ich badania zostały zapoczątkowane w latach 1920 - 1930 przez Paul Lèvyégo i Aleksandera Yakovlevicha Khintchina. Literatura na ten temat jest bardzo bogata (patrz np. P. Lèvy [**86**], Gnedenko i Kolmogorov [**43**], Linde [**87**], Zolotariew [**197**], Ibragimov i Linnik [**57**], Samorodnitsky i Taqqu [**148**], Janicki i Weron [**59**]).

Urbanik (1973) [**173**] zdefiniował klasy $\mathbb{L}_m$ takie, że

$$Id \supset \mathbb{L}_0 \supset \mathbb{L}_1 \supset \ldots \supset \mathbb{L}_\infty = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathbb{L}_m \supset S,$$

gdzie $\mathbb{L}_0 = L$ i $S$ oznacza zbiór rozkładów stabilnych. Zgodnie z definicją podaną przez Urbanika, definiujemy klasę $\mathbb{L}_m$, $m \geq 1$, jako klasę wszystkich możliwych granic (106), gdzie $\mathcal{L}(X_k) \in \mathbb{L}_{m-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Rozkłady z klas $\mathbb{L}_m$ i $\mathbb{L}_\infty$ są nazywane *$(m+1)$-krotnie samorozkładalnymi* i *całkowicie samorozkładalnymi*, odpowiednio. Urbanik (1973) [**173**] udowodnił, że rozkład $P$ należy do klasy $\mathbb{L}_m$ $(m = 1, 2, \ldots, \infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on $[0,1]$-rozkładalny względem klasy $\mathbb{L}_{m-1}$ (według mojej terminologii w tej pracy). Ponadto, $\mathbb{L}_\infty$ jest najmniejszą klasą zawierającą $S$, która jest zamknięta ze względu na sploty i zbieżność. Scharakteryzował on również klasy $\mathbb{L}_m$ w terminach ich funkcji charakterystycznych. Następnie, Kumar i Schreiber w [**81**] oraz Sato w [**150**] znaleźli inne dowody ogólnej postaci funkcjonałów charakterystycznych elementów z $\mathbb{L}_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ (patrz [**97**]).

Bunge (1997) [**23**] uogólnił klasy Urbanika i zdefiniował klasy $L_m^C$ dla dowolnej półgrupy $C$, takie że $L_m^C$ pokrywa się z $\mathbb{L}_m$ dla klasy $C = [0,1]$ i

$$L_0^C \supset L_1^C \supset \ldots \supset L_\infty^C = \bigcap_{m=0}^{\infty} L_m^C.$$

W pracy Rajba (2001) [**P9**]) badam rozkłady, które są $C$-rozkładalne względem klasy $\mathbb{L}_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Znajduję reprezentacje ich funkcji charakterystycznych. Dowodzę, że dla każdej $C \subset [-1, 1]$ (zwartej półgrupy zawierającej 0 i 1) istnieje $P \in \mathbb{L}_m$ takie, że $D(P, \mathbb{L}_m) = C$.

W Rajba (2005) [**P15**] udowodniłam, że klasa rozkładów, które są $C$-rozkładalne względem klasy $\mathbb{L}_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ jest dokładnie klasą rozkładów granicznych pewnych znormalizowanych sum częściowych niezależnych zmiennych losowych, które spełniają pewien infinitezymalny warunek, jak również pewnych sum w przypadku, gdy warunek o ifinitezymalności będzie pominięty. Podaję również ich charakteryzację jako klasy rozkładów granicznych podciągów znormalizowanych sum, które spełniają infinitezymalny warunek.

W pracy Rajba (1999) [**P8**] badam wielokrotną rozkładalność miar probabilistycznych (por. [**165**]). Niech $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$. Mówimy, że funkcja charakterystyczna $\varphi$ jest $(c_1, \ldots, c_k)$-*rozkładalna*, lub, że $\varphi \in L_{c_1,\ldots,c_k}$, gdy

$$\varphi(t) = \varphi(c_1 t)\varphi_{c_1}(t), \qquad \varphi_{c_1}(t) = \varphi_{c_1}(c_2 t)\varphi_{c_1,c_2}(t), \ldots$$
$$\varphi_{c_1,\ldots,c_{k-1}}(t) = \varphi_{c_1,\ldots,c_{k-1}}(c_k t)\varphi_{c_1,\ldots,c_k}(t),$$

gdzie $\varphi_{c_1}, \varphi_{c_1,c_2}, \ldots, \varphi_{c_1,\ldots,c_{k-1}}$ są funkcjami charakterystycznymi. Zakładając, że wszystkie powyższe współczynniki należą do klasy $\mathcal{H}$, mówimy, że $\varphi$ jest $(c_1, \ldots, c_k)$-rozkładalna względem $\mathcal{H}$ ($\varphi \in L_{c_1,\ldots,c_k}(\mathcal{H})$. Udowodniłam, że klasa $L_{c_1,\ldots,c_k}$ pokrywa się z klasą szeregów pewnych zmiennych losowych i z klasą rozkładów granicznych pewnych sum unormowanych. Podałam charakteryzację klasy $G_{c_1,\ldots,c_k}$ składającej się z generatorów rozkładów z klasy $L_{c_1,\ldots,c_k}$. Udowodniłam, że funkcja charakterystyczna $\psi$ należy do klasy $G_{c_1,\ldots,c_k}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$E\left[\ln^k (|Z| + 1)\right] < \infty,$$

gdzie $Z$ jest zmienną losową z funkcją charakterystyczną $\psi$. Wynik ten uogólnia twierdzenie udowodnione przez Zakusilo (1976) [**194**] dla $k = 1$. W [**P9**] wprowadzam i badam *zbiór wielokrotnej rozkładalności* $D_{(k)}(P, \mathcal{H})$ miary $P \in \mathcal{H}$ względem $\mathcal{H}$, składający się ze wszystkich $(c_1, \ldots, c_k)$ $(|c_j| < 1, j = 1, 2, \ldots, k)$ takich, że $P$ jest $(c_1, \ldots, c_k)$-rozkładalna względem $\mathcal{H}$. Podałam również charakteryzację $(c_1, \ldots, c_k)$-rozkładalności funkcji charakterystycznej $\varphi$ względem klasy miar nieskończenie podzielnych, w języku miar spektralnych Lèvy'ego odpowiadających $\varphi$ (w reprezentacji Lèvy-Khintchina, patrz [**90**]). Opisałam też klasę rozkładów $(c_1, \ldots, c_k)$-rozkładalnych względem klasy $Id$ jako klasę rozkładów nieskończenie podzielnych z $(c_1, \ldots, c_k)$-supernadniezmienniczą miarą spektralną Lèvy'ego. W [**P11**] podałam charakteryzację funkcji, które są dystrybuantami $(c_1, \ldots, c_k)$-nadniezmienniczych miar.

Dla $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = c$, w miejsce $L_{c_1,\ldots,c_k}$ będziemy pisać $L_{c,(k)}$, i będziemy nazywać rozkłady należące do tych klas, *k-krotnie c-rozkładalnymi* (patrz [**P10**], [**165**]). W pracy Rajba (2002) [**P10**], znajduję reprezentacje $k$-krotnie $c$-rozkładalnych względem $Id$ rozkładów: $L_{c,(k)}(Id)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $L_{c,(\infty)}(Id)$ oraz $L_{c,(\alpha)}(Id)$, gdzie $\alpha > 0$ ($\alpha$ jest niekoniecznie całkowita). Stosując otrzymane reprezentacje znajduję również reprezentacje $\alpha$-krotnie samorozkładalnych rozkładów $(\alpha > 0)$ i całkowicie samorozkładalnych rozkładów. W [**P18**] definiuję i badam półgrupy rozkładalności ułamkowego rzędu związane z rozkładami z klas $L_{c,(\alpha)}(Id)$.

Klasy $\mathbb{L}_m$ były również badane na wielowymiarowych przestrzeniach. Mianowicie, Sato podał w [**151**] ich opis na przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{R}^d$ i Nguyen van Thu w [**161**] oraz Kumar i Schreiber w [**82**] na rzeczywistej ośrodkowej przestrzeni Banacha (patrz [**162**], [**163**], [**164**], [**66**]).

Maejima i Naito (1998) w [**94**] badali tzw. *semi-samorozkładalne* rozkłady na $\mathbb{R}^d$ jako graniczne rozkłady podciągów znormalizowanych ciągów sum częściowych niezależnych zmiennych losowych, które niekoniecznie są jednakowo rozłożone, ale spełniają warunek infinitezymalny. Normalizacja jest brana po ciągach $\{b_n\}$ takich, że $\lim b_{n+1}^{-1} b_n = c > 0$ i $\lim b_n = \infty$. W [**94**] rozkłady z klas semi-rozkładalnych rozkładów $L_0(c)$ i ich podklasy $L_m(c)$ są opisane w języku rozkładalności zmiennych losowych. Autorzy scharakteryzowali miary Lèvy'ego odpowiadające tym rozkładom. Rozkłady semi-samorozkładalne są naturalnym uogólnieniem semi-stabilnych. Wiadomo, że rozkłady semi-stabilne są scharakteryzowane jako graniczne rozkłady podciągów znormalizowanych ciągów sum częściowych niezależnych i jednakowo rozłożonych zmiennych losowych (patrz Meerchaert-Scheffer [**104**], Choi [**26**]).

W Rajba (2009) [**P19**], badam $C$-rozkładalność miar na przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{R}^d$, gdzie $C \subset [-1,1]$, względem klasy $I(\mathbb{R}^d)$ rozkładów nieskończenie podzielnych i względem klasy $L_m(\mathbb{R}^d)$ rozkładów $(m+1)$-krotnie samorozkładalnych. Podaję reprezentacje ich funkcji charakterystycznych. Podaję przykłady rozkładów , które są dokładnie $C$-rozkładalne względem $L_m(\mathbb{R}^d)$. Można zauważyć, że klasa rozkładów $C$-rozkładalnych względem $I(\mathbb{R}^d)$, w monotetycznym przypadku $C = \{c^k\}_{k=0}^{\infty} \cup \{0\}$ (tzn. $c$-rozkładalnych względem $I(\mathbb{R}^d)$), pokrywa się z klasą, $L_0(c)$, oraz klasa $m$-krotnie $c$-rozkładalnych względem $I(\mathbb{R}^d)$ pokrywa się z klasą $L_m(c)$ z [**94**]. Wyniki otrzymane w [**P19**], są uzupełnieniem i uogólnieniem wyników uzyskanych w [**94**].

Wydaje się rzeczą naturalną, że w wielowymiarowych przestrzeniach, sumy częściowe ciągu zmiennych losowych powinny być normowane przez liniowe operatory albo afiniczne transformacje. W takim przypadku otrzymujemy klasy *operatorowo-samorozkładalnych*$(OL(\mathbb{R}^d))$ i *operatorowo-stabilnych miar probabilistycznych.*

W 1972 Urbanik [**172**] zdefiniował klasy rozkładów granicznych sum częściowych niezależnych zmiennych losowych o wartościach w $\mathbb{R}^d$, normowanych przez transformacje afiniczne. Nazwał te rozkłady *miarami probabilistycznymi Lèvy'ego.* Yamazato [**193**] zamienił tę nazwę na $OL$-rozkłady i oznaczył przez $OL(\mathbb{R}^d)$ klasę wszystkich $OL$-rozkładów na $\mathbb{R}^d$, ponieważ jest to uogólnienie $L$-rozkładów poprzez operatory. Mówimy, $P$ ma *operator-samorozkładalności*, gdy istnieje operator $Q$ taki, że $P$ jest $c^Q$ rozkładalna dla każdego $0 < c < 1$ ([**172**]). Operator $Q$ będziemy nazywać *operatorem-samorozkładalności*, a rozkład $P$ nazywamy $Q$-samorozkładalnym. W pracach Maejima, Sato i Watanabe (1999, 2000) [**95**], [**96**], Rajba (2006) [**P16**] badane są miary na $\mathbb{R}^d$, które są $c^Q$-rozkładalne, dla każdego $c \in C$, gdzie $C \subset [0,1]$.

Urbanik w [**172**] pokazał, że rozkład $P$ należy do $OL(\mathbb{R}^d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P$ ma operator samorozkładalności, przy założeniu że $P$ jest faktycznie $d$-wymiarowa (tzn. nie jest skupiona na hiperpłaszczyźnie o mniejszym wymiarze). Dalej, podał on reprezentację funkcji charakterystycznych rozkładów operatorowo-samorozkładalnych (tzn. posiadających operator samorozkładalności). Inne reprezentacje można znaleźć np. w pracach Wolfe (1980) [**188**], Jurek (1983) [**65**], [**66**], Yamazato (1984) [**193**], Sato i Yamazato (1984, 1985) [**154**], [**155**]).

Z drugiej strony, do tej pory nie są znane reprezentacje $OL$-rozkładów bez założenia faktycznej $d$-wymiarowości. Yamazato [**193**] oznaczył operatorowo-samorozkładalne rozkłady jako $OSD$-rozkłady i przez $OSD(\mathbb{R}^d)$ klasę wszystkich $OSD$-rozkładów. Yamazato [**193**] podał przykład $OL$-rozkładu, który nie jest operatorowo-samorozkładalny.

Sakovic (1961, 1965) [**146**], [**147**] był pierwszym, który badał operatorowo stabilne rozkłady na $\mathbb{R}^d$. Z drugiej strony, Fisz (1954) [**38**] udowodnił twierdzenie o zbieżności operatorowego typu (normalizacja przez macierze). Zarówno Fisz jak i Sakovic używali podejścia wg. zbieżności po współrzędnych, co prowadziło do rachunkowych trudności.

Niezależnie od Sakovica, i wcześniej przed pracą Urbanika [**171**], Sharpe (1969) [**158**] badał klasę granicznych rozkładów afinicznych transformacji sum częściowych niezależnych jednakowo rozłożonych zmiennych losowych o wartościach w $\mathbb{R}^d$. Nazwał on klasę takich rozkładów *operatorowo-stabilnymi* rozkładami, i scharakteryzował tzw. operator stabilności, zakładając, że są one faktycznie $d$-wymiarowe. W dowodzie używał pewnych metod algebraicznych. Podobnie, Urbanik (1972) [**172**] dał funkcjonalny dowód opisując operatorowo-samorozkładalne miary. To stało się początkiem okresu intensywnych badań granicznych rozkładów. Z kolei, Jurek i Vervaat w [**73**] oraz Jurek w [**63**] otrzymali reprezentacje $OSD$-rozkładów jako całki stochastyczne względem procesu o stacjonarnych i niezależnych przyrostach (patrz [**62**], [**63**], [**64**], [**67**], [**68**], [**69**]). Jednocześnie, Wolfe [**189**] otrzymał tę samą reprezentację na przestrzeni Euklidesowej (patrz też [**190**]). Natomiast w Sato i Yamazato [**154**] $OSD$-rozkłady na $\mathbb{R}^d$ są scharakteryzowane jako graniczne rozkłady procesu typu Ornsteina-Uhlenbecka ([**189**], $d = 1$). Monografia *Operator limit distributions in probability theory* Jurka i Masona (1993) [**72**] stanowi podsumowanie intensywnych badań z tego okresu.

W pracy [**P16**] badam $(C,Q)$-rozkładalność względem $m$-krotnie $Q$-samorozkładalnych rozkładów na $\mathbb{R}^d$, gdzie $C \subset [0,1]$. Otrzymuję reprezentacje funkcji charakterystycznych ich rozkładów. Badam również związane z takimi rozkładami półgrupy rozkładalności pewnych liniowych operatorów. Dowodzę, że dla każdego $C \subset [0,1]$ ($C$, zwarta półgrupa zawierająca 0 i 1 ) istnieje rozkład, który jest dokładnie $(C,Q)$-rozkładalny względem klasy $m$-krotnie $Q$-samorozkładalnych rozkładów na przestrzeni Euklidesowej.

Moim zdaniem, do najważniejszych wyników dotyczących $c$-rozkładalności miar należą:

- Przykład miary probabilistycznej $P$ takiej, że jej półgrupa rozkładalności $D(P)$ zawiera otoczenie zera, a $P$ nie jest samorozkładalna, nie jest ona nawet nieskończenie podzielna ([**P1**], Th., p.138).
  Praca [**P1**] jest cytowana w pracy Bunge (1997) [**23**] i w monografii Jurek i Mason (1993) [**72**].
- Twierdzenie, że zbiór półgrup rozkładalności miar niezdegenerowanych tworzy gęsty podzbiór w zbiorze $\mathcal{C}$ składającym się ze wszystkich zwartych podpółgrup $C \subset [-1, 1]$ zawierających obie liczby 0 i 1 ([**P3**], Th. 2.1).
  Twierdzenie, że zbiór półgrup $D(P, Id)$ pokrywa się ze zbiorem $\mathcal{C}$, tzn., że dla każdej $C \in \mathcal{C}$ istnieje miara nieskończenie podzielna $P$ taka, że $D(P, Id) = C$ ([**P3**], Th. 1.3). Twierdzenie, że istnieje $P \in Id$ taka, że $D(P, Id) \neq D(P)$ ([**P3**], Th. 1.1).
  Praca [**P3**] jest cytowana w monografii Jurek i Mason (1993) [**72**] oraz w pracach: Urbanik (1984) [**176**], Bunge (1997) [**23**], Bouzar i Metron (2008) [**19**], Becker-Kern i Hazod (2009) [**9**], Lindner i Sato (2009, 2011) [**88, 89**], Sato(2011) [**153**], Aoyama i Nakamura (2012) [**1**]; moja praca doktorska *O półgrupach rozkładalności miar probabilistycznych na prostej* (która zawiera m. in. wyniki z [**P3**]) jest cytowana przez N. V. Thu (1985) [**165**].
- Twierdzenia o punktach ekstremalnych zbioru $H$- nadniezmienniczych miar i $C$-nadniezmienniczych miar. Twierdzenia o reprezentacji całkowej miar spektralnych Lèvy'ego rozkładów $c$-rozkładalnych względem klasy $\mathbb{L}_m$ ($C \in \mathcal{C}$) ([**P9**], Th. 3.1, 4.2, 4.3, 4.4).
- Charakteryzacja klasy $G_{c_1,\dots,c_k}$ składającej się z generatorów rozkładów należących do klasy $L_{c_1,\dots,c_k}$ ($k \in \mathbb{N}$), jako klasy rozkładów zmiennych losowych $Z$ spełniających
  $$E\left[\ln^k(|Z| + 1)\right] < \infty.$$
  To twierdzenie charakteryzacyjne jest odpowiednikiem twierdzenia Zakusily (1976) w [**194**] dla $k = 1$ ( [**P8**], Th. 1, p. 173).
- Charakteryzacja $C$-rozkładalności względem klasy $L_m(\mathbb{R}^d)$ rozkładów $(m + 1)$-krotnie samorozkładalnych na $\mathbb{R}^d$. W szczególności, przykłady miar, które są dokładnie $C$-rozkładalne ($C \in \mathcal{C}$) względem $L_m(\mathbb{R}^d)$ ([**P19**], Statistics and Probability Letters, Impact Factor 0,386). Wyniki te uzupełniają i uogólniają wyniki zawarte w [**94**].

### Zagadnienia z transmisji informacji

Problemy zagadnień z transmisji informacji są badane w pracach [**P4, P6, P7, P12, P13, P14, P17, P20, P22, P24, P28**].

W pracy [**P4**] przedstawiono analityczne zależności wiążące prawdopodobieństwo błędów w transmisji cyfrowej z klasą zniekształceń czasowych statycznych (zwanych również zniekształceniami jednostronnymi), w obecności szumu gaussowskiego. Przy przesyłaniu informacji w postaci sygnału binarnego, powszechnie przyjętym kryterium jakości transmisji jest prawdopodobieństwo błędów. W praktyce korzysta się z tzw. stopy błędów, czyli przybliżenia prawdopodobieństwa błędów na podstawie pomiarów. Przybliżenie to zależy od liczby błędnie odebranych elementów. Aby uzyskać przybliżenie prawdopodobieństwo błędów na zadanym poziomie ufności [1], [2], należy pomiar kontynuować, aż do czasu zarejestrowania określonej liczby bitów błędnych. Dla kanałów wysokiej jakości (np. $10^{-6}$ dla transmisji danych, $10^{-3}$ w łączach światłowodowych) czas pomiarów musi być odpowiednio długi, proporcjonalnie do szybkości transmisji. Inną wadą pomiaru stopy błędów jest konieczność wyłączenia kanału z transmisji użytkowej oraz potrzeba stosowania sygnału testującego. Ponadto ocena kanału transmisyjnego nie odbywa się na bieżąco w czasie trwania transmisji użytkowej. Bardzo interesujące są te metody oceny jakości kanałów transmisji, które korzystają z użytkowego sygnału transmisji (parz np. [**186, 46, 53, 27**]). W pracy [**P4**] szukamy estymatora prawdopodobieństwo błędów, w zależności od parametrów statycznych zniekształceń czasowych [7, 8]. Zakładamy obecność addytywnego szumu gaussowskiego oraz tego, że na wejściu, odbiornik sygnału jest zaopatrzony w idealny filtr który jest dopasowany do sygnału bez statycznych zniekształceń czasowych [9, 10]. W pracy [**P4**] otrzymujemy wzory na estymator prawdopodobieństwa błędów jako funkcję stosunku sygnał-szum i parametrów zniekształceń czasowych. Występowanie statycznych zniekształceń czasowych związane jest z niedoskonałością sprzętu transmisji danych jak również wynika ono z niezgodności częstotliwości nośnych transmisji danych. Jak widać na wykresach otrzymanych estymatorów prawdopodobieństwa, nawet niewielki wzrost statycznych zniekształceń czasowych powoduje, w obecności szumu gaussowskiego, duże straty jakości transmisji (pogorszenie jakości transmisji nawet o kilka rzędów). Warto dodać, że w pracy [13], badano na drodze pomiarowej, dla transmisji danych z kluczowaniem częstotliwości w analogowym kanale transmisyjnym, zależność prawdopodobieństwa błędów od statycznych zniekształceń czasowych, w obecności szumu gaussowskiego.

W pracach [**P7, P6, P12**], badaliśmy jakość łącza transmisji danych FSK pracującego z rzeczywistym dyskryminatorem częstotliwości w obecności szumu gaussowskiego ([**6, 10, 11**]). Braliśmy pod uwagę efekt zniekształceń czasowych powodowanych przez rzeczywisty dyskryminator częstotliwości. W szczególności otrzymaliśmy wzór na prawdopodobieństwo błędów jako funkcję stosunku sygnał-szum i parametrów zniekształceń czasowych. Analizowaliśmy różne zniekształcenia powstające na wyjściu dyskryminatora ([**132, 139, 92**]. Elementarne zniekształcenia należą do klasy jednostronnych zniekształceń czasowych sygnału (bias time distortions). Wynikają one z przesunięcia widma powodowanego przez oba filtry nadawczy dolnoprzepustowy i odbiorczy górnoprzepustowy. Dynamiczne zniekształcenia czasu są wytwarzane przez rzeczywisty dyskryminator częstotliwości i są efektem całkowania ciągu impulsów, przez odbiorczy filtr dolnoprzepustowy (por. [**166, 92**]) (dynamic time distortions). Z kolei, stochastyczne zniekształcenia czasowe wynikają z obecności szumu gaussowskiego w kanale nośnym. Mogą one być aproksymowane uciętym rozkładem gaussowskim ([**166**]). W poprzednich badaniach był rozważany idealny dyskryminator częstotliwości jako demodulator, i w efekcie był pomijany wpływ zniekształceń czasowych ([**11, 102, 127, 140, 167**]). W naszych pracach rozważamy FSK system z rzeczywistym dyskryminatorem częstotliwości, co umożliwia badanie tych zniekształceń. Parametry zniekształceń czasowych są wygodnym parametrem charakteryzującym jakość transmisji, ale wzór na prawdopodobieństwo błędu w zależności od tych parametrów nie był dotychczas znany.

W pracy [**P13**] podajemy metodę estymacji dyspersji dynamicznych zniekształceń czasowych. Stosujemy elementy teorii granicznych rozkładów ekstremalnych porządkowych statystyk pozycyjnych ([**78, 84**]. Dyspersja dynamicznych zniekształceń czasowych jest parametrem, który występuje we wzorze na prawdopodobieństwo błędu w systemie FSK z rzeczywistym dyskryminatorem częstotliwości, który otrzymaliśmy w pracy [**P7**].

W pracy [**P14**] przedstawiono metodę wielopunktowego pomiaru temperatury (por. [**107**]) oraz transmisji komunikatów o przekroczeniu wartości krytycznych. Wyniki pomiarów są prezentowane na mobilnym terminalu. Wykorzystano technologie Bluetooth ([**108**]) do transmisji informacji z komputera do telefonu komórkowego pełniącego rolę terminala mobilnego. Jednocześnie telefon ten pracuje w sieci GSM, i w przypadku przekroczenia dopuszczalnej wartości temperatury któregokolwiek z czujników generuje komunikaty SMS o przekroczeniu wartości krytycznej (por. [**28, 47, 168, 187**]), wysyłane do ustalonych numerów telefonicznych.

W pracy [**P17**] przedstawiono rozwiązanie zagadnienia wspomagania decyzji dowódcy jachtu podczas manewrów. Informacje są dostarczane z czujników i urządzeń pokładowych na mobilny terminal dowódcy (przystosowany telefon komórkowy Siemens S55), wykorzystano w tym celu łącze radiowe zrealizowane na bazie technologii Bluetooth ([**108**]). Terminal dowódcy otrzymuje informacje, jak również wysyła komunikaty o przekroczeniu wartości krytycznych kontrolowanych wielkości fizycznych (patrz [**28, 47, 168, 187**]).

W pracach [**P20, P22, P24, P28**] przedstawiamy nowa metodę losowego sterowania w bezprzewodowych sieciach czujników (WSN). Losowe sterowanie pracą sieci jest zrealizowane poprzez użycie poissonowskiego strumienia zgłoszeń do modelowania naszej sieci (PASTA, patrz [**4, 5**]). W proponowanym rozwiązaniu pojedynczy czujnik-nadajnik (w skrócie, czujnik) pozostaje nieaktywny przez cały czas, z wyjątkiem losowo wybranych momentów czasowych, gdy wysyła informację o mierzonej wielkości do bazy centralnej. Wszystkie czujniki wysyłają informację niezależnie jeden od drugiego. Jest to sieć zbiorcza z informacją wysyłaną tylko w jedną stronę, przy użyciu tylko jednej częstotliwości radiowej. W efekcie jest duża oszczędność energii czujników, nadawany protokół może być krótki. Skutkuje to też dużym uproszczeniem sprzętowym. W naszych pracach budujemy model matematyczny sieci i analizujemy poprawność działania sieci.

Przy tych założeniach pojawia się problem zakłócenia transmisji sygnału. Jeżeli jeden lub więcej czujników zacznie nadawać podczas trwania nadawania protokołu przez jakiś czujnik, taka sytuacja jest nazywana kolizją. Taki zakłócony sygnał jest ignorowany. Akceptujemy pewne straty informacji, zyskując prostotę całego systemu i sprzętową. W pracach [**P20, P22, P24**] wszystkie czujniki mają jednakowy średni czas pomiędzy transmisjami, natomiast w [**P28**] są podzielone na grupy, w których jest taki sam średni czas pomiędzy transmisjami pojedynczego czujnika. W [**P20**] otrzymujemy wzór na warunkowe prawdopodobieństwo kolizji w przedziale o danej długości, przy założeniu danej liczby nadań w przedziale. W pracach [**P22, P24, P28**] otrzymujemy twierdzenia o bezwarunkowym prawdopodobieństwie kolizji.

W pracy [**P28**] przedstawiamy przykład zastosowania bezprzewodowej sieci czujników z jednokierunkową transmisją do monitorowania stanu pacjentów szpitala. Węzły sieci (czujniki) są podzielone na grupy, w których jest taki sam średni czas pomiędzy transmisjami, zależący od stanu zdrowia pacjentów. Otrzymujemy wzór na prawdopodobieństwo kolizji, który jest weryfikowany poprzez badania symulacyjne pracy sieci.

[**P22**] jest w monografii *Knowledge in telecommunication technologies and optics*, 2011. [**P20**] jest w czasopiśmie PAK. Praca [**P24**] jest w czasopiśmie PRZEGLĄD ELEKTROTECHNICZNY (Electrical Review) z listy filadelfijskiej, impact factor 0,244 . Praca [**P28**] została przyjęta do prezentacji na IEEE Symposium Series on Computational Intelligence, IEEE SSCI 2013 Singapore, które odbędzie się w dn. 16 – 19.04.2013, w Singapurze, jak również została zakwalifikowana do publikacji w Proceedings publikowanych przez IEEE.

ROZDZIAŁ 7

# O autorze

**Imię i nazwisko**: Teresa Rajba.

**Data i miejsce urodzenia**: 08.09.1952 r., Bielawa.

**Stan cywilny**: mężatka, sześcioro dzieci.

**Posiadane dyplomy i stopnie naukowe**:

- 1981 – uzyskanie stopnia doktora nauk matematycznych, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski, rozprawa doktorska: *O półgrupach rozkładalności miar probabilistycznych na prostej*, promotor: prof. dr hab. Kazimierz Urbanik,
- 1976 – uzyskanie stopnia magistra matematyki, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski, praca magisterska: *Półgrupy rozkładalności miar probabilistycznych na prostej*, promotor: prof. dr hab. Kazimierz Urbanik, moja praca magisterska zdobyła I miejsce w Ogólnopolskim Konkursie Prac Magisterskich z Rachunku Prawdopodobieństwa organizowanym przez PTM.

**Zatrudnienie**:

- od października 2001 r.: adiunkt w Katedrze Matematyki i Informatyki, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej,
- październik 1999 r. – wrzesień 2001 r.: adiunkt w KMiI, WBMiI, filia PŁ w Bielsku-Białej,
- październik 1981 r. – wrzesień 1999 r.: adiunkt w Zakładzie Rachunku Prawdopodobieństwa, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii, Uniwersytet Wrocławski we Wrocławiu,
- październik 1976 r. – wrzesień 1981 r.: asystent w Zakładzie Rachunku Prawdopodobieństwa, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii, Uniwersytet Wrocławski we Wrocławiu,
- Promotorstwo kilkunastu prac magisterskich na Uniwersytecie Wrocławskim.

**Publikacje, wygłoszone referaty na konferencjach, inne wystąpienia, osiągnięcia dydaktyczne i w zakresie popularyzacji nauki, nagrody**:

- **Publikacje**

  Mam 30 opublikowanych artykułów naukowych w czasopismach (w tym jedna praca przyjęta do druku, w 14 artykułach jestem współautorem). Wśród nich w szczególności jeden jest rozdziałem w monografii, a 6 artykułów jest w czasopismach z tzw. listy filadelfijskiej (w tym: 3 artykuły są w Journal of Mathematical Analysis and Applications,IF=1,001; 1 artykuł jest w Mathematical Inequalities an Applications, IF=0,558; 1 artykuł jest w Statistics and Probability Letters, IF=0,386; Przegląd Elektrotechniczny, IF=0,244). Ponadto, wysłałam 3 prace do publikacji. Sumaryczny impact factor według listy Journal Citation Reports (JCR) jest równy 4,191 (PE 2012 +J MAA 2012 +J MAA JMAA 2012 + MIA 2012 + JMAA 2011 + Stat. Prob. Let. 2009 =0,244 + 1.001 + 1.001 + 0,558 + 1,001 + 0,386 = 4,191). Według obowiązującej punktacji MNiSW zgromadziłam łącznie 322 punktów. Moje prace były cytowane łącznie 37 razy (według Google Scholar): opublikowane pod nazwiskiem T. Rajba były cytowane 23 razy, moja praca T. Niedbalska-Rajba *On decomposability semigroups on the real line.* Colloq. Math. Vol. 44. 1981 była cytowana 10 razy, moja praca T. Niedbalska, *An example of the decomposability semigroup*, Colloq. Math. 39 (1978) była cytowana 4 razy (według Google Scholar). Według baz danych współczynnik Hirscha h wynosi 1 (zgodnie z WoS), lub 3 (według Google Scholar, na co składają się po 4 cytowania do T. Rajba, Sz. Wąsowicz, *Probabilistic characterization of strong convexity*, Opuscula Mathematica (2011), do T Rajba, S Rajba, *Wireless sensor convergecast based on random operations procedure*Pomiary, Automatyka, Kontrola 56 (3), 255-2584 oraz do T. Rajba, *A representation of distributions from certain classes Lid S*, Probab. Math. Statist 4, 67-78 ), z tym, że gdyby uwzględnić cytowania moich pozostałych prac opublikowanych pod nazwiskiem T. Niedbalska (10 cytowań) i T. Niedbalska-Rajba (4 cytowania), współczynnik Hirscha h wyniósłby 4 (według Google Scholar).

- **Konferencje**

35 referatów wygłoszonych na konferencjach naukowych,
17 na krajowych i 18 na międzynarodowych konferencjach, w tym 3 referaty na konferencjach międzynarodowych zostały wygłoszone przez współautorów oraz jeden będzie wygłoszony przez współautora (został przyjęty do prezentacji na IEEE Symposium Series on Computational Intelligence 2013)

- **REFERATY NA KONFERENCJACH MIĘDZYNARODOWYCH**

(1) T. Rajba, *On (C, m)-semi-self-decomposable distributions on Euclidean spaces*, 28th International Seminar on Stability Problems of Stochastic Models, 3.05-05.06.2009, Zakopane.
(2) T. Rajba, *On the fractional decomposability of infinitely divisible probability measures*, 27th International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, 22-26.10.2007, Nahariya (Israel).
(3) T. Rajba, S. Rajba, M. Karpiński, *Measurement and information system used the mobile phone GSM and Bluetooth*, 15th International Seminar of Metrologists Methods and Technics of Signal Conversion at Physical Measurements, 24-26.09.2007, Lviv (Ukraine).
(4) T. Rajba, *On certain limit distributions of selfdecomposable distributions*, 26th Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, 27.08-2.09.2006, Sovata-Bai (Romania).
(5) T. Rajba, *On limit distributions of some normed sums*, 25th International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, 20-24.09.2005, Maiori, Salerno (Italy).
(6) T. Rajba, *On superinvariant measures on the real line*, 24th Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, 10-17.05.2004, Jurmala (Latvia).
(7) T. Rajba, *A generalization of operator-selfdecomposable distributions on Euclidean spaces*, 23th Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, 12-17.05.2003, Pamplona (Spain).
(8) T. Rajba, S. Rajba, *Estimations of measuring signal transmission quality*, 8th International Conference, 17-19.09.2003, Lviv (Ukraine).
(9) T. Rajba, *Multiply c-decomposable infinitely divisible measures on the real line and their characteristic functions*, 8th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, 23-29.06.2002, Vilnius (Lithuania).
(10) T. Rajba, *A generalization of multiply monotone functions on the real line*, 22th International Seminar on stability Problems for Stochastic Models, Seminar on Statistical data Analysis, (SDA '2002), 25-31.05.2002, Varna (Bulgaria).
(11) T. Rajba, *Classes of multiple decomposable laws*, Eger (Hungary), 21sth Seminar on Stability Problems of Stochastic Models, 28.01 3.02.2001, Eger (Hungary).
(12) T. Rajba, S. Rajba , *The performance of a digital FSK system with actual discriminator; time distortions effects*, 8th International Conference on Remote Data Transmission, 1987, Praha, Karlovy Vary (Czech Republic).
(13) T. Rajba, *On decomposability semigroups for certain probability measures*, 2th International Conference on Probability Theory on Vector Spaces, Błażejewko, 1979 (Poland).
(14) T. Rajba, *An example of the decomposability semigroup*, 1sth International Conference on Probability Theory on Vector Spaces, Trzebieszowice, 1977 (Poland).

## REFERATY NA KONFERENCJACH MIĘDZYNARODOWYCH WYGŁOSZONE PRZEZ WSPÓŁAUTORÓW

(15) S. Rajba, T. Rajba, P. Raif and M. Mahmud, Wireless Sensor Networks in Application to Patients Health Monitoring , IEEE Symposium Series on Computational Intelligence 2013, April 15-19, 2013, Singapore, (praca została przyjęta do prezentacji na IEEE Symposium Series on Computational Intelligence 2013, referat będzie wygłoszony przez współautora P. Raifa).

(16) T. Rajba, K. Nikodem and Sz, Wąsowicz, On strongly Schur-convex functions, 49th International Symposium on Functional Equations, Graz-Mariatrost (Austria), June 19-26, 2011 (referat wygłoszony przez Sz, Wąsowicza).

(17) B. Micherda, T. Rajba, On some inequalities of Hermite-Hadamard-Fejér type for (k,h)-convex functions, 14th International Conference on Functional Equations and Inequalities, Będlewo, 11-17.IX.2011 (referat wygłoszony przez B. Micherda).

(18) T. Rajba, Sz. Wąsowicz, Probabilistic characterization of strong convexity, 48th International Symposium on Functional Equations, Batz-sur-Mer, France, June 13-18, 2010 (referat wygłoszony przez Sz. Wąsowicza).

## REFERATY NA KONFERENCJACH KRAJOWYCH

(19) T. Rajba, *O zastosowaniu metod probabilistycznych do badania nierówności między kwadraturami*, Czterdziesta pierwsza ogólnopolska konferencja zastosowań matematyki: Zakopane-Kościelisko, 4–11.IX.2012.

(20) T. Rajba, *O zastosowaniu wypukłych porządków stochastycznych do nierówności typu Hermite'a-Hadamarda-Fejéra*, XII Konferencja z probabilistyki, Będlewo, 24–28.V.2012 .

(21) T. Rajba, *O zastosowaniach twierdzenia Choqueta do badania losowo nadniezmienniczych miar*, Czterdziesta ogólnopolska konferencja zastosowań matematyki: Zakopane-Kościelisko, 30.VIII–6.IX.2011.

(22) T. Rajba, *Funkcje ściśle wypukłe i ich interpretacje probabilistyczne*, XI Konferencja z probabilistyki, Będlewo, 24–28.V.2010. 21. T. Rajba, *O ułamkowych półgrupach rozkładalności*, X Konferencja z probabilistyki, Będlewo, 19–23.V.2008.

(23) T. Rajba, P. Rajba, *O oszacowaniu prawdopodobieństwa średniej liczby sukcesów*, Trzydziesta siódma ogólnopolska konferencja zastosowań matematyki: Zakopane-Kościelisko, 8–16.IX.2008.

(24) T. Rajba, S. Rajba, *Praktyczne aspekty analizy pomiarów własności czasowych w systemach transmisji synchronicznej*, Trzydziesta siódma ogólnopolska konferencja zastosowań matematyki: Zakopane-Kościelisko, 8–16.IX.2008.

(25) T. Rajba, *On certain classes of limit distributions of m-times selfdecomposable distributions*, IX Konferencja z probabilistyki poświęcona pamięci prof. Kazimierza Urbaniaka, Będlewo, 22–26 maja 2006.

(26) T. Rajba, *Multiply c-decomposable infinitely divisible measures on the real line and their characteristic functions*, VII Konferencja z probabilistyki, Będlewo, 19–24.05.2002.

(27) T. Rajba, *Zastosowania twierdzenia Choqueta*, Trzydziesta Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, Zakopane-Kościelisko, 18–25.09.2001.

(28) T. Rajba, S. Rajba , *Wskaźniki jakości transmisji cyfrowej w optoliniach*, Trzydziesta Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, 18-25.09.2001, Zakopane-Kościelisko.

(29) T. Rajba, *O rozkładalności miar*, V Krajowe Seminarium Wypukłe Funkcje Wielowartościowe, Bystra, 17–20.X.2001.

(30) T. Rajba, S. Rajba, *Jakość transmisji danych w systemach cyfrowych*, Dwudziesta Dziewiąta Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, Zakopane-Kościelisko, 19–26.IX.2000.

(31) T. Rajba, *On multiply decomposability semigroups of the probability measures on the real line*, VI Konferencja z probabilistyki, Poraj, 05–09.06.2000.

(32) T. Rajba, *Klasy $L(m, R^d, C)$ miar probabilistycznych na przestrzeniach euklidesowych*, IV Konferencja z probabilistyki, Jachranka, 16-21.05.1994.

(33) T. Rajba, S. Rajba, *The performance of a Digital FSK system with actual discriminator: time distortions effects*, Piętnasta Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, 22.09–01.10.1986, Tresna.

- **INNE WYSTĄPIENIA. ODCZYTY POPULARYZATORSKIE**

(1) Wygłoszenie kilkudziesięciu referatów o wynikach własnych badań na Seminarium Probabilistycznym, na Uniwersytecie Wrocławskim w latach 1976 - 1999 oraz na Seminarium Katedralnym, Katedry Matematyki i Informatyki w Akademii Techniczno - Humanistycznej, od 2001.
(2) 4 referaty na Seminarium z równań i nierówności funkcyjnych o wielu zmiennych, na Uniwersytecie Śląskim:
*O funkcjach delta-wypukłych n-tego rzędu*, I, 10.12.2012.
*O funkcjach delta-wypukłych n-tego rzędu, II*, 26.11.2012r.
*Interpretacja probabilistyczna nierówności Hermite'a- Hadamarda*, 16.04.2012.
*O funkcjach wypukłych n-tego rzędu*, 15.03.2012.
(3) 2 referaty na Seminarium z równań funkcyjnych, na Uniwersytecie Śląskim:
*Porównanie klas funkcji wypukłych wyższych rzędów w sensie Wrighta i Jensena, II*, 21.02.2012.
*Reprezentacje całkowe funkcji delta-wypukłych wyższych rzędów*, 17.05.2012.
(4) Referat pt. *O randomizacji funkcji wielokrotnie wypukłych w sensie Wrighta*, na Seminarium Katedralnym Katedry Matematyki Wydziału Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Lubelskiej, 13.10.2011.
(5) Referat pt. *O samorozkładalności miar probabilistycznych* na Seminarium Probabilistycznym, na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, 28.05.2003.
(6) Odczyt pt. *Rozkładalność miar probabilistycznych*, 10.10.2002.
na zaproszenie Górnośląskiego Oddziału Polskiego Towarzystwa Matematycznego w Katowicach, na Uniwersytecie Śląskim,
(7) Odczyty popularyzatorskie wygłaszane w ramach Beskidzkiego Festiwalu Nauki i Sztuki:
*O paradoksach w rachunku prawdopodobieństwa*, 2002.
*O prześladowaniu przez pech*, 2004.
*Czy warto rzucać monetą,* 2008.

- **Osiągnięcia dydaktyczne**

Promotorstwo kilkunastu prac magisterskich na Uniwersytecie Wrocławskim w latach 1981 - 1999.

- **Nagrody**

(1) Nagroda Rektora ATH za osiągnięcia naukowe, 2001.
(2) Dwie Nagrody Prorektora Politechniki Łódzkiej za osiągnięcia naukowe, 1999, 2000,
(3) Trzy Nagrody Rektora Uniwersytetu Wrocławskiego, za osiągnięcia naukowe, 1978, 1979, 1982.
(4) Nagroda PAN za prace Z ZAKRESU TEORII PRAWDOPODOBIEŃSTWA, 1981.
(5) Nagroda I STOPNIA, w KONKURSIE POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO na najlepszą prace studencką z teorii prawdopodobieństwa i zastosowań matematyki, za pracę magisterską *Półgrupy rozkładalności miar probabilistycznych na prostej rzeczywistej*, 1976.

- **Recenzowanie publikacji w czasopismach międzynarodowych i krajowych**

  Applicationes Mathematicae, 1981 - 1990, kilka zrecenzowanych manuskryptów publikacji, Aequationes Mathematicae,2012, jedna recenzja manuskrypu publikacji

# Bibliografia


[1] T. Aoyama and T. Nakamura, *Behaviors of multivariable finite Euler products in probabilistic view*, arXiv:1204.4043 [math.PR](2012).

[2] S. Abramovich, S. Ivelić and J. Pečarić, *Refinement of Inequalities Related to Convexity via Superquadracity, Weaksuperquadracity and Superterzacity*, Inequalities and Applications 2010, International Series of Numerical Mathematics, 161 (2012), 191–207.

[3] A. Azócar, J. Gimenez, K. Nikodem, J. L. Sánchez , *On strongly midconvex functions*, Opusc. Math. 31(1) (2011), 15–26.

[4] F. Baccelli, S. Machiraju, D. Veitch, and J. Bolot , *The Role of PASTA In Network Measurement, Computer Communication Review* , Proceedings of ACM Sigcomm 2006, 11-15 Sept 2006 36(4):231–242.

[5] F. Baccelli, S. Machiraju, D. Veitch, and J. Bolot , *On Optimal Probing for Delay and Loss Measurement*, ACM Internet Measurement Conference (IMC'07), 24-26 Oct 2007, 291–302.

[6] Z. Baran et al., *Podstawy transmisji danych*, WKŁ, Warszawa 1982.

[7] O. Barndorff-Nielsen and N. Shepard, *Modelling by Lévy processes for financial econometrics*, Lévy processes: Theory and Applications 248 (2001), 283–318.

[8] E. F. Beckenbach, Generalized convex functions. Bull. Am. Math. Soc., 43 (1937), 363–371 .

[9] P. Becker-Kern and W. Hazod, *Mehler hemigroups and embedding of discrete skew convolution semigroups on simply connected nilpotent Lie groups*, In: Infinite dimensional harmonic analysis IV. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2009), 32-46.

[10] D. J. Bem, *Systemy telekomunikacyjne*, Part 1, Wyd. Polit. Wrocławskiej, Wrocław 1978.

[11] W. R. Bennet and J. R. Davey, *Data Transmission*, McGraw-Hill, New York 1965.

[12] F. Bernstein and G. Doetsch, *Zur Theorie konvexen Funktionen* , Math. Ann. 76 (1915), 514 – 526.

[13] M. Bessenyei, Zs. Páles, *Hadamard-type inequalities for generalized convex functions*, Math. Inequal. Appl. 6(3) (2003) 379–392.

[14] M. Bessenyei, Zs. Páles, *Characterizations of convexity via Hadamard's inequality*, Math. Inequal. Appl. 9 (1) (2006) 53–62.

[15] M. Bessenyei, Zs. Páles, *Characterization of higher-order monotonicity via integral inequalities*, Proc. R. Soc. Edinburgh Sect. A 140A (2010) 723–735.

[16] P. Billingsley. *Probability and measure. Third Edition.* John Wiley and Sons, New York 1995.

[17] H. Blumberg, *On convex functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 29 (1919), 40 – 44.

[18] M. Bombardelli and S. Varošanec, *Properties of $h$-convex functions related to the Hermite-Hadamard-Fejér inequalities*, Comput. Math. Appl. **58, no. 9** (2009), 1869–1877.

[19] N. Bouzar-Sreedharan and S. Metron, *Comments on $\alpha$-decomposability*, International Journal of Statistics, 66(2) (2008), 243-252.

[20] W. W. Breckner, *Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen*, Publ. Inst. Math. (Beograd) **23 (37)** (1978), 13–20.

[21] A. L. Brown, *Best approximation by continuous $n$-convex functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 57 (1989) 69–76.

[22] P. S. Bullen, *A criterion for $n$-convexity*, Journal of Mathematics 36 (1971) 81–98.

[23] J. Bunge, *Nested classes of $C$-decomposable laws*, Ann. Probab. 25 (1997), 215–229.

[24] G. T. Cargo, *Comparable means and generalized convexity*, J. Math. Anal. Appl. 12 (1965) 387–392.

[25] M. Castillo, N. Merentes and J.L. Sánchez, *FUNCIONES $m$-FUERTEMENTE CONVEXA CON MODULO $c$.*

[26] G. S. Choi, *Criteria for recurrence and transsience of semistable processes*, Nagoya Math. J. 134 (1994), 91–106.

[27] A. Ciborski et al., *Primienienie detektora kaczestwa signała k ocenke peredaczi diskretnych soobszczenij*, 5 Mezinarodni Konference, dalkovy prenos dat, t.II, 3–9, Praha 1981.

[28] A. Daniluk, *RS232 – Praktyczne oprogramowanie*, helion, Gliwice 2002.

[29] M. Denuit, C.Lefevre and M. Shaked, *The s-convex orders among real random variables, with applications.* Mathematical Inequalities & Applications, **1** (1998), 585-613.

[30] S. S. Dragomir and S. Fitzpatrick, *$s$-Orlicz convex functions in linear spaces and Jensen's discrete inequality*, J. Math. Anal. Appl. **210, no. 2** (1997), 419–439.

[31] S. S. Dragomir and S. Fitzpatrick, *Hadamard's inequality for $s$-convex functions in the first sense and applications*, Demonstratio Math. **31, no. 3** (1998), 633–642.

[32] S. S. Dragomir and C. E. M. Pearce, *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, RGMIA Monographs, Victoria University, 2000. (Online: http://rgmia.vu.edu.au/monographs/)

[33] S. S. Dragomir, C. E. M. Pearce, J. Pečarić, Means, $g$-Convex Dominated Functions and Hadamard-Type Inequalities, Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences 18(2) (2002), 161-173.

[34] N. Elezović and J. E. Pečarić, Differential and integral F-means and applications to digamma function, Math. Inequal. Appl., 3 (2000), 189–196.

[35] L. Fejér, *Über die Fourierreihen, II*, Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss. **24** (1906), 369–390.
[36] W. Feller, *Completely monotone functions and sequences*, Duke Math. J. 5 (1939), 661–674.
[37] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1978.
[38] M. Fisz, *A generalization of a theorem of Khintchine*, Studia Math. 14 (1954), 310–313.
[39] R. Ger, Stability of polynomial mappings controlled by $n$-convex functionals, WSSIAA3 (1994) 255-268.
[40] R. Ger and K. Nikodem, Strongly convex functions of higher order, Nonlinear Anal., 74 (2011), 661-665.
[41] A. Gilányi and Zs. Páles. On convex functions of higher order. *Math. Inequal. Appl.*, 11(2):271–282, 2008.
[42] A. Gilányi and Zs. Páles. On Dinghas-type derivatives and convex functions of higher order. *Real Anal. Exchange*, 27(2):485–493, 2001-02.
[43] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley, Reading, 1954.
[44] E. K. Godunova and V. I. Levin, *Neravenstwa dlja funkcii sirokogo klassa, soderzascego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkcii*, in: Vycislitel. Mat. i. Fiz. Mezvuzov. Sb. Nauc. Trudov, MGPI, Moskva, (1985), 138–142.
[45] A. Granata, *A geometric characterization of nth order convex functions*, Pacific Journal of Mathematics, 98 (1) (1982), 91 – 98.
[46] D. J. Gooding, *Performance monitor techniques for eligital receivers base on extrapolation of error rate*, IEEE Trans. Comm.Tech. Vol. COM-16 (6) (1968), 380–387.
[47] J. Grębosz, *Symfonia C++*, Oficyna Kallimach, Kraków 1966.
[48] A. K. Grincevicius, *On the continuity of the distribution of a sum of dependent variables connected with independent walks on lines*, Theory Probab. Appl. 19 (1974), 163–168.
[49] J. Hadamard, *Etude sur les propriétés des fonctions entiéres et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, J. Math Pures Appl., 58 (1893), 171 – 215.
[50] P. Hartman, On functions representable as difference of convex functions, Pacific J. Math. 9 (1959) 707-713.
[51] O. Hölder, *Über einen Mittelwerthssatz*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, (1889), 38 – 47.
[52] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities, 2nd ed., Cambridge University Press, London-New York, 1952.
[53] E. Hermanowicz, *Oczkowa metoda badania zniekształceń w torach PCM*, Przegląd Telekomunikacyjny, 7 (1976).
[54] J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, Fundamentals of convex analysis, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2001.
[55] E. Hopf, *Über die Zusammenhänge zwischen gewissen höheren Differezenquotienten reeler Funktionen einer reelen Variablen und deren Defferzierbarkeitseigenschaften*, Dissertation, Friedrich Wilhelms Universität, 1926,
[56] H. Hudzik and L. Maligranda, *Some remarks on s-convex functions*, Aequationes Math. **48, no. 1** (1994), 100–111.
[57] I. A. Ibragimov and Yu. V. Linnik, *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*, J. F. C. Kingman (ed.), Wolters–Noordhoff, Groningen, 1971.
[58] A. I. Ilinskii, *On c-decomposability of characteristic functions*, Litovsk. Mat. 18 (1978), 45–50 (in Russian).
[59] A. Janicki and A. Weron, *Simulation and Chaotic Behaviour of $\alpha$-stable Stochastic Processes*, Marcel Dekker, New York, 1994.
[60] J.L.W.V. Jensen, *Om konveksa funktioner og uligheder imellem middelvaerdier*, Nyt. Tidsskrift for Mathematik, 16 B (1905), 49 –69.
[61] J.L.W.V. Jensen, *Suir les fonctions convexes et les inégalités les valeurs moyennes*, Acta Math., 30 (1906).
[62] Z. J. Jurek, *Convergence of types, selfdecomposability and stability of measures on linear spaces*, in: Probability in Banach Spaces. Proceedings. 1980. Lecture Notes in Math. 860, A. Beck (ed.), Springer-Verlag, 1981, 257–267.
[63] Z. J. Jurek, *An integral representation of operator-selfdecomposable random variables*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 30 (1982), 385–393.
[64] Z. J. Jurek, *Structure of a class of operator-selfdecomposable probability measures*, Ann. Probab. 10 (1982), 849–856.
[65] Z. J. Jurek, *The classes $L_m(Q)$ of probability measures on Banach spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 31 (1983), 51–62.
[66] Z. J. Jurek, *Limit distributions and one-parameter groups of linear operators on Banach spaces*, J. Multivariate Anal. 13 (1983), 578–604.
[67] Z. J. Jurek, *On polar coordinates in Banach spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 32 (1984), 61–66.
[68] Z. J. Jurek, *Remarks concerning the theory of operator-limit distributions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 36 (1988), 307–313.
[69] Z. J. Jurek, *On Lévy (spectral) measures of integral form on Banach spaces*, Probab. Math. Statist. 11 (1990), 139–148.
[70] Z. J. Jurek, *Selfdecomposability: an Exception or a Rule?*, Annales Universitatis Mariae Curie–Sklodowska 51 (1997), no. 10, 93–107.
[71] Z. J. Jurek, *Different Aspects Of Selfdecomposability*, Aarhus University Miscellanea 11 (1999), 84–90.
[72] Z. J. Jurek and J. D. Mason, *Operator-limit distributions in probability theory*, J. Wiley, New York, 1993.
[73] Z. J. Jurek and W. Vervaat, *An integral representation for selfdecomposable Banach space valued random variables*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 62 (1983), 247–262.
[74] S. I. Kalmykov and D. B. Karp *Log-convexity and log-concavity for series in gamma ratios and applications*, arXiv preprint arXiv:1211.2882 (2012).
[75] J. Karamata, *Sur une inégalité rélative aux fonctions convexes*, publ. Math. Univ. Belgrade, 1 (1932), 145–148.
[76] S. Karlin, W. J. Studden, Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York, 1966.
[77] S. Karlin and A. Novikoff, Generalized convex inequalities. Pacific J. Math., 13 (1963), 1251–1279 .
[78] B. Kopociński, *Zarys teorii odnowy i niezawodności*, Warszawa, 1973.

[79] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, vol. 489, Państwowe Wydawnictwo Naukowe – Uniwersytet Śląski, Warszawa-Kraków-Katowice, 1985,

[80] A. Kumar and B. M. Schreiber, *Self-decomposable probability measures on Banach space*, Studia Math. 53 (1975), 55–71.

[81] A. Kumar and B. M. Schreiber, *Characterization of subclasses of class L probability distributions*, Ann. Probab. 6 (1978), 279–293.

[82] A. Kumar and B. M. Schreiber, *Representation of certain infinitely divisible probability measures on Banach spaces*, J. Multivariate Anal. 9 (1979), 288–303.

[83] B. P. Lathi, *systemy telekomunikacyjne*, WNT, Warszawa 1972.

[84] M.R. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootzen , *Extremes and related properties of random sequences and processes*, Berlin - New York, 1986.

[85] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces, Isoperimetry and Processes*, Springer, 1991.

[86] P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier–Villars, Paris, 1937.

[87] W. Linde, *Probability in Banach Spaces — Stable and Infinitely Divisible Distributions*, Wiley, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore, 1986.

[88] A. Lindner and K. Sato, *) Continuity properties and infinite divisibility of stationary distributions of some generalized Ornstein-Uhlenbeck processes*, Ann. Probab., 37 (2009), 250–274.

[89] A. Lindner and K. Sato, *Properties of stationary distributions of a sequence of generalized Ornstein-Uhlenbeck processes, Math. Nachr.*, Math. Nachr., 284 (2011), 2225-2248.

[90] M. Loéve, *Nouvelles classes de lois limites*, Bull. Soc. Math. France 73 (1945) 107–126.

[91] M. Loéve, *Probability Theory*, New York 1955.

[92] B. R. Levin, *Teoreticheskie osnovy statisticheskoi raditekhniki*, Moskva 1965.

[93] I. Lubacz, *Analiza możliwości określenia przydatności łącza do transmisji cyfrowej na podstawie krótkotrwałego pomiaru*, Rozprawy elektrotechniczne, z. 1, 1976.

[94] M. Maejima and Y. Naito, *Semi-selfdecomposable distributions and a new class of limit theorems*, Prob. Theory Relat. Fields 112 (1998), 13–31.

[95] M. Maejima, K. Sato and T. Watanabe, *Operator Semi-Selfdecomposability, $(C, Q)$-Decomposability nad Related Nested Classes*, Tokyo J. Math 22 (1999), 473–509.

[96] M. Maejima, K. Sato and T. Watanabe, *Completely Operator Semi-Selfdecomposable Distributions*, Tokyo J. Math 23 (2000), 235–253.

[97] M. Maejima, K. Suzuki and Y. Tamura, *Some multivariate infinitely divisible distributions and their projections*, Probab. Math. Statist. 19 (1999), 421–428.

[98] Gy. Maksa, Zs. Páles, *The equality case in some recent convexity inequalities*, Opuscula Math. **31, no. 2** (2011), 269–277.

[99] Gy. Maksa and Zs. Páles, *Decomposition of higher order Wright-convex functions*, J. Math. Anal. Appl. 359 (2) (2009), 439–443,

[100] A. W. Marschall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of majorization and Its Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 143 (1979) Academic Press, New York .

[101] J. Matkowski and T. Świątkowski, *On subadditive functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 187–197.

[102] J. E. Mazo and J. Salz, *Theory of error rates for digital FM*, Bell System Techn. J., 45 (1966), 1511–1535.

[103] A. J. McNeil, J. Nešlehová, Multivariate Archimedean copulas, d-monotone functions and $l$-norm symmetric distributions, Ann. Statist. 37 (5B) (2009) 3059-3097.

[104] M. M. Meerchaert and H. P. Scheffer, *Series representation for semistable laws and their domain of semistable attraction*, J. Theor. Probab. 9 (1996), 931–959.

[105] N. Merentes, K. Nikodem, *Remarks on strongly convex functions*, Aequationes Math.,80 (2010), 193–199.

[106] N. Merentes, K. Nikodem and S. Rivas, *Remarks on strongly Wright–convex functions*, Ann. Pol. Math, 102(3)(2011), 271-278.

[107] L. Michalski, K. Eckerdorf, J. Kucharski *Termometria: przyrządy i metody*, Politechnika Łódzka, Łódź 1998.

[108] B. A. Miller, B. Chatschik, *Uwolnij się od kabli: Bluetooth*, Helion, Gliwice 2003.

[109] F. Misheikis, *About certain classes of limiting laws*, Litovsk. Mat. Sb. 12 (1972), no. 3, 101–106 (in Russian).

[110] F. Misheikis, *Certain extensions of the class od stable distributions*, Litowsk. Mat. Sb. 12 (1972), no. 3, 89–99 (in Russian).

[111] F. Misheikis, *On certain classes of limit distributions*, Litovsk. Mat. Sb. 12 (1972), no. 4, 133–152 (in Russian).

[112] F. Misheikis, *Some limiting theorem for distributions of partial sums of a sequence of independent random variables*, Litowsk. Mat. Sb 14 (1974), no. 1, 129–140.

[113] F. Misheikis, *On intersection of some distribution classe*, Litovsk. Mat. Sb. 15 (1975), no. 2, 61-65 (in Russian).

[114] F. Misheikis, *Interrelationship between certain classes of limit distributions*, Lithuanian. Math. J. 15 (1976), 243–246 (in Russian).

[115] F. Misheikis, *On limit distributions of normalized partial sums of a sequence of infinite dimensional random elements*, Litowsk. Mat. Sb 23 (1983), no. 1, 152–162.

[116] D. S. Mitrinović and I. B. Lacković, *Hermite and convexity*, Aequationes Math. **28, no. 3** (1985), 229–232.

[117] F. C. Mitroi, *Connections Between the Jensen and the Chebychev Functionals*, Inequalities and Applications 2010,(2012), 217–227.

[118] E. Mohr, *Beitrag zur Theorie der konvexen Funktionen*, Math. Nachr., 8 (1951), 133 – 148.

[119] C. T. Ng. Functions generating Schur–convex sums. In *General inequalities, 5 (Oberwolfach, 1986)*, volume 80 of *Internat. Schriftenreihe Numer. Math.*, pages 433–438. Birkhäuser, Basel, 1987.

[120] C. P. NICULESCU and L. E. PERSSON, *Convex functions and their applications. A contemporary approach, Springer*, New York 2006.

[121] C.P. Niculescu and F. Popoviciu, The extension of majorization inequalities within the framework of relative convexity, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics (JIPAM) 7 (1)(2006), Article No. 27, 6pp.
[122] K. Nikodem. On some class of midconvex functions. *Ann. Polon. Math.*, 50(2):145–151, 1989.
[123] K. Nikodem, Zs. Páles, Generalized convexity and separation theorems, J. Conv. Anal. 14 (2) (2007) 239–247.
[124] J. A. Palmer, Function curvature, relative convexity and conjugate curvature, Technical Report, ECE Dept., UCSD (2002).
[125] J. A. Palmer, *Relative Convexity*, Technical Report, ECE Dept., UCSD (2003).
[126] J. Ohlin, *On a class of measures of dispersion with application to optimal reinsurance*, ASTIN Bulletin **5** (1969), 249-66.
[127] P. Papantoni-Kazakos and J. M. Paz *The performance of a digital FM system with discriminator. Intersymbol interference effects*, IEEE Trans. Comm. Tech., 23 (1975), 867–877.
[128] C. E. M. Pearce and A. M. Rubinov, *P-functions, quasi-convex functions and Hadamard-type inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **240, no. 1** (1999), 92–104.
[129] J. E. Pecaric, F. Proschan, Y. L. Tong, *Convex functions*, Academic Press, Inc. (1992).
[130] R. P. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem*, New York, 1966.
[131] A. Pinkus, D. Wulbert, *Extending n-convex functions*, Studia Math. 171 (2) (2005).
[132] K. Plewko A. Kostka et al., *Metody i przyrządy pomiarowe w teletransmisji cyfrowej*, WKŁ, Warszawa 1979.
[133] K. Plewko, *Nowe wielkości charakteryzujące zniekształcenia czasowe i odpowiadające tym wielkościom metody pomiarowe w zastosowaniu do przebiegow telegraficznych teledacyjnych*, Praca doktorska, Instytut Łączności, Warszawa 1974.
[134] E. S. Polovinkin, *Strongly convex analysis*, Sbornik Mathematics 187 (2) (1966) 103–130.
[135] B. T. Polyak, *Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions*, Soviet. Math. Dokl. 7 (1966) 72–75.
[136] T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Mathematica (Cluj) 8, 1934, 1–85.
[137] T. Popoviciu. Notes sur les fonctions convexes d'ordre superieur. Mathematica, 12 (1936), 81–92.
[138] T. Popoviciu, *Les Fonctions Convexes*, Hermann, Paris, 1944,
[139] S. Rajba, *Wpływ statycznych zniekształceń czasowych na stopę błędów w transmisji danych w obecności szumu gaussowskiego*, Przegląd Telekomunikacyjny, 1 (1981).
[140] S. O. Rice, *Noise in FM receivers*, Chapter 25 in M. Rosenblatt (ed.), Time Series Analysis, J. Wiley, New York 1963.
[141] A. W. Roberts and D. E. Varberg, *Convex Functions*, Pure and Applied Mathematics, vol. 57, Academic Press, New York-London, 1973.
[142] R. T. Rockalellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, N. J. 1970.
[143] S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces. Second edition*, PWN, Warszawa, 1984.
[144] H. L. Royden, Real analysis, Collier Macmillan (1966).
[145] R. A. Rosenbaum, *Sub-additive functions*, Duke Math J. **17** (1950), 227–247.
[146] G. N. Sakovic, *Solution of a mutivariate functional equation*, Ukrain. Mat. Zb. 13 (1961), 173–189 (in Russian).
[147] G. N. Sakovic, *Multivariate stable distribution*, PhD thesis, University of Kiev, 1965 (in Russian; unpublished).
[148] G Samorodnitsky and Taqqu M. S., *Stable non–Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall, London, 1993.
[149] M. Z. Sarikaya, E. Set and M. E. Özdemir, *On some new inequalities of Hadamard type involving h-convex functions*, Acta Math. Univ. Comenian. **79, no. 2** (2010), 265–272.
[150] K. Sato, *Urbanik's class $L_m$ of probability measures*, Ann. Sci. Coll. Lib. Arts Kanazawa Univ. 15 (1978), 1–10.
[151] K. Sato, *Class L of Multivariate Distributions and its Subclasses*, J. Multivariate Anal. 10 (1980), 207–232.
[152] K. Sato, *Absolute continuity of multivariate distributions of class L*, J. Multivariate Anal. 12 (1982), 89–94.
[153] K, Sato, *) Stochastic integrals with respect to Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Sûgaku, 63 (2) (2011), 17–37 (in Japanese).
[154] K. Sato and M. Yamazato, *Operator-selfdecomposable as limit distributions of processes of Ornstein-Uhlenbeck type*, Stochastic Process. Appl. 17 (1984), 73–100.
[155] K. Sato and M. Yamazato, *Completely operator-selfdecomposable distributions and operator-stable distributions*, Nagoya Math. J. 97 (1985), 71–94.
[156] I. Schur, *Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf die Determinantentheorie*, Sitzungber. Berl. Math. Ges. 22(1923), 9–20.
[157] L. Schwartz, *Thèorie des distributions*, Paris, Hermann, 1966,
[158] M. Sharpe, *Operator-stable probability distributions on vector groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969), 51–65.
[159] O. Stolz, *Grundzüge der Differenzial- and Integralrechnung*, Vol. I, Teubner, Leipzig, 1893.
[160] E. Talvila, *The regulated primitive integral*, Illinois J. Math. 53 (4) (2009), 1187–1219.
[161] N. V. Thu, *Multiply self-decomposable probability measures on Banach spaces*, Studia Math. 66 (1979), 160–175.
[162] N. V. Thu, *Limit theorems for random fields*, Dissertationes Math. 186 (1981).
[163] N. V. Thu, *Universal multiply self-decomposable probability measures on Banach spaces*, Probab. Math. Statist. 3 (1982), 71–84.
[164] N. V. Thu, *Fractional calculus in probability*, Probab. Math. Statist. 3 (1984), 173–189.
[165] N. V. Thu, *Multiply c-decomposable probability measures on Banach spaces*, Probab. Math. Statist. 5 (1985), 251–263.
[166] N. I. Tikhonov, *Statisticheskaya radiotekhnika*, Sovetskoe Radio, Moskva 1966.

[167] T. T. Tjhunk and P. M. Wittke, *Carrier transmission of binary data in restricted band*, IEEE Trans. Comm. Tech., 4 (1970).
[168] K. Topley, *J2ME, Almanach*, Helion, Gliwice 2003.
[169] G. L. Turin, *An introduction to matched filters*, IRE Trans. Inf. Th., Vol. IT-6 (3) (1960), 311–329.
[170] K. Urbanik, *A representation of self-decomposable distributions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 16 (1968), 209–214.
[171] K. Urbanik, *Self-decomposable probability distributions on* $\mathbb{R}^m$, Zast. Mat. 10 (1969), 91–97.
[172] K. Urbanik, *Lévy's probability measures on Euclidean spaces*, Studia Math. 44 (1972), 119–148.
[173] K. Urbanik, *Limit laws for sequences of normed sums satisfying some stability conditions*, in: Multivariate Analysis–III, P. R. Krishnalah (ed.), Academic Press, New York, 1973, 225–237.
[174] K. Urbanik, *Operator semigroups associated with probability measures*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 23 (1975), 75–76.
[175] K. Urbanik, *Some examples of decomposability semigroups*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 24 (1976), 915–918.
[176] K. Urbanik, *Autoregressive structures and decomposability semigroups*, Probab. Math. Statist. 4 (1984), 67–78.
[177] S. Varošanec, *On h-convexity*, J. Math. Anal. Appl. **326, no. 1** (2007), 303–311.
[178] W. Vervaat, On a stochastic difference equation and a representation of non-negative infinitely divisible random variables, Adv. Appl. Probab. 11 (1979) 750–783,
[179] D. V. Widder, *The Laplace Transform*, Princeton Univ. Press, 1941, New Jersey,
[180] Sz. Wąsowicz, Some properties of generalized higher-order convexity, Publ. Math. Debrecen 68 (1-2) (2006) 171–182.
[181] Sz. Wąsowicz, Support-type properties of convex functions of higher order and Hadamard-type inequalities, J. Math. Anal. Appl. 332 (2007) 1229-1241.
[182] Sz. Wąsowicz, Support-type properties of generalized convex functions, J. Math. Anal. Appl. 365 (2010) 415-427.
[183] Sz. Wąsowicz, *Inequalities between the quadrature operators and error bounds of quadrature rules*, J. Inequal. Pure Appl. Math. **8** (2007), no.2., Article 42, 8 pp.
[184] Sz. Wąsowicz, *On quadrature rules, inequalities and error bounds*, J. Inequal. Pure Appl. Math. **9** (2008), no.2, Article 36, 4 pp.
[185] R. E. Williamson, *Multiply monotone functions and their Laplace transforms*, Duke. Math. J., 23 (1956), 189–207.
[186] S. P. Weinstein, *Estimation of small probabilities by linarization of the tail of a probability distribution*, IEEE Trans. Comm. Tech., Vol. COM-19 (6) (1971), 867–877.
[187] K. Wesołowski, *Systemy radiokomunikacji ruchomej*, WKŁ, Warszawa 2003.
[188] S. J. Wolfe, *A characterization of Lévy probability distribution functions on Euclidean spaces*, J. Multivariate Anal. 10 (1980), 379–384.
[189] S. J. Wolfe, *A characterization of certain stochastic integrals, (Tenth Conference on Stochastic Processes and Their Applications, Contributed Papers)*, Stochastic Process. Appl. 12 (1982), 136.
[190] S. J. Wolfe, *On a continuous analogue of the stochastic difference equation* $X_n = \rho X_{n-1} + B_n$., Stochastic Processes. Appl. 12 (1982), 301-312.
[191] S. J. Wolfe, *Continuity properties of decomposable probability measures on Euclidean spaces*, J. Multivariate Anal. 13 (1983), 534–538.
[192] E. M. Wright, *An inequality for convex function*, Amer. Math. Monthly 61 (1954), 620–622.
[193] M. Yamazato, *OL distributions on Euclidean spaces*, Theory Probab. Appl. 29 (1984), 3–18.
[194] O. K. Zakusilo, *On classes of limit distributions in a summation scheme*, Theory Probab. Math Statist. 12 (1976), 44–48 (in Russian).
[195] O. K. Zakusilo, *Some properties of random vectors of the form* $\sum_0^\infty A^i \xi_i$, Theory Probab. Math. Statist. 13 (1977), 59–62 (in Russian).
[196] O. K. Zakusilo, *Some properties of classes* $L_c$ *of limit distributions*, Theory Probab. Math. Statist. 15 (1978), 68–73 (in Russian).
[197] V. M. Zolotarev, *One-dimensional Stable Distributions*, Transl. Math. Monographs 65, Amer. Math. Soc., Providence (1986).

## Prace wchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej

[R1] T. Rajba, *New integral representations of nth order convex functions*, J. Math. Anal. Appl., 379 (2) (2011), 736-747.
[R2] T. Rajba, An application of the Choquet theorem to the study of randomly–superinvariant measures. *Opuscula Math.*, 32 (2)(2012), 317–326.
[R3] T. Rajba, A generalization of multiple Wright–convex functions via randomization. *J. Math. Anal. Appl.*, 388 (1) (2012), 548–565.
[R4] T. Rajba and B. Micherda, *On some Hermite-Hadamard-Fejér inequalities for (k,h)-convex functions, Math.* Inequal. Appl. 15 (4) (2012), 931-940.
[R5] T. Rajba, K. Nikodem and W. Wąsowicz, *On the classes of higher-order Jensen-convex functions and Wright-convex functions*, J. Math. Anal. Appl., 396 (2012), 261-269.

## Pozostałe prace niewchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej


[P1] T. Niedbalska, *An example of the decomposability semigroup*, Coloq.Math., 39 (1978), 137 – 139.

[P2] T. Rajba, *On decomposability semigroups for certain probability measures*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. 28 (1980), 415 – 418.

[P3] T. Niedbalska-Rajba, *On decomposability semigroups on the real line*, Colloq. Math. 44 (1981), 347–348.

[P4] T. Rajba, *Pewne związki analityczne występujące pomiędzy statycznymi zniekształceniami czasowymi, szumem gaussowskim, a prawdopodobieństwem błędów w transmisji cyfrowej*, Rozprawy Elektrotechniczne (Electronics and Telecommunications Quaterly), 30 (1984), 907-922.

[P5] T. Rajba, *A representation of distributions from certain classes* $L_s^{id}$, Probability and Mathematical Statistics, 3 (2) (1984), 155 – 171.

[P6] T. Rajba and S. Rajba *The performance of a digital FSK system with actual discriminator; time distortions effects*, Proceedings of the 8th International Conference on Remote Data Transmission, Praha, Karlovy Vary (Czech Republic), 1987, 80 – 81.

[P7] T. Rajba and S. Rajba *The Performance of a Digital FSK System with Actual Discriminator: Time Distortions Effects*, Applicationes Mathematicae, 20 (2) (1990), 261 – 279.

[P8] T. Rajba, *On certain subclasses of the classes* $L_c$, Probability and Mathematical Statistics, 19 (1)(1999), 171–180.

[P9] T. Rajba, *On multiple decomposability of probability measures on R*, Demonstratio Mathematica, 34 (2) 2001, 275–294.

[P10] T. Rajba, *Multiply c-decomposable probability measures on R and their characteristic functions*, Probability and Mathematical Statistics, 22 (2) (2002 ), 443–456.

[P11] T. Rajba, *A generalization of multiply monotone functions*, Radovi Matematicki 11 (2002-2003) 271 – 293.

[P12] T. Rajba and S. Rajba *Estimations of measuring signal transmission quality*, Technique of measurement and metrology, 62 (2003), 16–18.

[P13] T. Rajba, S. Rajba and N.A. Kuzemko, *Estimation of the dispersion of dynamic time distortions in a Digital FSK System*, , Bulletin of the Technology University of Podillya, 2 (1) (2004), 203–206.

[P14] T. Rajba, S. Rajba and J.Szczepanik, *Optimum control system on a yaht*, II National Conference and IV National Seminar Scientific and technical problems in competitional sailing, 1-10.04.2005, STS Pogoria, 103–110.

[P15] T. Rajba, *On limit distributions of some normed sums*, Transactions of the 25 Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Maiori/Salerno (Italy) (2005), 234–241.

[P16] T. Rajba, *A generalization of operator-selfdecomposable distributions on Euclidean spaces*, Journal of Mathematical Sciences , Proceedings of the 23 Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, 132 (5) (2006), 660–667.

[P17] T. Rajba, M. Karpinski and S. Rajba *Measurement and information system used the mobile phone GSM and Bluetooth*, PAK, 53 (12)(2007), 79–81.

[P18] T. Rajba, *On the fractional decomposability of infinitely divisible probability measures*, Transactions of the 26th International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Nahariya(Israel) (2007), 167–172.

[P19] T. Rajba, *Nested classes of C-semi-selfdecomposable distributions*, Statistics and Probability Letters, 79 (24) (2009), 2469-2475.

[P20] T. Rajba and S. Rajba *Wireless sensor convergecast based on random operations procedure*, PAK, 56 (3) (2010), 255–258.

[P21] T. Rajba and S. Wąsowicz *Probabilistic characterization of strong convexity*, Opuscula Math., 31 (1) (2011), 97–103.

[P22] T. Rajba and S. Rajba *Wireless sensor network with random sending*, Knowledge in telecommunication technologies and optics, (2011), 170–175.

[P23] T. Rajba, K. Nikodem and S. Wąsowicz *Functions Generating Strongly Schur-Convex Sums*, ISNM161-GI-PART4-CHAPTER13 Inequalities and Applications 2010, (2012), 175-182 .

[P24] T. Rajba and S. Rajba *The probability of collisions in Wireless Sensor Network with random sending*, -PRZEGLĄD ELEKTROTECHNICZNY (Electrical Review), R. 88 NR 9a (2012), 243–248.

[P25] T. Rajba, *On some relative convexities*, submitted.

[P26] T. Rajba, *On the Ohlin lemma for Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities*, submitted.

[P27] T. Rajba, *On the integral representation, strong delta-convexity and Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for delta-convex functions of higher order*, submitted.

[P28] S. Rajba, T. Rajba, P. Raif and M. Mahmud, *Wireless Sensor Networks in Application to Patients Health Monitoring*, praca została przyjęta do prezentacji na IEEE Symposium Series on Computational Intelligence 2013, Singapore, i do publikacji w Conference Proceedings published by IEEE.


Teresa Rajba