Prof. dr hab. Aleksander Błaszczyk
Zakład Teorii Mnogości i Topologii
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Śląskiego

Recenzja rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego dr. Szymona Żeberskiego

Dr Szymon Żeberski uzyskał stopień doktora w roku 2004 na Uniwersytecie Wrocławskim na podstawie rozprawy "Klasyfikacja dużych liczb kardynalnych oraz pewne własności mierzalnych podzbiorów prostej rzeczywistej". Promotorem doktoratu był prof. dr hab. Jacek Cichoń. Obecnie habilitant pracuje w Katedrze Informatyki na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej.

Rozprawa habilitacyjna dr Żeberskiego jest zatytułowana "Niemierzalność w przestrzeniach polskich" i składa się z ośmiu publikacji. Wyłącznym autorem trzech spośród nich jest habilitant. Jedna praca jest wspólna z Marcinem Michalskim, a w pozostałych czterech współautorem jest Robert Rałowski. Szczegółowy opis wkładu współautorów został przedstawiony we wspólnych oświadczeniach (Załączniki 9 i 10). Wiadomo jak trudne, czy wręcz niemożliwe, jest dokładne zmierzenie wkładu autorów twierdzenia matematycznego w sytuacji gdy powstaje ono w trakcie dyskusji przy tablicy. Jednak z załączonych oświadczeń wynika jasno, że wkład każdego ze współautorów należy uznać za jednakowy. Z oświadczeń wynika też, że współpraca obydwu współautorów z habilitantem jest nie tylko owocna, lecz także jest oparta na zdrowych i jasnych zasadach. W związku z tym fakt, że pięć spośród ośmiu prac przedstawionych jako rozprawa habilitacyjna to prace wspólne, w moim przekonaniu nie osłabia wniosku o habilitację. Wręcz przeciwnie, wzmacnia go gdyż świadczy o umiejętności współpracy z innymi matematykami, a także o tym, że uprawiana przez niego tematyka jest aktualna i interesująca także dla innych badaczy.

Prace dr. Żeberskiego wchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej opublikowane są w dobrych i bardzo dobrych czasopismach właściwych dla tematyki przez niego uprawianej. Dwie prace ukazały się w Houston Journal of Mathematics, a po jednej w Topology and its Applications, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Central European Journal of Mathematics, Archives for Mathematical Logic, Czechoslovak Mathematical Journal i Mathematical Logic Quartarely. Także pozostała część dorobku naukowego dr Żeberskiego, składająca się z dziewięciu prac, została opublikowana w większości w bardzo dobrych czasopismach takich jak: Fundamenta Mathematicae, Israel Journal of Mathematics czy Proceedings of the American Mathematical Society.

Wszystkie prace wchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej dr. Żeberskiego dotyczą w istocie zagadnień związanych z mierzalnością względem σ–ciała generowanego przez zbiory borelowskie w przestrzeni polskiej i dany σ–ideał. Jest to dość wąska tematyka uprawiana przez niezbyt wielu badaczy. Byli jednak wśród nich tacy matematycy jak Sierpiński, Łuzin, Mazurkiewicz, Kuratowski, Marczewski i Frolik, a współcześnie Bukovský, Fremlin, Shelah i Todorčević. Jest to więc tematyka ważna, a jednocześnie wymagająca bardzo wyrafinowanych metod badawczych. Wydaje się, że pierwotną motywacją dla niej było twierdzenie udowodnione przez Kuratowskiego w 1976. Wykazał on, że przy założeniu hipotezy continuum z każdej rodziny parami rozłącznych zbiorów pierwszej kategorii na prostej rzeczywistej można wybrać podrodzinę, której suma nie ma własności Baire'a. Później w roku 1979, nie zakładając już hipotezy continuum Bukowský wykazał, że z każdego rozbicia prostej rzeczywistej na zbiory pierwszej kategorii można wybrać podrodzinę, której suma nie ma własności Baire'a, a z każdego rozbicia na zbiory miary Lebesgue'a zero można wybrać podrodzinę, której suma jest niemierzalna w sensie Lebesgue'a. Twierdzenia tego typu można w naturalny sposób przenieść z prostej rzeczywistej na przestrzenie polskie wprowadzając pojęcie zbiorów $\mathcal{I}$–mierzalnych, gdzie $\mathcal{I}$ jest σ–ideałem o bazie borelowskiej, a to oznacza, że każdy niepusty element ideału zawiera niepusty zbiór borelowski. Mówimy wówczas, że zbiór jest $\mathcal{I}$–mierzalny gdy należy do σ–ciała generowanego przez sumę tego ideału i σ–ciała zbiorów borelowskich danej przestrzeni polskiej.

Pojęcie zbioru całkowicie $\mathcal{I}$–niemierzalnego pojawia się w sposób bardzo naturalny. Jest to zbiór, którego przekrój z każdym zbiorem borelowskim spoza ideału jest $\mathcal{I}$–niemierzalny. W przypadku gdy $\mathcal{I}$ jest ideałem podzbiorów przeliczalnych prostej, zbiory całkowicie $\mathcal{I}$–niemierzalne to zbiory Bernsteina, a gdy $\mathcal{I}$ jest ideałem zbiorów miary Lebesgue'a zero na odcinku $[0,1]$, to wówczas zbiór jest całkowicie $\mathcal{I}$–niemierzalny gdy jego miara zewnętrzna jest równa 1, a miara wewnętrzna jest równa 0.

Najbardziej chyba znane w omawianej dziedzinie, a zarazem bardzo piękne twierdzenie Brzuchowskiego, Cichonia, Grzegorka i Rylla–Nardzewskiego z roku 1997 mówi, że jeśli w przestrzeni polskiej ideał $\mathcal{I}$ z bazą borelowską zawiera wszystkie zbiory jednoelementowe, to z każdej rodziny punktowo skończonej elementów ideału, której suma nie należy do ideału można wybrać podrodzinę, której suma jest $\mathcal{I}$–niemierzalna. Powstaje naturalne pytanie o to czy w twierdzeniu Brzuchowskiego, Grzegorka, Cichonia i Rylla–Nardzewskiego wspomniana suma jest całkowicie $\mathcal{I}$–niemierzalna. Do tej pory tego problemu nie rozstrzygnięto. Fremlin i Todorčević udowodnili jedynie, że dla każdego $\epsilon > 0$ i każdej partycji odcinka $[0,1]$ na zbiory miary zero istnieje podrodzina której miara wewnętrzna jest mniejsza od ϵ, a miara zewnętrzna jest większa od $1 - \epsilon$. Zmierzając w stronę rozwiązania tego problemu dr Żeberski w pracy [H2] (numeracja jak w autoreferacie) przy założeniu, że nie istnieje liczba quasi–mierzalna nie większa od 2^ω, a ideał $\mathcal{I}$ ma bazę borelowską i własność Suslina udowodnił, że dla każdej punktowo skończonej rodziny elementów z $\mathcal{I}$ o sumie spoza $\mathcal{I}$ istnieje podrodzina o sumie całkowicie $\mathcal{I}$–niemierzalnej w sumie tej rodziny. W tym miejscu trzeba wyjaśnić co to są liczby quasi–mierzalne gdyż pojawiają się kilkakrotnie w pracach habilitanta. Chodzi o takie liczby kardynalne κ, że w algebrze $\mathcal{P}(\kappa)$ wszystkich podzbiorów liczby kardynalnej (zbioru) κ istnieje σ–zupełny ideał $\mathcal{I}$ o tej własności, że ilorazowa algebra Boole'a $\mathcal{P}(\kappa)/\mathcal{I}$ ma własność Suslina. W przypadku liczb kardynalnych mierzalnych algebra ta jest dwuelementowa.

Wyniki dotyczące całkowitej $\mathcal{I}$–niemierzalności znajdują się w kilku pracach habilitanta i jak się wydaje, należą do najważniejszej części jego dorobku. Oprócz pracy [H2] są także w [H3], [H4], [H5], [H6] i [H8], a także w tej części dorobku naukowego, która nie weszła w skład habilitacji, na przykład w pracy [P3].

Dorobek naukowy habilitanta wykracza jednak znacznie poza omówioną powyżej tematykę. Na uwagę zasługują w szczególności wyniki na temat uogólnionych zbiorów Łuzina i Sierpińskiego. Są zawarte głównie w pracach [H7] i [H8]. Za bardzo wartościowe trzeba też uznać twierdzenia w duchu Steinhausa o sumach algebraicznych, które są skupione w pracach [P4] i [P6] spoza rozprawy habilitacyjnej. Nie można też pominąć prac [P7] i [P8] nawiązujących do Diagramu Cichonia, uznanego wśród matematyków zajmujących się teorią mnogości za sztandarową specjalność Szkoły Wrocławskiej.

Ważną cechą charakterystyczną dorobku naukowego dr. Żeberskiego jest to, że stosuje on zaawansowane i wyrafinowane metody teorii mnogości w tematyce, którą ze względu na takie pojęcia jak przestrzenie polskie, zalicza się zwykle do topologii, a także w dużej części do teorii funkcji rzeczywistych gdyż wiele spośród uzyskanych wyników dotyczy też własności podzbiorów prostej rzeczywistej. Oprócz wspomnianych już liczb kardynalnych quasi–mierzalnych pojawiają się niebanalne twierdzenia teorii algebr Boole'a, a także twierdzenie Shoenfielda o absolutności zdań Σ^1_2 należące już do "czystej" logiki; patrz np. prace [P1] i [P2]. Moją szczególną uwagę zwróciło piękne zastosowanie twierdzenia Gitika i Shelaha mówiące, że jeśli $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ jest ideałem σ–zupełnym, to algebra Boole'a ilorazowa $\mathcal{P}(\kappa)/\mathcal{I}$ nie jest izomorficzna z algebrą Cohena. Twierdzenie to zostało wykorzystane w pracy [H6], a także w pracy [P3]. Dr Żeberski stosuje też bardzo umiejętnie metody topologii ogólnej. Przykładem jest praca [H1], w której zastosowano twierdzenie Kowalsky'ego o zanurzaniu przestrzeni metrycznej w produkt przeliczalnie wielu jeży.

Autoreferat rozprawy habilitacyjnej dr Żeberskiego, liczący ponad 30 stron, został przygotowany bardzo starannie. Autor precyzyjnie przedstawił motywacje dla uprawianej tematyki i dość dokładnie opisał swój wkład. Jednak z recenzenckiego obowiązku muszę wytknąć niedokładne cytowanie rezultatu Gitika i Shelaha na str. 3 (wiersze 3 – 1 od dołu), powtórzone na str. 20 (wiersze 21 – 23 od góry). Brakuje założenie, że ideał jest σ–zupełny. Ponad to sformułowanie jest niezręczne, bo iloczyn kartezjański algebr Boole'a jest przemienny z dokładnością do izomorfizmu.

Analiza rozprawy habilitacyjnej i pozostałych publikacji dr. Szymona Żeberskiego prowadzi do konkluzji, że wyniki zawarte w tych pracach stanowią znaczący dorobek naukowy. Autor rozwiązał kilka stawianych przez innych badaczy problemów, rozwinął pomysłowe techniki, dostrzegł nowe, często zaskakujące związki między różnymi zagadnieniami. Tego rodzaju wkład w rozwój matematyki uważam za szczególnie ważny. Trzeba także dodać, że habilitant, mimo tego, że pracuje w tematyce bardzo zawiłej oraz technicznie trudnej, jest matematykiem rzetelnym i dokładnym. Dowody, które przedstawia nie tylko dążą do doskonałości, jak to bywa w niektórych tekstach matematycznych, lecz rzeczywiście są niemal doskonałe.

Reasumując, z pełnym przekonaniem i bez wątpliwości stwierdzam, że dr Szymon Żeberski całkowicie spełnia wszystkie wymagania, zarówno formalne jak i zwyczajowe, stawiane kandydatom do stopnia doktora habilitowanego. Zdecydowanie popieram wniosek o nadanie dr. Szymonowi Żeberskiemu stopnia naukowego doktora habilitowanego nauk matematycznych.

Katowice, 4.03.2016

A. Błaszczyk

Aleksander Błaszczyk