

prof. Grzegorz Plebanek
Instytut Matematyczny
Uniwersytetu Wrocławskiego
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław
e-mail: GRZES@MATH.UNI.WROC.PL

29 lutego 2016 roku

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dr. Szymona Żeberskiego

1. INFORMACJE OGÓLNE

Dr Szymon Żeberski ukończył studia matematyczne na Uniwersytecie Wrocławskim w roku 2000 i uzyskał stopień doktora nauk matematycznych na podstawie rozprawy napisanej pod kierunkiem profesora Jacka Cichonia w roku 2004. Habilitant jest obecnie adiunktem w Katedrze Informatyki Wydziału PPT Politechniki Wrocławskiej; do niedawna ta jednostka była częścią Instytutu Matematyki. W latach 2004-07 pracował w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego.

W toczącym się postępowaniu habilitacyjnym dr Szymon Żeberski przedstawił, jako swoje osiągnięcie naukowe¹, cykl prac zatytułowany

Niemierzalność w przestrzeniach polskich.

Cykl ten składa się z ośmiu artykułów opublikowanych w latach 2005-2015: są to trzy prace własne oraz pięć prac napisanych we współpracy z innymi matematykami, głównie z dr. Robertem Rałowskim (PWr).

2. OMÓWIENIE GŁÓWNYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWYCH HABILITANTA

Zbiory niemierzalne czy też niemające własności Baire'a to ważne narzędzie badania struktury prostej rzeczywistej i, ogólniej, nieprzeliczalnych przestrzeni polskich. Przykładem jest znane twierdzenie, mówiące o tym że z każdej partycji odcinka na zbiory miary zero można zbudować zbiór niemierzalny. Jest to dość oczywiste, jeśli przyjąć, że nie istnieją liczby kardynalne rzeczywiście mierzalne $\leq \mathfrak{c}$, ale taki fakt można udowodnić w zwykłej teorii mnogości. Znane twierdzenie 'czterech Polaków' (z pracy Brzuchowskiego, Cichonia, Grzegorka i Ryll-Nardzewskiego) podaje elegancki dowód, który można zastosować do szerokiej klasy ideałów mających bazę borelowską. Twierdzenie to jest punktem wyjścia do rozważań w wielu pracach prezentowanego osiągnięcia naukowego. Poniższe

¹w niniejszej recenzji nazywane też tradycyjnie rozprawą habilitacyjną

wyliczenie zagadnień i uzyskanych wyników jest niekompletne i ma za zadanie jedynie przybliżyć tematykę badań naukowych habilitanta.

W pracy [H1] autor rozważa funkcje $T \rightarrow X$, gdzie T jest nieprzeliczalną przestrzenią polską, a X jest dowolną przestrzenią metryczną. Główny wynik orzeka, że jeśli taka funkcja jest, w pewnym bardzo słabym sensie, baire'owsko mierzalna to jest prawie ośrodkowo wartościowa. Jest to uogólnienie wcześniejszego rezultatu dla funkcji mających własność Baire'a. Autor dowodzi też, że osłabienie założenia metryzowalności X na rzecz normalności topologicznej nie pozwala uzyskać takiego rezultatu w ZFC. Skonstruowany przykład istnieje w modelu Random, a $X = \omega_1$ jest wyposażona w topologię porządkową.

W pracy [H2] Sz. Żeberski dowodzi twierdzenie, które w szczególności stwierdza że jeżeli \mathcal{A} jest punktowo skończonym pokryciem $[0, 1]$ złożonym ze zbiorów miary Lebesgue'a λ zero to istnieje rodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ taka że zbiór $X = \bigcup \mathcal{A}'$ jest całkowicie niemierzalny (to znaczy $\lambda^*(X) = 1$ i $\lambda_*(X) = 0$). W istocie rozważa się tutaj pewną ogólną, abstrakcyjną wersję tego twierdzenia, która pozwala na przykład zastąpić ideał miary przez ideał kategorii i odpowiednio dostosować rozważane pojęcia. Wynik przedstawiony w tej pracy wymaga dość 'słabego' założenia teoriomnogościowego (spełnionego w każdym modelu ZFC, w którym nie ma słabo nieosiągalnych liczb kardynalnych).

Artykuł [H3], napisany wspólnie z R. Rałowskim, rozważa abstrakcyjne σ -ideały \mathcal{I} na przestrzeni polskiej X . Zbiór $Z \subseteq X$ jest całkowicie \mathcal{I} -niemierzalny jeżeli $B \cap Z \neq \emptyset \neq B \setminus Z$ dla każdego zbioru borelowskiego $B \notin \mathcal{I}$. Autorzy dowodzą tu szereg rezultatów o istnieniu takich zbiorów, rozważanych w nawiązaniu do partycji przestrzeni, funkcji oraz funkcji wielowartościowych mierzalnych, uogólniając wcześniejsze wyniki własne i innych matematyków.

Praca [H4] ma swoje korzenie w klasycznym rezultacie Sierpińskiego: istnieją zbiory miary zero $A, B \subseteq \mathbb{R}$, dla których suma algebraiczna $A + B$ jest niemierzalna. To twierdzenie było uogólniane na różne sposoby przez Kharazishvili'ego, Ciesielskiego, Kysiaka i innych. Autorzy [H4] (Rałowski i Żeberski) prezentują bardzo ogólną wersję wyniku, w języku abstrakcyjnych relacji binarnych. W szczególności prowadzi to do uzyskania ogólnego wyniku o niemierzalności obrazów funkcji zdefiniowanych na produktach przestrzeni polskich.

W pracy [H6] habilitant rozważa wyniki analogiczne do twierdzenia Gitika-Shelaha, mówiące o tym że dowolny ciąg zbiorów na prostej rzeczywistej można urozłączyć z zachowaniem zewnętrznej miary Lebesgue'a. Zaprezentowano podobne twierdzenie dla ideału zbiorów pierwszej kategorii (w pewnej ogólniejszej postaci) oraz uogólnienie wyniku, dotyczące abstrakcyjnych σ -ideałów (w tym przypadku przy pewnym założeniu o dużych liczbach kardynalnych).

Zbiory Sierpińskiego i Łuzina to dwa klasyczne obiekty rozważane w badaniu struktury prostej rzeczywistej. Autorzy [H7] (Rałowski i Żeberski) rozważają wspólne uogólnienie obu pojęć — zbiory Łuzina względem ustalonej pary σ -ideałów. Dowodzą twierdzenia o istnieniu takich zbiorów w ogólnej sytuacji, pokazując dodatkowo, że może istnieć wiele uogólnionych zbiorów Łuzina, które nie są borelowsko równoważne. Następnie w pracy bada się pojęcia forcingu

zachowujące uogólnione zbiory Łuzina.

3. OCENA ROZPRAWY HABILITACYJNEJ

Nie sposób nie rozpocząć oceny przedstawionej rozprawy od stwierdzenia, że zakres tematyczny przedstawionej przez dr. Żeberskiego rozprawy habilitacyjnej jest bardzo wąski. Wiele jego prac dotyczy jednego pojęcia, σ -ideałów na przestrzeniach polskich, mających borelowską bazę, a wiele uzyskanych rezultatów orzeka o istnieniu zbiorów niemierzalnych bądź całkowicie niemierzalnych względem σ -ciała generowanego przez dany ideał i zbiory borelowskie. Tak zawężony obszar badań powoduje, że oddźwięk rezultatów habilitanta jest na razie nieznaczący, z 25 cytowań w bazie MATHSCINET większość stanowią autocytowania.

Z drugiej strony warto podkreślić, że jakkolwiek w omawianych artykułach pojawiają się bardzo klasyczne zagadnienia to stosowane techniki są dość nowoczesne i złożone, a niektóre badane zagadnienia są bardzo subtelne. Przykładem może być tutaj twierdzenie Gitika-Shelaha o urozłącznianiu zbiorów z zachowaniem zewnętrznej miary Lebesgue'a i uogólnienia tego twierdzenia zaprezentowane w pracy [H6]. Zarówno oryginalne twierdzenie jak i jego rozszerzenia opierają się na innym rezultacie Gitika-Shelaha, że algebra postaci $P(\kappa)/\mathcal{I}$ nie jest izomorficzna z algebrą Cohena (zbiorów borelowskich modulo ideał zborów pierwszej kategorii) dla żadnego σ -ideału.

Niewątpliwym osiągnięciem dr. Żeberskiego jest postawienie, jak się wydaje, trudnego pytania, czy (w szczególności) z każdej partycji odcinka na zbiory miary zero można utworzyć zbiór całkowicie niemierzalny względem miary Lebesgue'a — jest to Problem 3.9 z artykułu [H2]. Pytanie to zostało częściowo rozwiązane przez Fremlina i Todorčevića (patrz preprint cytowany w autoreferacie jako [FT]). Tego typu zagadnienia są w dalszym ciągu przedmiotem zainteresowań znanych matematyków, por. na przykład niedawny preprint Kumara i Shelaha (pozycja 1068 w archiwum Saharona Shelaha) o istnieniu całkowicie niemierzalnej transwersali.

Warto wspomnieć o pracy [H7], która wydaje się prezentować wartościowe wyniki o istnieniu uogólnionych zbiorów Łuzina względem pary ortogonalnych σ -ideałów; koncepcja ta naturalnie rozszerza klasyczne pojęcia zbioru Łuzina i zbioru Sierpińskiego. Autorzy pracy uzyskali szereg wyników o istnieniu takich zbiorów przy pewnych założeniach o współczynnikach kardynalnych rozważanych ideałów oraz przeprowadzili wnikliwą analizę zachowania zbiorów Łuzina w forcingowych rozszerzeniach.

Prace habilitanta demonstrują jego techniczną biegłość w zakresie deskryptywnej teorii mnogości, kombinatoryki nieskończonej i forcingu iterowanego. Jak się wydaje, jego warsztat naukowy pozwala na prowadzenie badań dotyczących bardzo aktualnych i różnorodnych zagadnień. Taki rozwój tematyki badawczej już zresztą nastąpił - w ostatnich pracach, o których mowa poniżej, omawia się między innymi σ -ideały w kontekście działania grupy homeomorfizmów na kostce Hilberta i innych przestrzeniach.



Prace Szymona Żeberskiego ukazały się w dobrych czasopismach matematycznych, napisane są językiem zwięzłym i czytelnym, przy niewielkiej ilości usterek edytorskich czy językowych.

4. POZOSTAŁY DOROBEK NAUKOWY HABILITANTA

Oprócz ośmiu artykułów wchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej, Sz. Żeberski jest autorem bądź współautorem 9 innych publikacji. Dwie pierwsze zaliczają się do dorobku uzyskanego przed doktoratem.

Z pozostałych prac warto wspomnieć o tematyce trzech najnowszych publikacji powstałych we współpracy z T. Banakhem, M. Morayne i R. Rałowskim. W obszernej pracy (czterech autorów, Israel J. Math.) dokonuje się pewnej klasyfikacji topologicznie niezmienniczych σ -ideałów na kostce Hilberta $[0, 1]^\omega$. Klasyfikacja ta pozwala oszacować współczynniki kardynalne niektórych klasycznych ideałów, a w szczególności odpowiedzieć na pytanie, czy liczba zborów Cantora potrzebna do pokrycia odcinka i kostki Hilberta jest taka sama.

W pracy Banakha, Rałowskiego i Żeberskiego (Proc. Amer. Math. Soc.) rozważa się zerowymiarową przestrzeń metryczną zwartą z miarą o pewnych naturalnych własnościach i dokonuje klasyfikacji σ -ideałów niezmienniczych ze względu na homeomorfizmy zachowujące miarę.

5. CAŁOKSZTAŁT DOROBKU NAUKOWEGO HABILITANTA

Dr Szymon Żeberski jest autorem bądź współautorem 17 artykułów naukowych opublikowanych w dobrych i bardzo dobrych czasopismach matematycznych. Habilitant czynnie uczestniczył w wielu konferencjach tematycznych. Brał udział w dwustronnych projektach badawczych (z Austrią i Republiką Czeską) oraz był głównym wykonawcą grantu NCN.

Na uwagę zasługuje działalność dydaktyczna i organizacyjna kandydata: wypromował wielu magistrów i jest obecnie opiekunem doktoranta Politechniki Wrocławskiej; wygłaszał też odczyty dla studentów i wykłady o charakterze popularnonaukowym. Od pewnego czasu prowadzi na Politechnice Wrocławskiej aktywne działające seminarium z teorii mnogości, które jest w tej chwili jedynym forum regularnych spotkań matematycznych we Wrocławiu poświęconych tej tematyce.

6. KONKLUZJA

Niezależnie od pewnych zastrzeżeń wyrażonych powyżej, dotyczących zakresu tematyki badawczej, uważam że dr Żeberski zdecydowanie spełnia zwyczajowe oczekiwania środowiska matematycznego oraz wymagania ustawowe, stawiane kandydatom do stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk matematycznych.

Podsumowując, dr Szymon Żeberski ma znaczący dorobek naukowy, a przedstawione przez niego osiągnięcia naukowe jest cyklem prac zamieszczonych w dobrych czasopismach matematycznych. Prace cyklu stanowią znaczący wkład w rozwój uprawianej przez niego dyscypliny. Dlatego w dalszych pracach Komisji będę popierał wniosek o nadanie mu stopnia doktora habilitowanego.

F. P. Lebański