Prof. dr hab. Aleksander Błaszczyk
Zakład Teorii Mnogości i Topologii
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Śląskiego

Recenzja rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego dr. inż. Roberta Rałowskiego

Robert Rałowski uzyskał stopień doktora nauk fizycznych w roku 1998. Został on mu nadany uchwałą Rady Naukowej Instytutu Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu Wrocławskiego na podstawie rozprawy "Algebry Wicka z dodatkowymi relacjami komutacji i ich zastosowania w fizyce statystycznej". Jednym z recenzentów w tym przewodzie był znany matematyk, specjalista w zakresie analizy harmonicznej i probabilistyki, Profesor Marek Bożejko.

Po doktoracie, do roku 1992 dr Rałowski pracował na stanowisku asystenta w Instytucie Niskich Temperatur i Badań Strukturalnych Polskiej Akademii Nauk, a następnie w Instytucie Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu Wrocławskiego. Od 1999 jest związany z Politechniką Wrocławską gdzie pracował na stanowisku adiunkta w Instytucie Matematyki i Informatyki do roku 2014. Obecnie jest adiunktem w Katedrze Informatyki Wydziału Podstawowych Problemów Techniki tej uczelni.

Rozprawa habilitacyjna dr Rałowskiego pod tytułem *"Niemierzalne podzbiory w przestrzeniach polskich"* składa się z ośmiu publikacji. Wyłącznym autorem trzech spośród nich jest habilitant. Współautorami pracy [H1] (według numeracji w autoreferacie) są: Jacek Cichoń, Michał Morayne, Czesław Ryll–Nardzewski i Szymon Żeberski. Z bardzo szczegółowego oświadczenia żyjących współautorów (Załącznik nr 8) wynika, że udział Roberta Rałowskiego w tej pracy wynosi 20 procent i jest taki sam jak udział pozostałych autorów. W pozostałych czterech pracach jedynym współautorem jest dr hab. Szymon Żeberski. Wśród tych prac trzy ([H5] [H6] i [H7]) wchodziły w skład dorobku habilitacyjnego Szymona Żeberskiego. Udział habilitanta we wszystkich wspólnych pracach z Symonem Żeberskim został bardzo szczegółowo opisany we wspólnym oświadczeniu współautorów (Załącznik nr 9). Wynika z niego niezbicie, że wkład dr Rałowskiego wynosił 50 procent i bez jego udziału prace te by nie powstały. Biorąc pod uwagę specyfikę pracy naukowej matematyków, a więc to, że prace współautorskie powstają w wyniku dyskusji, w trakcie których trudno jest zmierzyć wagę przedstawianych uwag i pomysłów, udział Roberta Rałowskiego we wspólnych pracach z Szymonem Żeberskim należy uznać za taki sam jak udział jego współautora.

Wszystkie prace dr Roberta Rałowskiego wchodzące w skład habilitacji poza pracą [H4], która się ukazała w *Far East Journal of Mathematical Sciences*, zostały opublikowane w dobrych i bardzo dobrych, adekwatnych dla tej tematyki renomowanych czasopismach takich jak *Topology and Applications*, *Houston Journal of Mathematics*, *Central European Journal of Mathematics* oraz *Czechoslovak Mathematical Journal*.

Zakres tematyczny prac wchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej dr. Rałowskiego, a także całego jego dorobku w zakresie matematyki, jest dość wąski. Wszystkie prace dotyczą zagadnień związanych z mierzalnością względem σ–ciała generowanego przez zbiory borelowskie w przestrzeni polskiej i dany σ–ideał. Jest to wąska tematyka uprawiana przez niezbyt wielu badaczy. Konsekwencją tego jest niewielka, jak na razie, liczba cytowań prac matematycznych dr. Rałowskiego. W odróżnieniu do nich jego prace w zakresie fizyki są dość często cytowane. Jednak ze zrozumiałych względów do nich nie będę się odnosił. Z drugiej jednak strony tematyka, w której pracuje dr Rałowski jest bardzo klasyczna i wywodzi się od takich matematyków jak Sierpiński, Łuzin, Mazurkiewicz, Kuratowski i Marczewski. Współcześnie tematyką tą zajmowali się tak znani matematycy jak Bukovský, Fremlin, Shelah i Todorčević. Z tych chociażby powodów trzeba uznać, że jest to tematyka ważna, a jednocześnie wymagająca bardzo wyrafinowanych metod badawczych.

Wydaje się, że oprócz dawno znanych konstrukcji zbiorów niemierzalnych najważniejszą motywacją dla tej tematyki było twierdzenie udowodnione przez Kuratowskiego w 1976. Wykazał on, że przy założeniu hipotezy continuum z każdej rodziny parami rozłącznych zbiorów pierwszej kategorii na prostej rzeczywistej można wybrać podrodzinę, której suma nie ma własności Baire'a. W roku 1979, nie zakładając już hipotezy continuum Bukowský wykazał, że z każdego rozbicia prostej rzeczywistej na zbiory pierwszej kategorii można wybrać podrodzinę, której suma nie ma własności Baire'a, a z każdego rozbicia na zbiory miary Lebesgue'a zero można wybrać podrodzinę, której suma jest niemierzalna w sensie Lebesgue'a.

W pracy Brzuchowskiego, Cichonia, Grzegorka i Rylla-Nardzewskiego opublikowanej w roku 1979 zagadnienia niemierzalności zostały przeniesione z prostej rzeczywistej na nieprzeliczalne przestrzenie polskie. Wprowadzono pojęcie zbioru $\mathcal{I}$–mierzalnych, gdzie $\mathcal{I}$ jest σ–ideałem o bazie borelowskiej, czyli takim ideałem, którego każdy niepusty element zawiera niepusty zbiór borelowski. Zbiór nazywamy $\mathcal{I}$–mierzalnym gdy należy do σ–ciała generowanego przez zbiory borelowskie oraz ideał $\mathcal{I}$. W przeciwnym razie zbiór jest $\mathcal{I}$–niemierzalny. We wspomnianej pracy udowodniono twierdzenie znane jako "Twierdzenie Czterech Polaków" mówiące, że jeśli rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ jest punktowo skończona oraz $\bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}$ to istnieje taka podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, że zbiór $\bigcup \mathcal{A}'$ jest $\mathcal{I}$–niemierzalny. W tym kontekście pojęcie zbioru całkowicie $\mathcal{I}$–niemierzalnego pojawia się w sposób bardzo naturalny. Jest to zbiór, którego przekrój z każdym zbiorem borelowskim spoza ideału $\mathcal{I}$ jest $\mathcal{I}$–niemierzalny. W przypadku gdy $\mathcal{I}$ jest ideałem podzbiorów przeliczalnych prostej, to zbiory całkowicie $\mathcal{I}$–niemierzalne są zbiorami Bernsteina. Gdy zaś $\mathcal{I}$ jest ideałem zbiorów miary Lebesgue'a zero na odcinku $[0,1]$, to zbiór jest całkowicie $\mathcal{I}$–niemierzalny gdy jego miara zewnętrzna jest równa 1, a miara wewnętrzna jest równa 0.

Powstaje naturalne pytanie czy w cytowanym powyżej twierdzeniu Brzuchowskiego, Grzegorka, Cichonia i Rylla–Nardzewskiego zbiór $\bigcup \mathcal{A}'$ jest całkowicie $\mathcal{I}$–niemierzalny. Do tej pory tego problemu nie rozstrzygnięto chociaż był rozważany przez wielu badaczy. Fremlin i Todorčević udowodnili jedynie, że dla każdego $\epsilon > 0$ i każdej partycji $\mathcal{A}$ odcinka $[0,1]$ na zbiory miary zero istnieje taka podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, że miara wewnętrzna zbioru $\bigcup \mathcal{A}'$ jest mniejsza od ϵ, a miara zewnętrzna jest większa od $1-\epsilon$.

Punktem wyjścia dla wszystkich prac stanowiących rozprawę habilitacyjną jest praca [H1]. Stanowi ona powrót do głównych idei zawartych w pracy Brzuchowskiego, Grzegorka, Cichonia i Rylla–Nardzewskiego. Praca [H1] miała bardzo istotny wpływ na rozwój całej tematyki. Pokazano w niej między innymi ścisły związek pomiędzy niemierzalnością w sensie ideału, a niezmiennikami kardynalnymi ideałów. W szczególności pojawia się tu liczba kardynalna $\mathrm{cov}_h(I)$ będąca minimalną mocą rodziny $\mathcal{A}$ zawartej w ideale I takiej, że $\bigcup \mathcal{A}$ zawiera zbiór borelowski nie należący do ideału. Jedno z głównych twierdzeń pracy [H1] mówi, że jeśli w przestrzeni polskiej X istnieje zbiór $\mathcal{I}$–niemierzalny mocy mniejszej niż $\mathrm{cov}_h(I)$, to dla każdej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ takiej, że $X \setminus \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{I}$ istnieje podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ o tej własności, że zbiór $\bigcup \mathcal{A}'$ jest całkowicie $\mathcal{I}$–niemierzalny. W tej samej pracy zawarte są także ciekawe twierdzenia dotyczące niemierzalności sumy algebraicznej (kompleksowej) podzbiorów prostej. W szczególności pokazano, że trójkowy zbiór Cantora C zawiera taki podzbiór A, że suma algebraiczna $A + C$ jest zbiorem niemierzalnym w sensie Lebesgue'a. Pojęcia sum algebraicznych w grupach polskich dotyczą także inne rezultaty w dorobku habilitacyjnym dr. Rałowskiego zawarte w szczególności w pracach [H2], [H3] i [H4].

Interesujące są także rezultaty z pracy [H7] dotyczące uogólnionych zbiorów Łuzina względem ortogonalnych par σ–ideałów. Zakładając pewne nierówności pomiędzy niezmiennikami kardynalnymi ideałów przedstawiono tam bardzo daleko idące uogólnienie klasycznego twierdzenia Erdösa i Sierpińskiego o dualności miary i kategorii.

Interesujące są też rezultaty z pracy [H2]. Przy pomocy twierdzenia Kuratowskiego i Rylla–Nardzewskiego o selekcji udowodniono tam pewne twierdzenia o całkowitej $\mathcal{I}$-niemierzalności pewnych funkcji i multifunkcji.

Spośród prac dr. Rałowskiego nie wchodzących do habilitacji najciekawsza wydaje się bardzo obszerna praca [P4] wspólna z Banakhem, Moraynem i Żeberskim, opublikowana w *Israel Journal of Mathematics*. Dotyczy ona klasyfikacji σ–ideałów na kostce Hilberta $[0,1]^\omega$. Wykazano w niej między innymi, że minimalna ilość zbiorów Cantora potrzebna do pokrycia kostki $[0,1]^\omega$ jest taka sama jak minimalna ilość zbiorów Cantora potrzebna do pokrycia odcina jednostkowego. Ciekawą wydaje się także praca [P3] wspólna z Żeberskim i Szczepaniakiem, a opublikowana w *Real Analysis Exchange*. Są tam twierdzenia w duchu klasycznego twierdzenia Steinhausa o sumach algebraicznych. Jedno z twierdzeń mówi, że jeśli $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ jest klasy C^1, a zbiór tych punktów płaszczyzny, w których przynajmniej jedna z pochodnych cząstkowych się zeruje należy do ideału miary lub ideału kategorii, to dla dowolnych zbiorów borelowskich $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nie należących do ideału miary lub kategorii, zbiór $f[A\times B]$ ma niepuste wnętrze. Należy też wspomnieć rezultaty prac [P5] i [P6] nawiązujących do Diagramu Cichonia, uznanego wśród matematyków zajmujących się teorią mnogości za sztandarową specjalność Wrocławskiej Szkoły Matematycznej.

Prace [P8] – [16] zostały opublikowane w czasopismach fizycznych chociaż, jak wynika z Autoreferatu, są bardzo zmatematyzowane i niewątpliwie stanowią istotną część dorobku naukowego dr. Rałowskiego. Nie będąc jednak specjalistą w tej dziedzinie uchylę się od ich oceniania.

Dr Rałowski aktywnie uczestniczył w ponad 20 konferencjach naukowych o charakterze międzynarodowym wygłaszając referaty lub (dwukrotnie) prezentując postery. W jednej z tych konferencji uczestniczył jako tzw. *invited speaker*. Był też uczestnikiem trzech projektów badawczych. Dwa z nich miały charakter międzynarodowy: polsko–czeski i polsko–austriacki. Trzeci z nich to projekt Opus w ramach NCN. Bardzo ważną częścią działalności naukowej habilitanta jest współprowadzenie, razem z dr. hab. Szymonem Żeberskim, na Politechnice Wrocławskiej Seminarium z Teorii Mnogości.

Autoreferat rozprawy habilitacyjnej dr. Roberta Rałowskiego, liczący ponad 30 stron, został przygotowany niezbyt starannie. Autor przedstawił swój dorobek naukowy dość chaotycznie, a ponadto popełnił kilka przykrych pomyłek utrudniających studiowanie tekstu i w efekcie pracę nad recenzją. Można też zauważyć, że prace, których jedynym autorem jest dr Rałowski są wyraźnie gorzej zredagowane. Z drugiej jednak strony tego rodzaju zarzuty nie powinny wpływać na ostateczną ocenę całości dorobku naukowego habilitanta.

Konkluzja. Na podstawie przedstawianego cyklu prac stanowiącego rozprawę habilitacyjną, a także pozostałych prac i całej działalności naukowej dr. Roberta Rałowskiego należy stwierdzić, że jest on dojrzałym matematykiem zdolnym do prowadzenia badań naukowych w zakresie teorii mnogości i topologii. Autor rozwiązał kilka stawianych przez innych badaczy problemów, a także rozwinął pomysłowe techniki. Dostrzegł też nowe związki między różnymi zagadnieniami. Dotychczasowe jego osiągnięcia stanowią poważny wkład naukowy w uprawianą dziedzinę matematyki. Uważam, że dr Robert Rałowski spełnia wszystkie wymagania, zarówno formalne jak i zwyczajowe, stawiane kandydatom do stopnia doktora habilitowanego. Popieram wniosek o nadanie dr. Robertowi Rałowskiemu stopnia naukowego doktora habilitowanego nauk matematycznych.

Katowice, 9.11.2016

A. Błaszczyk

Aleksander Błaszczyk