Dr hab. Krzysztof Nowak
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego

Kraków, 13 lipca 2017 r.

Ocena rozprawy habilitacyjnej pt. "Przestrzenie $\mathbb{R}$-punktów" oraz dorobku naukowego pani dr Katarzyny Kuhlmann

Pani dr Katarzyna Kuhlmann uzyskała stopień magistra matematyki na Uniwersytecie Śląskim w Katowicach w 2001 r., zaś stopień doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki na Uniwersytecie Śląskim w 2005 r. Ma obecnie opublikowanych lub przyjętych do publikacji 18 artykułów w czasopismach matematycznych rangi międzynarodowej oraz jeden artykuł złożony do publikacji. Siedem jej opublikowanych artykułów [1-7] wchodzi w skład rozprawy habilitacyjnej, a spośród nich pięć, mianowicie [2,3,4,5,7], napisane są we współpracy z innymi matematykami. Udział Habilitantki w tych pracach został oszacowany na odpowiednio 50, 40, 40, 50, 50 procent.

Tematykę rozprawy habilitacyjnej oraz pozostałego dorobku naukowego można umiejscowić w dziedzinie algebry rzeczywistej i ogólnej teorii waluacji. Podstawowym obiektem badania jest przestrzeń $M(K)$ $\mathbb{R}$-punktów ciała (formalnie) rzeczywistego K. Trzy artykuły [14,18,19] (nie wchodzące w skład rozprawy) poświęcone są uogólnieniom twierdzeń o punkcie stałym i punkcie koincydencji.

Rozprawa habilitacyjna koncentruje się na niełatwym i bardzo interesującym problemie realizowalności przestrzeni $\mathbb{R}$-punktów. Stanowi on przedmiot badań wielu matematyków i do dzisiaj nie został rozwiązany w sposób kompletny. W części A Autoreferatu (Wprowadzenie i motywacja badań), pani dr Katarzyna Kuhlmann przedstawia znane już wcześniej wyniki z tym związane. Wiodącym celem rozprawy jest dalsze częściowe rozwiązanie tego problemu. W części B Autoreferatu omówione są główne rezultaty rozprawy habilitacyjnej, które pokrótce omówię poniżej.

Artykuł [1]

1) Kostka Cantora dowolnej mocy jest homeomorficzna z przestrzenią $M(K)$ dla pewnego ciała K. (Thm. 3.2)

2) Każda przestrzeń boolowska jest realizowalna jako przestrzeń $M(L)$ dla pewnego ciała L. (Thm. 4.4)

Artykuł [2]

Rodzina realizowalnych przestrzeni topologicznych jest zamknięta ze względu na następujące trzy operacje: skończone sumy rozłączne, podprzestrzenie domknięte i produkty z przestrzeniami boolowskimi.

Artykuł [3]

Badane są przestrzenie $M(R(x))$ dla ciał funkcji wymiernych $R(x)$ stopnia przestępnego 1 nad ciałami rzeczywiście domkniętymi R.

1) Użyteczne kryterium: dwa porządki ciała $R(x)$ wyznaczają ten sam $\mathbb{R}$-punkt wtw gdy odpowiadające im przekroje ciała R są wyznaczone przez tą samą kulę ultrametryczną. (Thm. 3.2)

2) Tw. o metryzowalności (Thm. 4.7): Przestrzeń $M(R(x))$ jest metryzowalna wtw gdy R zawiera przeliczalne podciało gęste.

3) Jeśli R jest ciałem rzeczywiście domkniętym nie zawierającym przeliczalnego ciała gęstego i F jest (formalnie) rzeczywistym ciałem funkcyjnym stopnia przestępnego 1 nad R, przestrzeń $M(F)$ nie jest metryzowalna. (Thm. 4.9)

Artykuł [4]

Badana jest metryzowalność przestrzeni $\mathbb{R}$-punktów $M(F)$ ciała funkcyjnego F stopnia przestępnego > 1 nad ciałem rzeczywiście domkniętym R.

1) Dla nieprzeliczalnego ciała rzeczywiście domkniętego R, przestrzeń $M(R(x,y))$ ciała funkcji wymiernych $R(x,y)$ nie jest metryzowalna (Thm. 1.1); jeśli F jest skończenie generowanym, (formalnie) rzeczywistym rozszerzeniem ciała R stopnia przestępnego $\geqslant 2$, to przestrzeń $M(F)$ nie jest metryzowalna. (Corollary 3.3)

2) Jeśli R jest właściwym, rzeczywiście domkniętym rozszerzeniem $\mathbb{R}$, to przestrzeń $M(R(x))$ ciała funkcji wymiernych $R(x)$ nie jest metryzowalna. (Thm. 3.5)

Artykuł [5]

Dla rzeczywiście domkniętego ciała R i jego (formalnie) rzeczywistego rozszerzenia F, badane są zgodne z restrykcją zanurzenia przestrzeni $M(R(x))$

w przestrzeń $M(F(x))$. Wyniki tej pracy wskazują m.in, na przeszkody dla rozwiązania otwartego problemu, czy torus może być zrealizowany jako przestrzeń $\mathbb{R}$-punktów. Podstawowym rezultatem jest następujące twierdzenie:

Powyżej opisane zanurzenie istnieje wtw gdy vR jest podgrupą wypukłą grupy vF. W szczególności, jeśli R jest ciałem archimedesowym, to takie zanurzenie zawsze istnieje. Jeśli F jest ciałem rzeczywiście domkniętym, to istnieje co najwyżej jedno takie zanurzenie. (Thm. 1.2)

Artykuł [6]

Badana jest struktura przestrzeni $M(R(x))$ ciała funkcji wymiernych $R(x)$ stopnia przestępnego 1 nad niearchimedesowym ciałem rzeczywiście domkniętym R. Wykazuje się, że struktura przstrzeni $M(R(x))$ jest bogata z dużą ilością samopodobieństw, a także opisywana jest "fraktalna" struktura tej przestrzeni. Udowodnione jest m.in. następujące twierdzenie:

Jeśli R jest ciałem rzeczywiście domkniętym, to wszystkie trzy wymiary przestrzeni $M(R(x))$, pokryciowy, mały indukcyjny i duży indukcyjny, są równe i wynoszą 1. (Thm. 1.3)

Artykuł [7]

W tym artykule zostały uogólnione na przypadek ciała funkcyjnego F stopnia przestępnego 1 nad dowolnym ciałem rzeczywiście domkniętym R wyniki prac [3] oraz Gilmera [G] ("Extension of an order to a simple transcendental extension", 1982).

Dodam również, że dowody wielu twierdzeń są technicznie skomplikowane i wymagają bardzo dobrej znajomości tematu. Mam przy tym jedną uwagę merytoryczną. W dowodzie [1], Thm. 4.4, istotną rolę odgrywa Proposition 4.2 (Stwierdzenie 3 z Autoreferatu). Dowód tego stwierdzenia nie jest w pełni kompletny, gdyż wykazanie surjektywności restrykcji odwzorowania λ_L wymaga injektywności prawej pionowej strzałki diagramu (a nawet jest jej równoważny). Injektywność ta jest konsekwencją Thm. 4.3 z pracy [11], która winna być tam zatem docytowana.

Konkludując uważam, że zarówno rozprawa jak i pozostały dorobek naukowy Habilitantki stanowią istotny wkład w rozwój tej dziedziny matematyki w skali międzynarodowej. Stwierdzam, że przedstawiona rozprawa habilitacyjna spełnia warunki ustawy oraz wnoszę o jej przyjęcie i dopuszczenie dr Katarzyny Kuhlmann do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Krzysztof Nowak