Załącznik nr 2 do wniosku o wszczęcie postępowania habilitacyjnego
-autoreferat w języku polskim

1. Imiona i nazwisko: Ewa Jolanta Rak
2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe z podaniem nazwy, roku i miejsca ich uzyskania oraz tytuł rozprawy doktorskiej:
   2.1 magister matematyki: Uniwersytet Rzeszowski, Wydział Matematyczno–Przyrodniczy, 3 lipca 2003 r.
   tytuł pracy magisterskiej: *Modyfikacje działań Łukasiewicza*;
   2.2 doktor nauk matematycznych: Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie, Wydział Matematyczno-Fizyczno-Techniczny, 1 lipca 2009 r.
   tytuł rozprawy doktorskiej: *Rozdzielność działań rosnących.*
3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:
   3.1 1 października 2003 r. - 28 lutego 2011 r.: asystent, Uniwersytet Rzeszowski, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy;
   3.2 1 marca 2011 r. - obecnie: adiunkt, Uniwersytet Rzeszowski, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy.
4. Osiągnięcie naukowe w rozumieniu art. 16 ust. 2 Ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki stanowi cykl sześciu publikacji powiązanych tematycznie pod tytułem:
   4.1 **Rozwiązania równań rozdzielności i modularności w pewnych klasach funkcji agregacji**

   4.2 **Lista prac składających się na powiązany tematycznie cykl publikacji:**

   [R1] J. Drewniak, **E. Rak**, *Distributivity inequalities of monotonic operations*, Fuzzy Sets and Systems 191 (2012), 62-71.

   [R2] E. Rak, *The distributivity property of increasing binary operations*, Fuzzy Sets and Systems 232 (2013), 110-119.

   [R3] P. Drygaś, **E. Rak**, *Distributivity equation in the class of semi-t-operators*, Fuzzy Sets and Systems 291 (2016), 66-81.

   [R4] P. Drygaś, **E. Rak**, *Distributivity equation in the class of 2-uninorms*, Fuzzy Sets and Systems 291 (2016), 82-97.

   [R5] P. Drygaś, F. Qin, **E. Rak**, *Left and right distributivity equations for semi-t-operators and uninorms*, Fuzzy Sets and Systems 325 (2017), 21-34.

   [R6] W. Fechner, **E. Rak**, L. Zedam, *The modularity law of some classes of aggregation operators*, Fuzzy Sets and Systems (2017) http://dx.doi.org/10.1016/j.fss.2017.03.010.

4.3 Opis celu naukowego wyżej wymienionego cyklu prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich potencjalnego wykorzystania.

Celem naukowym przedłożonego cyklu prac jest zbadanie wybranych problemów z zakresu teorii równań i nierówności funkcyjnych o dwóch zmiennych, dokładniej równania rozdzielności i modularności dla funkcji objętych relatywnie nowym i odrębnym kierunkiem badań, mianowicie teorią agregacji. Takie połączenie sprawia, że uzyskane wyniki mają charakter uniwersalny, co daje możliwość ich wykorzystania, zarówno w innych gałęziach matematyki, jak i w różnych obszarach technicznych. W ramach realizowanych badań znacząco rozszerzono klasyczne narzędzia i techniki dowodowe, głównie ze względu na fakt stosowania minimalnego zestawu założeń, jako najczęściej pożądanego w zastosowaniach praktycznych.

Wprowadzenie

Rozdzielność mnożenia względem dodawania pojawia się naturalnie w arytmetyce liczb rzeczywistych, rachunku wektorów i macierzy. Także pochodna i całka oznaczona są rozdzielne względem dodawania. Aksjomat rozdzielności występuje w definicji ciał i pierścieni. Ogólnie określa on zależność między dwoma działaniami dwuargumentowymi.

Definicja 1. [por. [1], str. 318] Niech F i G będą pewnymi działaniami dwuargumentowymi określonymi w niepustym zbiorze X. Powiemy, że działanie F jest rozdzielne względem działania G, gdy dla wszystkich $x, y, z \in X$ zachodzą równości:

$$F(x, G(y, z)) = G(F(x, y), F(x, z)), \qquad (LD)$$

$$F(G(y, z), x) = G(F(y, x), F(z, x)). \qquad (RD)$$

Można mówić o rozdzielności lewostronnej F względem G, gdy spełniony jest jedynie pierwszy z powyższych warunków (LD), lub o rozdzielności prawostronnej, gdy spełniony jest wyłącznie drugi z warunków (RD). Działanie przemienne oraz jednostronnie rozdzielne jest rozdzielne obustronnie.

Bardziej ogólne podejście polega na traktowaniu aksjomatu rozdzielności jako równania funkcyjnego z jednym lub dwoma funkcjami (działaniami) niewiadomymi.
Rozwiązania równania rozdzielności w dużej mierze zależą od wyboru klasy funkcji, w której poszukujemy rozwiązań. Początkowo badania te obejmowały równanie samorozdzielności (gdy $F = G$) w klasie funkcji ciągłych i różnowartościowych (co implikowało ścisłą monotoniczność) oraz symetrycznych określonych w przedziale rzeczywistym zob. np. M. Hosszú [33], którego rozwiązania charakteryzowały quasiliniowe średnie wagowe. Kolejne prace dotyczyły jednostronnego równania rozdzielności dla funkcji przy założeniach ścisłej monotoniczności i dwukrotnej różniczkowalności zamiast ciągłości, które wskazywały iż lewostronna rozdzielność jest niezależna od prawostonnej rozdzielności (zob. np. M. Hosszú [34]). Istotne rozważania dotyczące problemu rozdzielności (do roku 1965) uwzględnia monografia J. Aczél'a [1], który także podjął trud charakteryzacji rozwiązań tego typu równań. W szczególności wskazał on rozwiązania prawostronnego równania rozdzielności dla funkcji ograniczonych z dołu względem funkcji ciągłych, rosnących, łącznych i posiadających obustronny element neutralny (zob. rozdział 7.1.3, Theorem 6). Z późniejszych prac warte uwagi są prace A. Lundberga [41], [42] poświęcone uogólnionemu równaniu rozdzielności w klasie funkcji ciągłych. Wyniki powyższych prac są następnie wykorzystywane między innymi w rachunku prawdopodobieństwa, teorii równań różniczkowych cząstkowych oraz teorii równań wektorowych i macierzowych co podkreślił J. Aczél w [1], zob. m.in. str. 321, 342 i 372.

Obecnie wiele badań dotyczy równania rozdzielności dla działań określonych w przedziale jednostkowym z wykorzystaniem w teorii podejmowania decyzji i użyteczności [24, 36, 43], w logice i teorii całek rozmytych [57] czy w procesach przetwarzania obrazów [30, 51].
To głównie na gruncie zapotrzebowania dla zastosowań praktycznych odżyły rozważania nad rozdzielnością różnych funkcji, w tym głównie funkcji agregacji (zob. C. Alsina i in. [5], M. Carbonell i in. [16], J. Dombi [19], D. Dubois i H. Prade [23], J. Drewniak ([21], str. 51 oraz 89-90, [20]).
T. Calvo w [13] scharakteryzowała m.in. rozwiązania równania rozdzielności dla funkcji uśredniających i quasiliniowych. W pracy [59] opublikowano także problem otwarty dotyczący rozdzielności pomiędzy dwoma szczególnymi klasami funkcji agregacji tj. uninormami i ciągłymi normami trójkątnymi.
Z dość dużej liczby publikacji odnoszącej się do problemu rozdzielności w przedziale [0,1] można wyróżnić wyniki dla norm i konorm trójkątnych w pracach C. Alsiny [3] oraz C. Bertoluzzy, V. Doldi [12], a także uninorm i nullnorm w pracach M. Mas i in. ([46], [47]) oraz D. Ruiza i J. Torrensa ([53], [55]). Część prac dotyczy również rozdzielności implikacji rozmytych jak np. praca M. Baczyńskiego [9] czy implikacji względem uninorm D. Ruiza i J. Torrensa ([54], [56]).

Z kolei aksjomat modularności (dawniej prawo modularne) określony jest w następujący sposób.

Definicja 2 ([45])**.** Niech $F, G : [0,1]^2 \to [0,1]$. Mówimy, że działanie F jest modularne względem działania G, gdy dla wszystkich $x, y, z \in [0,1]$ zachodzi następujący warunek

$$z \leqslant x \Rightarrow F(x, G(y,z)) = G(F(x,y), z). \tag{1}$$

Warunek (1) może być również postrzegany, zarówno jako uogólnione równanie łączności (samo-modularność dla $F = G$) na ograniczonej dziedzinie, jak również szczególny przypadek równania rozdzielności (bowiem np. kraty półgrup i innych struktur algebraicznych nie są rozdzielne ale są modularne), co spowodowało potrzebę ich dokładniejszego rozpatrywania.

W ostatnich latach coraz więcej uwagi poświęca się bardziej ogólnemu podejściu traktującemu aksjomat modularności jako równanie funkcyjne z jedną lub dwiema nieznanymi funkcjami.
Wśród prac dotyczących równania modularności dla funkcji agregacji najważniejsze są prace: M. Carbonella i in. [16], Q. Fenga [26], M. Mas i in. [45] oraz H. Zhan i in. [67].

Rozwiązywanie problemów związanych z rozdzielnością i modularnością nie jest w rzeczywistości prostą sprawą, w szczególności gdy dążymy do minimalizacji zestawu założeń dla rozpatrywanych funkcji. W przypadku mniej popularnego równania modularności miałam dodatkowo świadomość tego, że jego rozważanie częściej prowadzi do pewnego rodzaju niepowodzenia, czyli braku rozwiązań. Porównanie rozwiązań dla obu równań było celem podjętych przeze mnie badań na podstawie których powstały prace (w kolejności chronologicznej) [R4], [R10], [R6].

Rozważmy teraz funkcje agregacji w przedziale [0,1] ograniczając się do przypadku dwuargumentowego.

Definicja 3 (por. [31], rozdział 1)**.** Dwuargumentową funkcją agregacji nazywamy odwzorowanie $A : [0,1]^2 \to [0,1]$ rosnące ze względu na obie zmienne (tzn. dla każdych $x, y, u, v \in [0,1]$ $x \leqslant u,\ y \leqslant v \ \Rightarrow A(x,y) \leqslant A(u,v)$) i spełniające warunki brzegowe: $A(0,0) = 0$ i $A(1,1) = 1$. Funkcję agregacji nazywamy średnią, gdy jest idempotentna, czyli $A(x,x) = x$ w $[0,1]$.

Funkcje agregacji są użytecznym uogólnieniem średnich. Opublikowano wiele monografii na temat teorii i zastosowań funkcji agregacji, w tym m.in: *Aggregation Functions (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications)* [31] (M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar i E. Pap), *Aggregation Operators: New Trends and Applications* [15] (T. Calvo, G. Mayor i R. Mesiar) oraz *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners* [10] (G. Beliakov, A. Pradera i T. Calvo). Normom i konormom trójkątnym poświęcona jest monografia *Triangular Norms* [38] (E.P. Klement, R. Mesiar i E. Pap) i *Associative Functions: Triangular Norms and Copulas* [6] (C. Alsina, M.J. Frank i B. Schweizer), a średnim - *A Practical Guide to Averaging Functions* [11] (G. Beliakov, H. Bustince i T. Calvo).

W obszarze zainteresowań teorii agregacji znaleźć można zarówno systematyczne studia nad własnościami tych funkcji, ich powiązania, jak rownież konstrukcje nowych metod dostosowane do konkretnych potrzeb praktycznych, m.in. w statystyce matematycznej i obliczeniowej, geometrii obliczeniowej, w analizie danych, systemach wspomagania decyzji, rozpoznawaniu i przetwarzaniu obrazów, sztucznej inteligencji, bazach danych, sterowaniu rozmytym czy też ekonomii.

W obliczu różnorodności funkcji (działań) agregacji, pogrupowano je w różne klasy: średnie, normy i konormy trójkątne, kopuły, całki Choquet'a i Sugeno, uninormy, nullnormy[1]. Uwagę skupimy jednak na tych, które są istotne w dalszych rozważaniach.

Definicja 4 ([R10])**.** Niech $e \in [0,1]$. Rodzinę wszystkich działań $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ rosnących ze względu na obie zmienne z elementem neutralnym $e \in [0,1]$ oznaczamy przez $\mathcal{N}_e$.

Definicja 5 ([65])**.** Niech $e \in [0,1]$. Działanie $F \in \mathcal{N}_e$, które jest dodatkowo łączne i przemienne nazywamy uninormą z elementem neutralnym e. Rodzinę wszystkich uninorm oznaczamy $\mathcal{U}_e$.

[1]Na potrzeby tego autoreferatu będą stosowane spolszczone wersje angielskich terminów (nullnormy, 2-uninormy, semi-t-operatory) z uwagi na brak ich polskich odpowiedników.

Ogólna struktura działań z rodziny $\mathcal{N}_e$ jest następująca.

Twierdzenie 1 ([R10])**.** *Niech* $e \in (0,1)$*.* $F \in \mathcal{N}_e$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$F(x,y) = \begin{cases} eA\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{z}\right) & gdy\ (x,y) \in [0,e]^2 \\ k + (1-e)B\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & gdy\ (x,y) \in [e,1]^2 \\ C(x,y) & gdy\ (x,y) \in D_e \end{cases}, \tag{2}$$

gdzie $D_e = [0,e) \times (e,1] \cup (e,1] \times [0,e)$*,* $A : [0,e]^2 \to [0,e]$ *jest rosnące z elementem* e*,* $B : [e,1]^2 \to [e,1]$ *jest rosnące z elementem* e *oraz* $C : D_e \to [0,1]$ *jest funkcją rosnącą spełniającą nierówności* $\min(x,y) \leqslant C(x,y) \leqslant \max(x,y)$ *dla* $(x,y) \in D_e$*.*

Definicja 6 ([R10])**.** Niech $e \in [0,1]$. Przez $\mathcal{N}_e^{\max}$ ($\mathcal{N}_e^{\min}$) oznaczamy klasę wszystkich działań $F \in \mathcal{N}_e$ spełniających dodatkowy warunek:

$$F(0,x) = F(x,0) = x \ \text{ dla każdego } \ x \in (e,1] \quad (F(1,x) = F(x,1) = x \ \text{ dla każdego } \ x \in [0,e)).$$

Ponadto

$$\mathcal{N}^{\max} = \bigcup_e \mathcal{N}_e^{\max}, \qquad \mathcal{N}^{\min} = \bigcup_e \mathcal{N}_e^{\min}.$$

Definicja 7 ([R10])**.** Niech $k \in [0,1]$. Przez $\mathcal{Z}_k$ oznaczamy rodzinę wszystkich działań rosnących $G : [0,1]^2 \to [0,1]$ posiadających elementy neutralne $e = 0$ w $[0,k]$ oraz $e = 1$ w $[k,1]$. Oznaczenie $\mathcal{Z}_k$ nawiązuje do tego, że k jest elementem zerowym działania G (jego istnienie gwarantują monotniczność oraz elementy neutralne).

Definicja 8 ([14])**.** Niech $k \in [0,1]$. Działanie $G \in \mathcal{Z}_k$, które jest dodatkowo łączne i przemienne nazywamy nullnormą z elementem zerowym k. Rodzinę wszystkich nullnorm oznaczamy $\mathcal{V}$.

Uwaga 1. W szczególności $\mathcal{N}_0^{\min} = \mathcal{N}_0^{\max} = \mathcal{Z}_0 = \mathcal{N}_1$ i $\mathcal{N}_1^{\min} = \mathcal{N}_1^{\max} = \mathcal{Z}_1 = \mathcal{N}_0$, gdzie $\mathcal{N}_1$ ($\mathcal{N}_0$) obejmuje działania rosnące z elementem neutralnym $e = 1$ ($e = 0$).
Łączne i przemienne działanie odpowiednio z klasy $\mathcal{N}_1$ i $\mathcal{N}_0$ nazywamy normą trójkątną oraz konormą trójkątną (w skrócie t-normą i t-konormą) i oznaczamy symbolem T i S (zob. [38], strony 6 i 13). Normy i konormy trójkątne stanowią przemienne półgrupy uporządkowane w $[0,1]$ z elementem neutralnym na końcu przedziału.

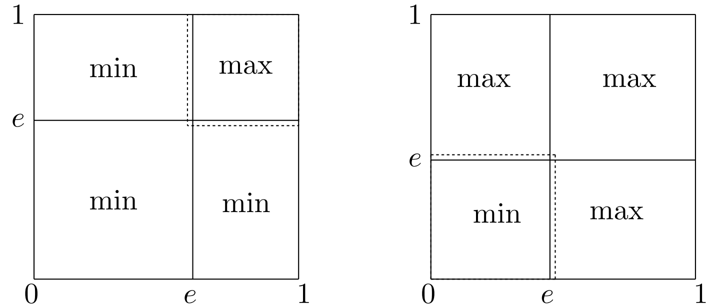
Ogólną strukturę działań z rodziny $\mathcal{Z}_k$ przedstawia poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2 ([R10])**.** *Niech* $k \in (0,1)$*,* $G : [0,1]^2 \to [0,1]$*.* $G \in \mathcal{Z}_k$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

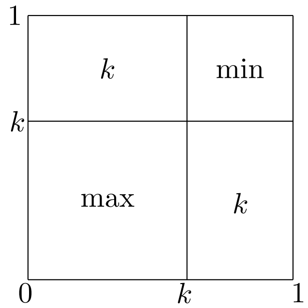
$$G(x,y) = \begin{cases} kA\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{z}\right) & gdy\ (x,y) \in [0,k]^2 \\ k + (1-k)B\left(\frac{x-k}{1-k}, \frac{y-k}{1-k}\right) & gdy\ (x,y) \in [k,1]^2 \\ k & gdy\ (x,y) \in D_k \end{cases},$$

gdzie $A : [0,k]^2 \to [0,k]$ *jest rosnące z elementem* $e = 0$ *a* $B : [k,1]^2 \to [k,1]$ *jest rosnące z elementem* $e = 1$*.*

Biorąc pod uwagę fakt, że jedynymi działaniami idempotentnymi z klas $\mathcal{N}_1$ i $\mathcal{N}_0$ są odpowiednio min i max, to w następstwie otrzymujemy dwie jedyne uninormy idempotentne z klas $\mathcal{N}_e^{\min}$ i $\mathcal{N}_e^{\max}$ oznaczane jako $U^{\min}$ i $U^{\max}$ oraz jedyną nullnormę idempotentną V_k (zob. rys. 1 i 2).



Rysunek 1: Struktura uninorm idempotentnych z klas $\mathcal{N}_e^{\min}$ i $\mathcal{N}_e^{\max}$.



Rysunek 2: Struktura nullnormy idempotentnej V_k.

Uninormy $\mathcal{U}_e \subset \mathcal{N}_e$ i nullnormy (równoważnie t-operatory [44]) $\mathcal{V} \subset \mathcal{Z}_k$ są działaniami interesującymi z uwagi na ich struktury stanowiące szczególne połączenia norm i konorm trójkątnych, dzięki czemu okazały się bardzo przydatne w wielu obszarach badawczych, szczególnie w logice rozmytej, systemach eksperckich, sieciach neuronowych, teorii użyteczności czy w rozmytym modelowaniu systemów (zob. np. [24], [28], [39], [43], [64]).

Ze względu na obszerną listę zastosowań podjęto szerokie badania teoretyczne obejmujące charakteryzację rozwiązań równań funkcyjnych dla agregacji, w tym głównie równania rozdzielności. Brak rozdzielności jest dużą przeszkodą we wszelkich przekształceniach algebraicznych co stanowi też problem w modelowaniu komputerowym (zob. np. [17]). Na ogół bowiem agregacje nie są względem siebie rozdzielne, a tym bardziej wzajemnie rozdzielne. W mojej ocenie najlepiej będzie zobrazować ten problem na przykładzie średnich (tabela 1) oraz t-norm i t-konorm (tabela 2). W rezultacie pomiędzy prawą i lewą stroną równania rozdzielności (LD) mogą zachodzić cztery różne relacje $L \leqslant P$, $L \geqslant P$, $L = P$ oraz $L \parallel P$ (strony równania są nieporównywalne), co zostało zebrane w tabeli 3.

Tablica 1: Podstawowe przykłady średnich w [0,1] (zob. [R11]).

Średnia	Średnia	Nazwa
$M_\wedge(x,y) = \min(x,y)$	$M_\vee(x,y) = \max(x,y)$	Minimum i maksimum
$M_A(x,y) = \frac{x+y}{2}$	$M_G(x,y) = \sqrt{xy}$	Średnie arytmetyczna i geometryczna
$M_H(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y=0 \\ \frac{2xy}{x+y}, & \textit{poza tym} \end{cases}$	$M_P(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$	Średnie harmoniczna i kwadratowa
$P_1(x,y) = x$	$P_2(x,y) = y$	Rzutowania na pierwszą i drugą zmienną
$M_\lambda(x,y) = \lambda x + (1-\lambda)y, \ \ \lambda \in [0,1]$		Średnie liniowe

Tablica 2: Podstawowe przykłady t-norm i t-konorm ([R11]).

T-norma	T-konorma	Nazwa
$T_M(x,y) = \min(x,y)$	$S_M(x,y) = \max(x,y)$	Działania kratowe
$T_P(x,y) = x \cdot y$	$S_P(x,y) = x + y - x \cdot y$	Działania algebraiczne
$T_L(x,y) = \max(x+y-1, 0)$	$S_L(x,y) = \min(x+y, 1)$	Działania Łukasiewicza
$T_D(x,y) = \begin{cases} \min(x,y), & \max(x,y) = 1 \\ 0, & \max(x,y) < 1 \end{cases}$	$S_D(x,y) = \begin{cases} \max(x,y), & \min(x,y) = 0 \\ 1, & \min(x,y) > 0 \end{cases}$	Działania skrajne

Tablica 3: Rozdzielność t-norm, t-konorm oraz średnich określonych tab. 1 i tab. 2 ([R11]).

$\mathbf{F \setminus G}$	$\mathbf{S_D}$	$\mathbf{S_L}$	$\mathbf{S_P}$	$\mathbf{S_M}$	$\mathbf{M_P}$	$\mathbf{M_A}$	$\mathbf{M_G}$	$\mathbf{M_H}$	$\mathbf{T_M}$	$\mathbf{T_P}$	$\mathbf{T_L}$	$\mathbf{T_D}$
$\mathbf{S_D}$	$\leqslant$	$\leqslant$	$\leqslant$	$=$	$\geqslant$	$\geqslant$	$\leqslant$	$\leqslant$	$=$	$\geqslant$	$\parallel$	$\parallel$
$\mathbf{S_L}$	$\leqslant$	$\leqslant$	$\parallel$	$=$	$\geqslant$	$\geqslant$	$\parallel$	$\parallel$	$=$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$
$\mathbf{S_P}$	$\leqslant$	$\leqslant$	$\leqslant$	$=$	$\geqslant$	$=$	$\leqslant$	$\leqslant$	$=$	$\geqslant$	$\geqslant$	$\geqslant$
$\mathbf{S_M}$	$\leqslant$	$\leqslant$	$\leqslant$	$=$	$\leqslant$	$\leqslant$	$\leqslant$	$\leqslant$	$=$	$\geqslant$	$\geqslant$	$\geqslant$
$\mathbf{M_P}$	$\leqslant$	$\leqslant$	$\leqslant$	$=$	$=$	$\leqslant$	$\leqslant$	$\leqslant$	$=$	$\geqslant$	$\geqslant$	$\geqslant$
$\mathbf{M_A}$	$\leqslant$	$\leqslant$	$\leqslant$	$=$	$\geqslant$	$=$	$\leqslant$	$\leqslant$	$=$	$\geqslant$	$\geqslant$	$\geqslant$
$\mathbf{M_G}$	$\leqslant$	$\leqslant$	$\leqslant$	$=$	$\geqslant$	$\geqslant$	$=$	$\leqslant$	$=$	$\geqslant$	$\parallel$	$\geqslant$
$\mathbf{M_H}$	$\leqslant$	$\leqslant$	$\leqslant$	$=$	$\geqslant$	$\geqslant$	$\geqslant$	$=$	$=$	$\parallel$	$\parallel$	$\geqslant$
$\mathbf{T_M}$	$\leqslant$	$\leqslant$	$\leqslant$	$=$	$\geqslant$	$\geqslant$	$\geqslant$	$\geqslant$	$=$	$\geqslant$	$\geqslant$	$\geqslant$
$\mathbf{T_P}$	$\leqslant$	$\leqslant$	$\leqslant$	$=$	$=$	$=$	$=$	$=$	$=$	$\geqslant$	$\geqslant$	$\geqslant$
$\mathbf{T_L}$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$=$	$\leqslant$	$\leqslant$	$\geqslant$	$\geqslant$	$=$	$\parallel$	$\geqslant$	$\geqslant$
$\mathbf{T_D}$	$\parallel$	$\parallel$	$\leqslant$	$=$	$\leqslant$	$\leqslant$	$=$	$=$	$=$	$\geqslant$	$\geqslant$	$\geqslant$

Wobec powyższego, moim głównym założeniem badawczym było wyznaczenie takich rodzin parametrycznych par agregacji, które spełniają równanie rozdzielności (równanie modularności).

W przedłożonym cyklu prac [R1]-[R6] cel ten został osiągnięty. W cyklu tym istotnie koncentruję się na rozwiązywaniu problemu rozdzielności i modularności dla różnych klas agregacji. Podjęcie badań w [R1]-[R2] było motywowane kilkoma nierozstrzygniętymi zagadnieniami zawartymi w podsumowaniu mojej rozprawy doktorskiej. Uogólnienie wyników na nowe klasy agregacji wymagało udoskonalenia dotychczas stosowanych technik i narzędzi dowodowych.
Omówienie najważniejszych wyników wchodzących w skład osiągnięcia przedstawię stosując kolejność chronologiczną podjętych problemów badawczych.

Problem podrozdzielności lub nadrozdzielności w przypadku braku rozdzielności

Główne wyniki pracy [R1] (wspólnej z J. Drewniakiem) poświęcone są parom nierozdzielnych działań algebraicznych z rodzin $\mathcal{Z}_k$ i $\mathcal{N}_e$, a dokładniej wskazują warunki gwarantujące podrozdzielność lub nadrozdzielność tych par działań w przypadku istotnego braku ich rozdzielności. Uzyskane wyniki jednocześnie stanowią uzupełnienie wyników prac [R7]- [R10]. W szczególności opisano rodziny dwuargumentowych działań rosnących podrozdzielnych lub nadrozdzielnych w odniesieniu do uninorm i nullnorm idempotentnych.
Jeśli w definicji 1 równość zastąpimy odpowiednimi nierównościami " $\leqslant$ " lub " $\geqslant$ " oraz $X = [0,1]$, to powiemy, że dla wszystkich $x, y, z \in [0,1]$
F jest lewo (prawo)-stronnie podrozdzielne względem G, gdy

$$F(x, G(y,z)) \leqslant G(F(x,y), F(x,z)) \quad (F(G(y,z),x) \leqslant G(F(y,x), F(z,x))), \tag{3}$$

F jest lewo (prawo)-stronnie nadrozdzielne względem G, gdy

$$F(x, G(y,z)) \geqslant G(F(x,y), F(x,z)) \quad (F(G(y,z),x) \geqslant G(F(y,x), F(z,x))). \tag{4}$$

Motywacją dla tego typu rozważań obejmujących nierówności funkcyjne rozdzielności była praca C. Alsiny [4] oraz wyniki zaobserwowane w pracy T. Calvo [13] mówiące, że pary działań dualnych tj. norm i konorm trójkątnych nie muszą być rozdzielne. Ponadto artykuł M. Mas i in. [46] dostarczył dodatkowych informacji dotyczących zarówno rozdzielności jak i jej braku w przypadku pary uninorm i nullnorm. Wspólnie z J. Drewniakiem założyliśmy wówczas, że ten brak rozdzielności można zastąpić nierównościami funkcyjnymi rozdzielności jak np. w teorii krat wykorzystującej podrozdzielności i nadrozdzielności.

Pełne charakteryzacje działań rozdzielnych $F \in \mathcal{Z}_s \cup \mathcal{N}_e^{\min} \cup \mathcal{N}_e^{\max}$ i $G \in \mathcal{Z}_k \cup \mathcal{N}_f^{\min} \cup \mathcal{N}_f^{\max}$ zostały przeprowadzone we wcześniejszych artykułach [R7]-[R10]. Warunek rozdzielności (LD) lub (RD) przy pewnej dowolności działania F zawsze implikuje idempotentność działania G. Wszystkie pozytywne (+) i negatywne (-) wyniki (ozn. W) lewostronnej rozdzielności uzykane w tych pracach są podsumowane w poniższej tabeli,

F/G	V_k			$U_f^{\min}$			$U_f^{\max}$		
	Przyp.	W	Publ.	Przyp.	W	Publ.	Przyp.	W	Publ.
$\mathcal{Z}_s$	$s \leqslant k$	+	[R8], tw. 4	$s \leqslant f$	+	[R11], tw. 18	$f \leqslant s$	+	[R11], tw. 16
	$k < s$	+	[R8], tw. 5	$f < s$	-	[R11], tw. 18	$s < f$	-	[R11], tw. 16
$\mathcal{N}_e^{\min}$	$k < e$	+	[R11], tw. 10	$f \leqslant e$	+	[R9], tw. 3	$0 = f < e$	+	[R10], tw. 3
	$e \leqslant k = 1$	+	[R11], tw. 14	$e < f = 1$	+	[R9], tw. 1	$0 < f < e$	-	[R10], tw. 3
	$e \leqslant k < 1$	-	[R11], tw. 14	$e < f < 1$	-	[R9], tw. 1	$0 < f < e < 1$	$\parallel$	[R10], tw. 5
$\mathcal{N}_e^{\max}$	$e < k$	+	[R11], tw. 9	$e < f = 1$	+	[R10], tw. 4	$e \leqslant f$	+	[R9], tw. 4
	$0 = k \leqslant e$	+	[R11], tw. 13	$e < f < 1$	-	[R10], tw. 4	$0 = f < e$	+	[R9], tw. 2
	$0 < k \leqslant e$	-	[R11], tw. 13	$0 < f \leqslant e < 1$	$\parallel$	[R10], tw. 6	$0 < f < e$	-	[R9], tw. 2

przy czym
(+) oznacza, że istnieją takie F i G z odpowiednich rodzin działań, które spełniają równanie lewostronnej rozdzielności,
(-) oznacza, że równanie lewostronnej rozdzielności jest sprzeczne dla dowolnych działań F i G z odpowiednich rodzin,
($\parallel$) oznacza, że dla dowolnych działań F i G z odpowiednich rodzin lewa i prawa strona równania rozdzielności są nieporównywalne. Do analizy przypadków (-) zastosowano w [R1] m.in. twierdzenie 3.2 oraz lemat 3.3.

W przypadku $F \in \mathcal{N}_e$, $G \in \mathcal{N}_f$ w zależności od uporządkowania ich elementów neutralnych wyróżniamy w [R1] cztery następujące podprzypadki $F \in \mathcal{N}_e^{\min}$ i $G \in \mathcal{N}_f^{\min}$ (twierdzenie 4.1); $F \in \mathcal{N}_e^{\max}$ i $G \in \mathcal{N}_f^{\max}$ (twierdzenie 4.2); $F \in \mathcal{N}_e^{\min}$ i $G \in \mathcal{N}_f^{\max}$ (twierdzenie 4.5); $F \in \mathcal{N}_e^{\max}$ i $G \in \mathcal{N}_f^{\min}$ (twierdzenie 4.6).
Warunkiem wystarczającym we wszystkich powyższych twierdzeniach była idempotentność działania G, gdzie odpowiednio (por. z rys. 1)

$$\mathcal{N}_f^{\min} \ni G(x,y) = U^{\min}(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{gdy } (x,y) \in [f,1]^2 \\ \min(x,y) & \text{poza tym} \end{cases}, \tag{5}$$

$$\mathcal{N}_f^{\max} \ni G(x,y) = U^{\max}(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{gdy} (x,y) \in [0,f]^2 \\ \max(x,y) & \text{poza tym} \end{cases}. \tag{6}$$

Rozważając nierówności (3) lub (4) dla działań z różnych rodzin $F \in \mathcal{N}_e$ i $G \in \mathcal{Z}_k$ otrzymujemy, że w przypadku $k > 0$ działanie $F \in \mathcal{N}_e^{\max}$ (twierdzenie 5.1), w przypadku $k < 1$ działanie $F \in \mathcal{N}_e^{\min}$ (twierdzenie 5.2) oraz G musi być nullnormą idempotentną określoną wzorem (rys. 2)

$$G(x,y) = V_k(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{gdy } (x,y) \in [0,k]^2 \\ \min(x,y) & \text{gdy } (x,y) \in [k,1]^2 \\ k & \text{gdy } (x,y) \in D_k \end{cases}. \tag{7}$$

Zatem rozważania w pracy [R1] przyniosły porządane wyniki (zob. poniższą tabelę), które stanowią niezbędne uzupełnienie badań przeprowadzonych w [R7] - [R10] oraz [46, 47].

Tablica 4: Podsumowanie pracy [R1].

F G	V_k			$U_f^{\min}$			$U_f^{\max}$		
	Przypadek	Wynik	Tw.	Przypadek	Wynik	Tw.	Przypadek	Wynik	Tw.
$\mathcal{Z}_s$	-	-	-	$f < s$	$\leqslant$	6.2	$s < f$	$\geqslant$	6.1
$\mathcal{N}_e^{\min}$	$e < k$	$\geqslant$	5.2	$e < f$	$\leqslant$	4.1	$f < e$	$\leqslant$	4.5
$\mathcal{N}_e^{\max}$	$k < e$	$\leqslant$	5.1	$e < f$	$\geqslant$	4.6	$f < e$	$\geqslant$	4.2

Na podstawie twierdzeń 4.1 oraz 4.2 w [R1] otrzymujemy wnioski 4.3, 4.4 stanowiące istotne uzupełnienie Propositions 6.2 i 6.6 z pracy [47] mówiące, że

(i) w przypadku $e < f$ każda uninorma $F \in \mathcal{N}_e^{\min}$ (konorma trójkątna $F \in \mathcal{N}_0$) jest podrozdzielna względem uninormy idempotentnej $G = U^{\min}$ (5),

(ii) w przypadku $e > f$ każda uninorma $F \in \mathcal{N}_e^{\max}$ (norma trójkątna $F \in \mathcal{N}_1$) jest nadrozdzielna względem uninormy idempotentnej $G = U^{\max}$ (6).

Ponadto bezpośrednio z twierdzeń 4.5 i 4.6 w [R1] wnioskujemy (wnioski 4.7, 4.8), że

(i) w przypadku $e > f$ każda uninorma $F \in \mathcal{N}_e^{\min}$ jest podrozdzielna względem uninormy idempotentnej $G = U^{\max}$ (6),

(ii) w przypadku $e < f$ każda uninorma $F \in \mathcal{N}_e^{\max}$ jest nadrozdzielna względem uninormy idempotentnej $G = U^{\min}$ (5).

Jednak w przypadku odwrotnej kolejności elementów neutralnych nie uzyskamy ani podrozdzielności ani też nadrozdzielności dla tych działań nawet dla obu działań idempotentnych, co zostało pokazane w przykładzie 4.9 w [R1].
Jako uzupełnienie Propositions 5.2 i 5.5 z pracy [46] mamy wnioski 5.3, 5.4 w [R1] mówiące, że

(i) dla $k < e$ każda uninorma $F \in \mathcal{N}_e^{\max}$ (norma trójkątna $F \in \mathcal{N}_1$) jest podrozdzielna względem nullnormy idempotentnej $G = V_k$ (7),

(ii) dla $e < k$ każda uninorma $F \in \mathcal{N}_e^{\min}$ (konorma trójkątna $F \in \mathcal{N}_0$) jest nadrozdzielna względem nullnormy idempotentnej $G = V_k$ (7).

W odwrotnym przypadku, gdy $F \in \mathcal{Z}_s$ a $G \in \mathcal{N}_f$ (twierdzenia 6.1 oraz 6.2 w [R1]), otrzymujemy kolejne wnioski 6.3 i 6.4, które uzupełniają Proposition 4.1 z pracy [46] wskazujące, że

(i) dla $s < f$ każda nullnorma $F \in \mathcal{Z}_s$ jest nadrozdzielna względem uninormy idempotentnej $G = U^{\max}$ (6),

(ii) dla $f < s$ każda nullnorma $F \in \mathcal{Z}_s$ jest podrozdzielna względem uninormy idempotentnej $G = U^{\min}$ (5).

Problem (warunkowej) rozdzielności dla działań rosnących z elementem neutralnym

Główne wyniki rozważań podjętych w pracy [R2] obejmują charakteryzację rozwiązań zarówno dla warunkowej jak i zwykłej rozdzielności pomiędzy działaniami $F \in \mathcal{N}_e^{\min} \cup \mathcal{N}_e^{\max}$ oraz $G \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_0$, i na odwrót, co jednocześnie uogólniało wyniki pracy [54] i poszerzyło zbiór możliwych rozwiązań dla rozważań opublikowanych w [R1, R8, R9, R11].

Ponieważ problem rozdzielności dowolnej agregacji względem t-konormy (t-normy) prowadzi w efekcie do trywialnych rozwiązań, to znaczy t-konorma (t-norma), o której mowa, musi być max (min), konieczne było ograniczenie dziedziny dla równania rozdzielności w następujący sposób.

Definicja 9. Niech $F \in \mathcal{N}_e$ z elementem neutralnym $e \in (0,1)$ oraz $G \in \mathcal{N}_0$ ($G \in \mathcal{N}_1$). Mówimy, że działanie F jest warunkowo lewostronnie rozdzielne (LCD) względem działania G jeśli

$$F(x, G(y,z)) = G(F(x,y), F(x,z)) \text{ dla wszystkich } x,y,z \in [0,1] \text{ takich, że } G(y,z) < 1 \ (G(y,z) > 0).$$

Działanie F jest warunkowo prawostronnie rozdzielne (RCD) względem G jeśli

$$F(G(y,z), x) = G(F(y,x), F(z,x)) \text{ dla wszystkich } x,y,z \in [0,1] \text{ takich, że } G(y,z) < 1 \ (G(y,z) > 0).$$

W przypadku działania przemiennego F oba warunki (LCD) i (RCD) pokrywają się jako (CD). Ten rodzaj rozdzielności znany jest także jako zawężona rozdzielność [35], i chociaż dziedzina jest słabo zawężona, to klasa par działań spełniających (CD) jest dużo szersza.

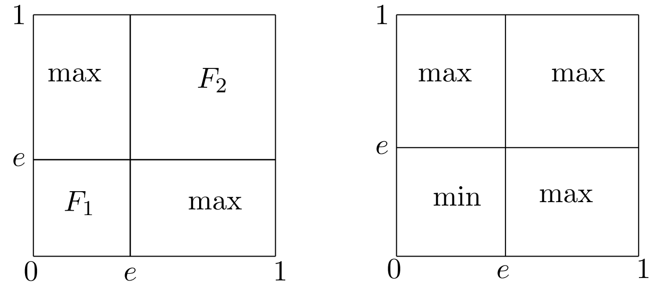
Przeważająca część wyników uzyskanych w pracy [R2], w przypadku gdy element neutralny działania $F \in \mathcal{N}_e$ był elementem idempotentnym działania $G \in \mathcal{N}_0 \cup \mathcal{N}_1$, przedstawia nadal rozwiązania typu max, min, przy czym dla $F \in \mathcal{N}_e^{\min}$ dodatkowo istotnym założeniem była ciągłość działania $G \in \mathcal{N}_0$, dla $F \in \mathcal{N}_e^{\max}$ ciągłość $G \in \mathcal{N}_1$ a dla idempotentej $F \in \mathcal{N}_e$ ciągłość $G \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_0$. Obejmują one twierdzenia 5.3, 5.5, 5.7, 5.12, 5.13 w [R2], które zaprezentuję łącznie.

Twierdzenie 3. *Niech* $e \in (0,1)$.
(i) Działanie $F \in \mathcal{N}_e^{\max}$ *(*$F \in \mathcal{N}_e^{\min}$*) jest lewostronnie lub prawostronnie warunkowo rozdzielne względem działania* $G \in \mathcal{N}_0$ *(*$G \in \mathcal{N}_1$*) wtedy i tylko wtedy, gdy* $G = \max$ *(*$G = \min$*).*
(ii) Działanie $F \in \mathcal{N}_e^{\min}$ *(*$F \in \mathcal{N}_e^{\max}$*) jest lewostronnie lub prawostronnie warunkowo rozdzielne względem ciągłego działania* $G \in \mathcal{N}_0$ *(*$G \in \mathcal{N}_1$*) wtedy i tylko wtedy, gdy* $G = \max$ *(*$G = \min$*).*
(iii) Działanie idempotentne $F \in \mathcal{N}_e$ *jest lewostronnie lub prawostronnie warunkowo rozdzielne względem ciągłego działania* $G \in \mathcal{N}_0$ *(*$G \in \mathcal{N}_1$*) wtedy i tylko wtedy, gdy* $G = \max$ *(*$G = \min$*).*

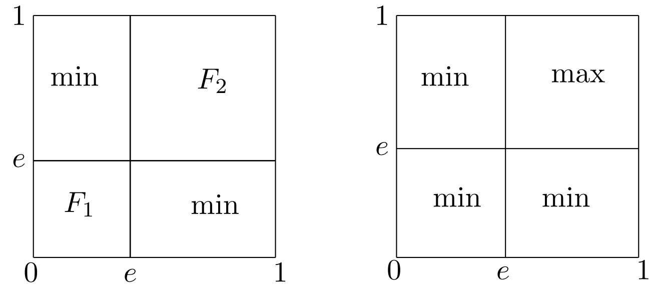
Nietrywialne rozwiązania uzyskano natomiast w przypadku, gdy element neutralny e działania F nie był elementem idempotentnym działania G (twierdzenia 5.8 oraz 5.15). Wykorzystano tu jednak dodatkowe założenie lewostronnej ciągłości dla działania F.

Z kolei rozważania odwrotnego przyporządkowania działań F i G, czyli gdy $F \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_0$ a $G \in \mathcal{N}_e$, nie wymagały już zawężania dziedziny i dotyczyły typowej rozdzielności.

Twierdzenie 4 ([R2], twierdzenia 6.4 oraz 6.8)**.** *Niech* $e \in (0,1)$.
(i) Działanie $F \in \mathcal{N}_0$ *jest lewostronnie lub prawostronnie rozdzielne względem działania* $G \in \mathcal{N}_e$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* F *i* G *mają strukturę z rys. 3,*
(ii) Działanie $F \in \mathcal{N}_1$ *jest lewostronnie lub prawostronnie rozdzielne względem działania* $G \in \mathcal{N}_e$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* F *i* G *mają strukturę z rys. 4,*



Rysunek 3: Struktura rozdzielnych działań z twierdzenia 4 (i).



Rysunek 4: Struktura rozdzielnych działań z twierdzenia 4 (ii).

przy czym $(0, F_1, e)$ i $(e, F_2, 1)$ są uporządkowanymi strukturami algebraicznymi z wyróżnionymi elementami neutralnymi e i 1.

Problem rozdzielności dla semi-t-operatorów

Problem dotyczący rozdzielności dla t-operatorów został rozwiązany w pracy [46]. Jeżeli jednak opuścimy założenie o przemienności, to sytuacja staje się dużo bardziej skomplikowana, wymaga bowiem rozważenia 24 oddzielnych twierdzeń.

Definicja 10 (por. [22])**.** Działanie $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy semi-t-operatorem jeśli jest łączne, rosnące względem obu zmiennych oraz ciągłe na brzegu dziedziny, gdy $F(0,0) = 0$ i $F(1,1) = 1$. Niech $a, b \in [0,1]$. Przez $\mathcal{F}_{a,b}$ oznaczamy rodzinę wszystkich semi-t-operatorów dla których $F(0,1) = a$, $F(1,0) = b$. W szczególności $\mathcal{F}_k := \mathcal{F}_{k,k}$ oznacza zbiór wszystkich działań łącznych w $\mathcal{Z}_k$.

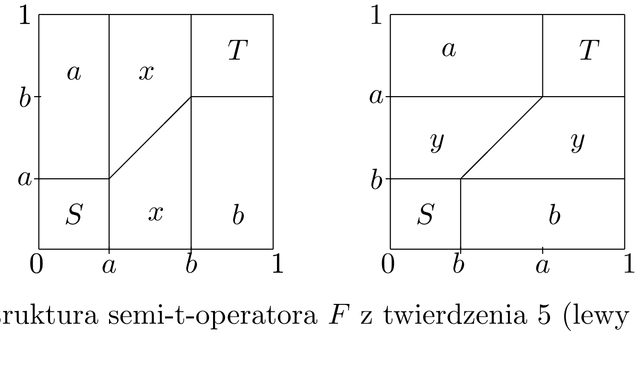
Twierdzenie 5 ([R3], twierdzenie 2.12)**.** *$F \in \mathcal{F}_{a,b}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie działania łączne $T \in \mathcal{N}_1$ i $S \in \mathcal{N}_0$, że*

$$F(x,y) = \begin{cases} aS\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) & \text{jeśli } x, y \in [0,a] \\ b + (1-b)T\left(\frac{x-b}{1-b}, \frac{y-b}{1-b}\right) & \text{jeśli } x, y \in [b,1] \\ a & \text{jeśli } x \leqslant a \leqslant y \\ b & \text{jeśli } y \leqslant b \leqslant x \\ x & \text{poza tym} \end{cases} \tag{8}$$

gdy $a \leqslant b$ oraz

$$F(x,y) = \begin{cases} bS\left(\frac{x}{b}, \frac{y}{b}\right) & \text{jeśli } x, y \in [0,b] \\ a + (1-a)T\left(\frac{x-a}{1-a}, \frac{y-a}{1-a}\right) & \text{jeśli } x, y \in [a,1] \\ a & \text{jeśli } x \leqslant a \leqslant y \\ b & \text{jeśli } y \leqslant b \leqslant x \\ y & \text{poza tym} \end{cases} \tag{9}$$

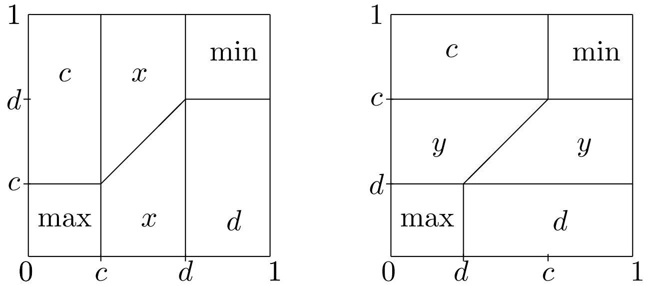
gdy $b \leqslant a$.



Rysunek 5: Struktura semi-t-operatora F z twierdzenia 5 (lewy (8), prawy (9)).

W pracy [R3] (wraz z P. Drygasiem) scharakteryzowano rozwiązania lewostronnego i prawostronnego równania rozdzielności pomiędzy semi-t-operatorami $F \in \mathcal{F}_{a,b}$ i $G \in \mathcal{F}_{c,d}$ (twierdzenia 4.2 - 4.25) w zależności od uporządkowania elementów a, b działania F i elementów c, d działania G. Cechą szczególną uzyskanych wyników jest to, że warunkiem koniecznym rozdzielności jest zawsze idempotentność działania względem którego ona zachodzi. Jego strukturę przedstawia poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 6 ([R3], twierdzenie 2.14)**.** *Semi-t-operator $G \in \mathcal{F}_{c,d}$ jest idempotentny wtedy i tylko wtedy, gdy ma strukturę określoną jak na rys.6.*



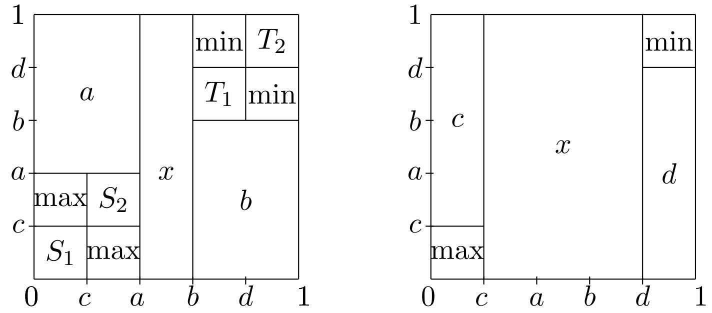
Rysunek 6: Struktura idempotentnego semi-t-operatora (lewy gdy $c < d$, prawy gdy $d < c$).

Warunek wystarczający z kolei wymusza określoną strukturę dziedziny pierwszego działania, którego zacieśnienia muszą spełniać pewne dodatkowe własności. Ponadto uzyskując takie same rozwiązania zarówno w przypadku lewostronnej jak i prawostronnej rozdzielności w opisie twierdzeń używamy terminu rozdzielności (jako obustronnej).
Rozwiązanie problemu rozdzielności dla działań z rodziny semi-t-operatorów, zostało przeprowadzone kompleksowo.

F/G	$G \in \mathcal{F}_{c,d},\ c \leqslant d$		$G \in \mathcal{F}_{c,d},\ d \leqslant c$	
	Przypadek	Wynik	Przypadek	Wynik
$F \in \mathcal{F}_{a,b},\ a \leqslant b$	$c < a \leqslant b < d$	tw. 4.2	$d \leqslant c < a \leqslant b$	tw. 4.8
	$c \leqslant d < a \leqslant b$	tw. 4.3	$d < a \leqslant c \leqslant b$	tw. 4.9
	$c < a \leqslant d \leqslant b$	tw. 4.4	$d < a \leqslant b < c$	tw. 4.10
	$a \leqslant c \leqslant b < d$	tw. 4.5	$a \leqslant d \leqslant b \leqslant c$	tw. 4.12
	$a \leqslant b < c \leqslant d$	tw. 4.6	$a \leqslant b < d \leqslant c$	tw. 4.13
$F \in \mathcal{F}_{a,b},\ b \leqslant a$	$c \leqslant d < b \leqslant a$	tw. 4.14	$d \leqslant c < b \leqslant a$	tw. 4.20
	$c < b \leqslant d < a$	tw. 4.15	$d \leqslant b \leqslant c \leqslant a$	tw. 4.21
	$c < b \leqslant a < d$	tw. 4.16	$d < b \leqslant a < c$	tw. 4.22
	$b \leqslant c \leqslant a < d$	tw. 4.18	$b \leqslant d \leqslant a < c$	tw. 4.24
	$b \leqslant a < c \leqslant d$	tw. 4.19	$b \leqslant a < d \leqslant c$	tw. 4.25
$F \in \mathcal{F}_{a,b}$	$a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$	tw. 4.7	$a \leqslant d \leqslant c \leqslant b$	tw. 4.11
	$b \leqslant c \leqslant d \leqslant a$	tw. 4.17	$b \leqslant d \leqslant c \leqslant a$	tw. 4.23

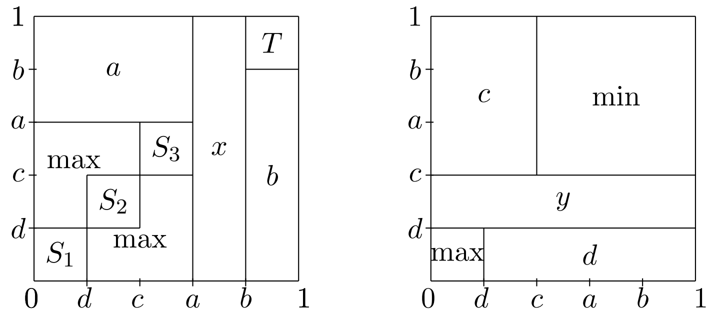
Podaliśmy pełną charakteryzację rozwiązań równań (LD) i (RD), tj. dla nieprzemiennych działań $F \in \mathcal{F}_{a,b}$ i $G \in \mathcal{F}_{c,d}$ w zależności od uporządkowania elementów a, b, c, d.
W powyższej tabeli zestawiono wszystkie te możliwe przypadki, na które składają się 24 twierdzenia. Można tu zauważyć, że w twierdzeniach 4.7, 4.11, 4.17 i 4.23 obustronna rozdzielność zachodzi w przypadku zupełnie dowolnego semi-t-operatora F. Przedstawię przykładowe 2 z uzyskanych 24 rezultatów.

Twierdzenie 7 ([R3], twierdzenie 4.2)**.** *Niech $a, b, c, d \in [0, 1]$, $c < a \leqslant b < d$. Działanie $F \in \mathcal{F}_{a,b}$ jest rozdzielne względem działania $G \in \mathcal{F}_{c,d}$ wtedy i tylko wtedy, gdy F i G mają strukturę z rys.7, gdzie $([0, c], S_1, 0)$, $([c, a], S_2, c)$, $([b, d], T_1, d)$, $([d, 1], T_2, 1)$ są półgrupami uporządkowanymi z wyróżnionymi elementami neutralnymi.*



Rysunek 7: Struktury działań F i G z twierdzenia 7.

Twierdzenie 8 ([R3], twierdzenie 4.8)**.** *Niech* $a, b, c, d \in [0, 1]$*,* $d \leqslant c < a \leqslant b$*. Działanie* $F \in \mathcal{F}_{a,b}$ *jest rozdzielne względem działania* $G \in \mathcal{F}_{c,d}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* F *i* G *mają strukturę z rys. 8, gdzie* $([0, d], S_1, 0)$*,* $([d, c], S_2, d)$*,* $([c, a], S_3, c)$*,* $([b, 1], T, 1)$ *są półgrupami uporządkowanymi z wyróżnionymi elementami neutralnymi.*



Rysunek 8: Struktury działań F i G z twierdzenia 8.

Zastosowanie powyższych twierdzeń do nullnorm

Przyjmując $c = d = k$ otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9 ([R3], połączona wersja twierdzeń 5.1 - 5.4)**.** *Niech* $a, b, k \in [0, 1]$*.*
(i) W przypadku $a < b < k$ *działanie* $F \in \mathcal{F}_{a,b}$ *jest rozdzielne względem działania* $G \in \mathcal{F}_k$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* G *jest nullnormą idempotentną (7), a* F *przyjmuje następującą postać*

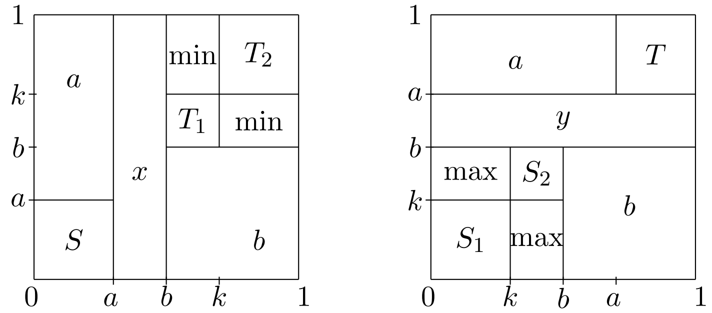
$$F(x,y) = \begin{cases} aS\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) & \textit{jeśli} \;\; x, y \in [0, a] \\ b + (k-b)T_1\left(\frac{x-k}{k-b}, \frac{y-k}{k-b}\right) & \textit{jeśli} \;\; x, y \in [b, k] \\ k + (1-k)T_2\left(\frac{x-k}{1-k}, \frac{y-k}{1-k}\right) & \textit{jeśli} \;\; x, y \in [k, 1] \\ \min(x, y) & \textit{jeśli} \;\; b \leqslant \min(x, y) \leqslant k \leqslant \max(x, y) \\ a & \textit{jeśli} \; x \leqslant a \leqslant y \\ b & \textit{jeśli} \;\; y \leqslant b \leqslant x \\ x & \textit{poza} \;\; \textit{tym} \end{cases},$$

gdzie $([0, a], S, 0)$*,* $([b, k], T_1, k)$*,* $([k, 1], T_2, 1)$ *są półgrupami uporządkowanymi z wyróżnionymi elementami neutralnymi;*

(ii) W przypadku $k < b < a$ działanie $F \in \mathcal{F}_{a,b}$ jest rozdzielne względem działania $G \in \mathcal{F}_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest nullnormą idempotentną (7)*, a F przyjmuje następującą postać*

$$F(x,y)=\begin{cases} kS_1\left(\frac{x}{k},\frac{y}{k}\right) & \textit{jeśli } x,y\in[0,k] \\ k+(a-k)S_2\left(\frac{x-k}{a-k},\frac{y-k}{a-k}\right) & \textit{jeśli } x,y\in[k,a] \\ \max(x,y) & \textit{jeśli } \min(x,y)\leqslant k\leqslant \max(x,y)\leqslant a \\ b+(1-b)T\left(\frac{x-b}{1-b},\frac{y-b}{1-b}\right) & \textit{jeśli } x,y\in[b,1] \\ a & \textit{jeśli } x\leqslant a\leqslant y \\ b & \textit{jeśli } y\leqslant b\leqslant x \\ y & \textit{poza tym} \end{cases},$$

gdzie $([0,k],S_1,0)$*,* $([k,a],S_2,k)$*,* $([b,1],T,1)$ *są półgrupami uporządkowanymi z wyróżnionymi elementami neutralnymi;*



Rysunek 9: Struktura działania F z twierdzenia 9 (*i*) (lewy) i (*ii*) (prawy).

(iii) W przypadku $a \leqslant k \leqslant b$ każde działanie $F \in \mathcal{F}_{a,b}$ jest rozdzielne względem działania $G \in \mathcal{F}_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest nullnormą idempotentną (7)*;*
(iv) W przypadku $b < a < k$ działanie $F \in \mathcal{F}_{a,b}$ jest rozdzielne względem działania $G \in \mathcal{F}_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest nullnormą idempotentną (7)*, a F przyjmuje następującą postać*

$$F(x,y)=\begin{cases} aS\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a}\right) & \textit{jeśli } x,y\in[0,b] \\ b+(k-b)T_1\left(\frac{x-k}{k-b},\frac{y-k}{k-b}\right) & \textit{jeśli } x,y\in[a,k] \\ k+(1-k)T_2\left(\frac{x-k}{1-k},\frac{y-k}{1-k}\right) & \textit{jeśli } x,y\in[k,1] \\ \min(x,y) & \textit{jeśli } a\leqslant \min(x,y)\leqslant k\leqslant \max(x,y) \\ a & \textit{jeśli } x\leqslant a\leqslant y \\ b & \textit{jeśli } y\leqslant b\leqslant x \\ y & \textit{poza tym} \end{cases},$$

gdzie $([0,b],S,0)$*,* $([a,k],T_1,k)$*,* $([k,1],T_2,1)$ *są półgrupami uporządkowanymi z wyróżnionymi elementami neutralnymi.*

Problem rozdzielności semi-t-operatorów względem uninorm

Problem rozdzielności $F \in \mathcal{F}_{a,b}$ względem $U \in \mathcal{U}_e$ został rozwiązany w pracy [R5] napisanej wspólnie z P. Drygasiem i F. Qinem. Bez założenia przemienności dla semi-t-operatorów nadal konieczne było osobne rozważenie zarówno lewostronnej jak i prawostronnej rozdzielności. Rozwiązania lewostronnej rozdzielności wyglądają bardzo podobnie do prawostronnej rozdzielności, jednak lewostronna rozdzielność dla F i U może być rozważana dla $a \leqslant b$, natomiast prawostronna rozdzielność dla $b \leqslant a$. Ponadto w przypadku, gdy $a < b$, to działanie F ma prawostronny element neutralny w podprzedziałach, które dodają się do przedziału jednostkowego, a tym samym lewostronna rozdzielność wymusza idempotentność uninormy, czego dowodzi następujący lemat.

Lemat 10 ([R5], lemat 2). *Niech działanie $F : X^2 \to X$ posiada prawostronny (lewostronny) element neutralny e w pewnym podzbiorze $\emptyset \neq Y \subset X$. Jeżeli F jest lewostronnie i prawostronnie rozdzielne względem działania $U : X^2 \to X$ spełniającego $U(e,e) = e$, to U jest idempotentne w Y.*

Z drugiej strony, lewostronny element neutralny można uzyskać tylko w określonym podzbiorze przedziału jednostkowego, co pozwala jedynie na uzyskanie częściowego wyniku.

Lemat 11 ([R5], lemat 20). *Niech $a, b, e \in [0,1]$. Jeżeli $a \leqslant b$ oraz działanie $F \in \mathcal{F}_{a,b}$ jest prawostronnie rozdzielne względem działania $U \in \mathcal{U}_e$, to U jest idempotentne na zbiorze $[0,a] \cup [b,1]$.*

Stąd w rozważanej pracy [R5] charakteryzacja rozwiązań obejmuje tylko te przypadki, dla których z wykorzystaniem lematu 10 możliwe było uzyskanie idempotentności dla uninormy G.
Co więcej, można zaobserwować, że struktura semi-t-operatora nie jest symetryczna względem głównej przekątnej (w przeciwieństwie do działań z rodzin $\mathcal{N}_e$ i $\mathcal{Z}_k$). Nie możemy zatem uzyskać wyników dualnych dla lewostronnej i prawostronnej rozdzielności, a następnie połączyć je w celu uzyskania obustronnej rozdzielności, jak to było możliwe do zrealizowania w [R10], pracach dla działań symetrycznych względem głównej przekątnej, a nawet nieoczekiwanie w pracy [R3]. W przypadku semi-t-operatorów i uninorm nie jest to możliwe do zastosowania, czego dowodzi przykład 3 w [R5].

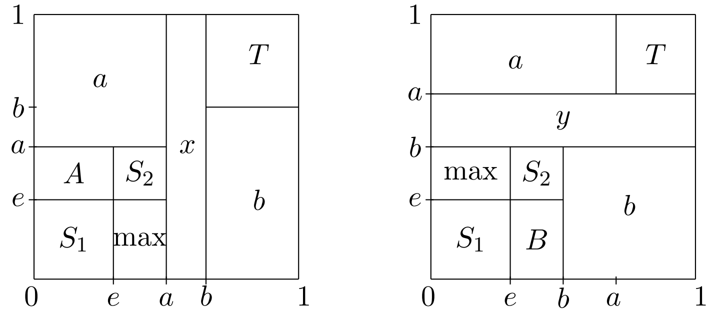
Rozwiązania problemu rozdzielności $F \in \mathcal{F}_{a,b}$ względem $U \in \mathcal{U}_e$ spełniającej $U(0,1) = 0$ lub $U(0,1) = 1$ obejmują twierdzenia 7-14.
Dowód warunku koniecznego każdego z tych twierdzeń jest poprzedzony kilkoma lematami, w których najpierw wykazujemy idempotentność uninormy (na bazie lematu 2 i twierdzenia 6 przy użyciu funkcji Id-symetrycznej $g : [0,1] \to [0,1]$ z punktem stałym e), a następnie ustalamy porządek pomiędzy elementem neutralnym uninormy a elementami a i b, co ostatecznie wymuszało pewien podział w strukturze semi-t-operatora. Sprawdzenie warunku wystarczającego wymaga natomiast rozważenia odpowiednio wielu przypadków, w zależności od uporządkowania a, b i e, a następnie skrupulatnego ich przeliczenia.

Przedstawię teraz jeden z rozważanych w [R5] przypadków, gdy $F \in \mathcal{F}_{a,b}$ dla $0 < a \leqslant b$ i uninorma $U \in \mathcal{U}_e$ spełnia warunek $U(0,1) = 0$ (w przypadku uninormy, dla której $U(0,1) = 1$ wyniki są analogiczne).

Twierdzenie 12 ([R5], twierdzenie 8). *Niech $a, b, e \in [0,1]$, $0 < a \leqslant b$. Działanie $F \in \mathcal{F}_{a,b}$ jest lewostronnie rozdzielne względem uninormy $U \in \mathcal{U}_e$, takiej że $U(0,1) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e < a$, $G = U^{\max}$ (6) i F ma strukturę jak na rys. 10 (lewy), gdzie T jest izomorficzne z działaniem łącznym z klasy $\mathcal{N}_1$, S_1 jest izomorficzna z działaniem łącznym klasy $\mathcal{N}_0$, e jest prawostronnym elementem neutralnym $S_2 : [e,a]^2 \to [e,a]$, 0 jest lewostronnym elementem neutralnym działania rosnącego $A : [0,e] \times [e,a] \to [e,a]$ oraz A, T, S_1, S_2 mają wspólne wartości na brzegach dziedziny.*

W przypadku prawostronnego równania rozdzielności (RD) pomiędzy $F \in \mathcal{F}_{a,b}$, gdy $b \leqslant a$ oraz uninormy przy założeniu $U(0,1) = 0$ otrzymujemy odmienną charakteryzację rozwiązań względem tej przedstawionej powyżej. Mianowicie, zachodzenie warunku (RD) nie daje tych samych rozwiązań co w przypadku (LD) w odniesieniu do struktury semi-t-operatora, jak to było możliwe np. w rozważaniach zawartych w [R3].

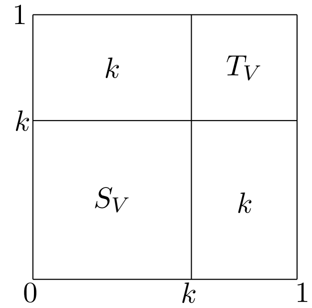
Twierdzenie 13 ([R5], twierdzenie 10). *Niech $a, b, e \in [0,1]$, $0 < b \leqslant a$. Działanie $F \in \mathcal{F}_{a,b}$ jest prawostronnie rozdzielne względem uninormy $U \in \mathcal{U}_e$ spełniajacej $U(0,1) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e < b$, $G = U^{\max}$ (6) i F ma strukturę z rys. 10 (prawy), gdzie T jest izomorficzne z działaniem łącznym klasy $\mathcal{N}_1$, S_1 jest izomorficzna z działaniem łącznym z klasy $\mathcal{N}_0$, e jest lewostronnym elementem neutralnym $S_2 : [e,b]^2 \to [e,b]$, 0 jest prawostronnym elementem neutralnym działania rosnącego $B : [e,b] \times [0,e] \to [0,e]$ oraz B, T, S_1, S_2 mają wspólne wartości na brzegach dziedziny.*



Rysunek 10: Struktura działania $F \in \mathcal{F}_{a,b}$ z tw. 12 (lewy), z tw. 13 (prawy).

Problem rozdzielności dla 2-uninorm

Problem rozdzielności między nullnormami (t-operatorami) został zbadany już w pracy [46], a przy słabszych założeniach w [R7]. Zauważmy (rys. 11), że w strukturze nullnormy V występują dwie uporządkowane półgrupy przemienne $([0,k], S_V, 0)$ i $([k,1], T_V, 1)$ z elementami neutralnymi 0 i 1.



Rysunek 11: Struktura nullnormy $V \in \mathcal{V}$.

Jeżeli teraz dopuścimy możliwość, że elementy neutralne będą dobierane dowolnie w $[0,k]$ i $[k,1]$, to otrzymamy uogólnienie nullnormy z odpowiednimi półgrupami izomorficznymi z uninormą. Dlatego takie uogólnienie zostało nazwane 2-uninormą (por. [2]). Dokładniej mamy

Definicja 11 ([R4], definicja 2.11)**.** Niech $k \in (0,1)$ oraz $0 \leqslant e \leqslant k \leqslant f \leqslant 1$. Działanie rosnące $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy 2-uninormą jeśli jest przemienne, łączne i spełnia warunek

$$\forall_{x \leqslant k}\ F(e,x) = x \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \geqslant k}\ F(f,x) = x. \tag{10}$$

Przez $\mathcal{U}_{k(e,f)}$ oznaczamy klasę wszystkich 2-uninorm.

Bezpośrednio z warunku (10) oraz monotoniczności działania $F \in \mathcal{U}_{k(e,f)}$ wynika, że k jest elementem zerowym w przedziale $[e,f]$, czyli

$$\forall_{x \in [e,f]}\ F(x,k) = k.$$

Lemat 14 ([R4], lemat 2.14)**.** *Niech $F \in \mathcal{U}_{k(e,f)}$. Wówczas dwie funkcje U_1, U_2 zdefiniowane jako*

$$U_1(x,y) = \frac{F(kx,ky)}{k} \qquad dla \quad x,y \in [0,1],$$

$$U_2(x,y) = \frac{F(k+(1-k)x, k+(1-k)y)}{1-k} \qquad dla \quad x,y \in [0,1],$$

są uninormami z elementami neutralnymi równymi odpowiednio $\frac{e}{k}$ i $\frac{f-k}{1-k}$.

Lemat 15 ([R4], lemat 2.15). *Niech $F \in \mathcal{U}_{k(e,f)}$. Wówczas*

(i) *$F(\cdot,0)$ jest nieciągła w punkcie e wtedy i tylko wtedy, gdy $U_1(\cdot,0)$ jest nieciągła w punkcie $\frac{e}{k}$,*

(ii) *$F(\cdot,1)$ jest nieciągła w punkcie f wtedy i tylko wtedy, gdy $U_2(\cdot,1)$ jest nieciągła w punkcie $\frac{f-k}{1-k}$.*

Lemat 16 ([R4], lemat 2.16). *Jeżeli $F \in \mathcal{U}_{k(e,f)}$, to $F(0,1) \in \{0,k,1\}$.*

Z powyższych lematów otrzymujemy trzy podklasy działań z $\mathcal{U}_{k(e,f)}$ w oparciu o element $F(0,1)$ oznaczone jako $\mathcal{C}^0_{k(e,f)}$, $\mathcal{C}^k_{k(e,f)}$, $\mathcal{C}^1_{k(e,f)}$ (lub krócej jako $\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^k, \mathcal{C}^1$).

Reprezentacja 2-uninorm $F \in \mathcal{C}^0, \mathcal{C}^k, \mathcal{C}^1$ z możliwymi punktami nieciągłości e i f jest objęta następującymi twierdzeniami ([R4], twierdzenia 2.17-2.21).

Twierdzenie 17. *Niech $F \in \mathcal{U}_{k(e,f)}$, gdzie $F(\cdot,1)$ jest nieciągła w punktach e i f. $F(1,k)=k$ oraz $F \in \mathcal{C}^0_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < e \leqslant k < f \leqslant 1$ oraz F ma następującą strukturę*

$$F = \begin{cases} U^{c_1} & w\ [0,k]^2 \\ U^{c_2} & w\ [k,1]^2 \\ \min & w\ (k,1]\times[0,e)\cup[0,e)\times(k,1] \\ k & w\ [k,1]\times[e,k]\cup[e,k]\times[k,1] \end{cases},$$

gdzie U^{c_1} i U^{c_2} są działaniami izomorficznymi z pewnymi uninormami z klasy odpowiednio $\mathcal{U}_e^{\min}$ i $\mathcal{U}_f^{\min}$.

Twierdzenie 18. *Niech $F \in \mathcal{U}_{k(e,f)}$, gdzie $F(\cdot,1)$ jest nieciągła w punkcie e i $F(\cdot,e)$ jest nieciągła w punkcie f. $F(1,k)=1$ oraz $F \in \mathcal{C}^0_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < e \leqslant k \leqslant f < 1$ oraz F ma następującą strukturę*

$$F = \begin{cases} U^{c} & w\ [0,k]^2 \\ U^{d} & w\ [k,1]^2 \\ \min & w\ (k,1]\times[0,e)\cup[0,e)\times(k,1] \\ \max & w\ (f,1]\times[e,k)\cup[e,k)\times(f,1] \\ k & w\ [k,f]\times[e,k]\cup[e,k]\times[k,f] \end{cases},$$

gdzie U^c i U^d są działaniami izomorficznymi z pewnymi uninormami z klasy odpowiednio $\mathcal{U}_e^{\min}$ i $\mathcal{U}_f^{\max}$.

Twierdzenie 19. *Niech $F \in \mathcal{U}_{k(e,f)}$, gdzie $F(\cdot,0)$ jest nieciągła w punktach e i f. $F(0,k)=k$ i $F \in \mathcal{C}^1_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \leqslant e < k \leqslant f < 1$ oraz F ma następującą strukturę*

$$F = \begin{cases} U^{d_1} & w\ [0,k]^2 \\ U^{d_2} & w\ [k,1]^2 \\ \max & w\ (f,1]\times[0,k)\cup[0,k)\times(f,1] \\ k & w\ [k,f]\times[0,k]\cup[0,k]\times[k,f] \end{cases},$$

gdzie U^{d_1} i U^{d_2} są działaniami izomorficznymi z pewnymi uninormami z klasy odpowiednio $\mathcal{U}_e^{\max}$ i $\mathcal{U}_f^{\max}$.

Twierdzenie 20. *Niech $F \in \mathcal{U}_{k(e,f)}$, gdzie $F(\cdot,f)$ jest nieciągła w punkcie e a $F(\cdot,0)$ jest nieciągła w punkcie f. $F(0,k)=0$ i $F \in \mathcal{C}^1_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < e \leqslant k \leqslant f < 1$ oraz F ma następującą strukturę*

$$F = \begin{cases} U^{c} & w\ [0,k]^2 \\ U^{d} & w\ [k,1]^2 \\ \min & w\ (k,f]\times[0,e)\cup[0,e)\times(k,f] \\ \max & w\ (f,1]\times[0,k)\cup[0,k)\times(f,1] \\ k & w\ [k,f]\times[e,k]\cup[e,k]\times[k,f] \end{cases},$$

gdzie U^c i U^d są działaniami izomorficznymi z pewnymi uninormami z klasy odpowiednio $\mathcal{U}_e^{\min}$ i $\mathcal{U}_f^{\max}$.

Twierdzenie 21. *Niech $F \in \mathcal{U}_{k(e,f)}$, gdzie $F(\cdot,0)$ jest nieciągła w punkcie $e \in (0,k]$ a $F(\cdot,1)$ jest nieciągła w punkcie $f \in [k,1)$. Wówczas $F \in \mathcal{C}^k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \leqslant e < k < f \leqslant 1$ oraz F ma następującą strukturę*

$$F = \begin{cases} U^d & w\ [0,k]^2 \\ U^c & w\ [k,1]^2 \\ k & w\ [k,1] \times [0,k] \cup [0,k] \times [k,1] \end{cases},$$

gdzie U^d i U^c są działaniami izomorficznymi z pewnymi uninormami z klasy odpowiednio $\mathcal{U}_e^{\max}$ i $\mathcal{U}_f^{\min}$.

W pracy [R4] (wraz z P. Drygasiem) rozwiązano problem rozdzielności pomiędzy działaniami $F \in \mathcal{U}_{k_1(e_1,f_1)}$ i $G \in \mathcal{U}_{k_2(e_2,f_2)}$ rozróżniając zarówno uporządkowanie ich elementów zerowych, jak również ich swoiste struktury wynikające z klasyfikacji. Wymagało to rozpatrzenia 5 przypadków, w których istotna jest struktura 2-uninormy F oraz właściwe uszeregowanie dla poszczególnych elementów neutralnych obu działań aby rozdzielność mogła zachodzić. Okazało się, że pełna charakteryzacja rozwiązań zależy od dwudziestu pięciu przypadków, co tym bardziej czyniło ten problem interesującym. Głównymi wynikami [R4] są twierdzenia 5.1, 5.3, 5.5, 5.7 oraz odpowiednie uwagi 5.2, 5.4, 5.6, 5.8. Tu, podobnie jak we wcześniej omawianych pracach, warunkiem koniecznym rozdzielności obu działań jest idempotentność tego z nich względem którego ona zachodzi. Dowód idempotentności i ostatecznej struktury G nie jest jednak standardowy. Składa się zwykle z kilku etapów z których jeden dotyczy ewentualnego zredukowania elementów e_2 i f_2 tego działania do 0, k i/lub 1. Wówczas w pewnych podklasach 2-uninorm powoduje to znaczące uproszczenie wyjściowej struktury tego działania. Zobaczmy to na przykładzie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 22 ([R4], twierdzenie 5.1). *Niech $k_1, k_2 \in [0,1]$ oraz $k_2 \leqslant k_1$. Działanie $F \in \mathcal{C}^{k_1}_{(e_1,f_1)}$ jest rozdzielne względem działania $G \in \mathcal{U}_{k_2(e_2,f_2)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e_1 \leqslant e_2 \leqslant k_2 \leqslant k_1 \leqslant f_2 \leqslant f_1$, G jest idempotentne dane odpowiednim wzorem*

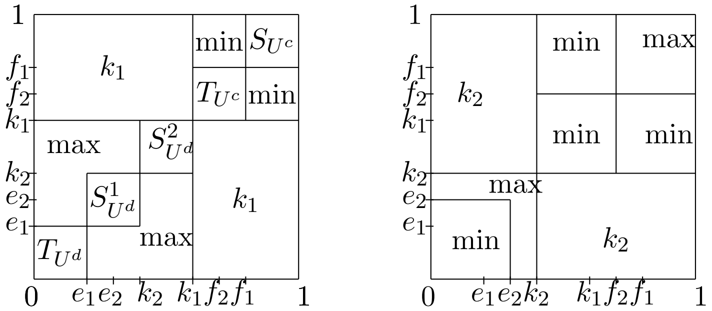
$$\mathcal{C}^{k_2} \ni G = \begin{cases} U^{\max} & w\ [0,k_2]^2 \\ U^{\min} & w\ [k_2,1]^2 \\ k_2 & poza\ tym \end{cases}, \qquad \mathcal{C}^0_{k_2} \ni G = \begin{cases} U^{\min} & w\ [k_2,1]^2 \\ \min & poza\ tym \end{cases}, \tag{11}$$

$$\mathcal{C}^1_{k_2} \ni G = \begin{cases} U^{\max} & w\ [0,k_2]^2 \\ \max & poza\ tym \end{cases}, \qquad \mathcal{C}^1_0 \ni G = U^{\min}\ (zob.\ (5)), \quad \mathcal{C}^0_1 \ni G = U^{\max}\ (zob.\ (6)) \tag{12}$$

oraz F jest następującej postaci

$$F = \begin{cases} T_{U^d} & w\ [0,e_1]^2 \\ S^1_{U^d} & w\ [e_1,k_2]^2 \\ S^2_{U^d} & w\ [k_2,k_1]^2 \\ U^c & w\ [k_1,1]^2 \\ k_1 & w\ [k_1,1] \times [0,k_1] \cup [0,k_1] \times [k_1,1] \\ \max & poza\ tym \end{cases}, \tag{13}$$

gdzie $([0,e_1], T_{U^d}, e_1)$, $([e_1,k_2], S^1_{U^d}, e_1)$ i $([k_2,k_1], S^2_{U^d}, k_2)$ to uporządkowane półgrupy przemienne z elementami neutralnymi odpowiednio równymi e_1, e_1 i k_2.



Rysunek 12: Struktury rozdzielnych 2-uninorm z twierdzenia 22 dla $F \in \mathcal{C}^{k_1}$ i $G \in \mathcal{C}^{k_2}$.

Uwaga 2 ([R4], uwaga 5.2). W przypadku rozdzielności pomiędzy $F \in \mathcal{C}^{k_1}_{(e_1,f_1)}$ i $G \in \mathcal{U}_{k_2(e_2,f_2)}$, gdy $k_1 < k_2$ jedyna różnica występuje w strukturze 2-uninormy F, a mianowicie

$$F = \begin{cases} U^d & w\ [0,k_1]^2 \\ T^1_{U^c} & w\ [k_1,k_2]^2 \\ T^2_{U^c} & w\ [k_2,f_1]^2 \\ S_{U^c} & w\ [f_1,1]^2 \\ k_1 & w\ [k_1,1]\times[0,k_1]\cup[0,k_1]\times[k_1,1] \\ \min & \textit{poza tym} \end{cases},$$

gdzie $([k_1,k_2],T^1_{U^c},k_2)$, $([k_2,f_1],T^2_{U^c},f_1)$ i $([f_1,1],S_{U^c},f_1)$ to uporządkowane półgrupy przemienne z elementami neutralnymi odpowiednio równymi k_2, f_1 i f_1.

Z kolei w przypadku charakteryzacji rozwiązań rozdzielności dla 2-uninorm z podklas $\mathcal{C}^0_1$ i $\mathcal{C}^1_0$ względem dowolnej 2-uninormy otrzymane struktury idempotentne pokrywają się. Wówczas z połączenia obu przypadków uzyskano następujący rezultat.

Twierdzenie 23 ([R4], twierdzenie 5.7)**.** *Niech $k_1,k_2 \in [0,1]$ oraz $k_2 \leqslant k_1$. Działanie $F \in \{\mathcal{C}^0_1,\mathcal{C}^1_0\}$ jest rozdzielne względem działania $G \in \mathcal{U}_{k_2(e_2,f_2)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e_2 \leqslant e_1 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant f_2 \leqslant f_1$, G jest idempotente dane odpowiednim wzorem*
$\mathcal{C}^{k_2} \ni G = V_k$ (zob. (7)),

$$\mathcal{C}^0_{k_2} \ni G = \begin{cases} U^{\min} & w\ [0,k_2]^2 \\ k_2 & w\ [e_2,k_2]\times[k_2,1]\cup[k_2,1]\times[e_2,k_2] \\ \min & \textit{poza tym} \end{cases},\quad \mathcal{C}^1_{k_2} \ni G = \begin{cases} U^{\max} & w\ [k_2,1]^2 \\ k_2 & w\ (f_2,1]\times[0,k_2)\cup[0,k_2)\times(f_2,1] \\ \max & \textit{poza tym} \end{cases},$$

$$\mathcal{C}^0_1 \ni G = \begin{cases} U^{\min} & w\ [0,k_2]^2 \\ U^{\max} & w\ [k_2,1]^2 \\ k_1 & w\ [k_1,f_1]\times[e_1,k_1]\cup[e_1,k_1]\times[k_1,f_1] \\ \min & w\ (k_2,1]\times[0,e_2)\cup[0,e_2)\times(k_2,1] \\ \max & \textit{poza tym} \end{cases},\quad \mathcal{C}^1_0 \ni G = \begin{cases} U^{\min} & w\ [0,k_2]^2 \\ U^{\max} & w\ [k_2,1]^2 \\ k_1 & w\ [k_1,f_1]\times[e_1,k_1]\cup[e_1,k_1]\times[k_1,f_1] \\ \min & w\ (k_1,f_1]\times[0,e_1)\cup[0,e_1)\times(k_1,f_1] \\ \max & \textit{poza tym} \end{cases}$$

oraz F jest następującej postaci

$$\mathcal{C}^0_1 \ni F = \begin{cases} T_{U^c} & w\ [0,e_1]^2 \\ S^1_{U^c} & w\ [e_1,k_2]^2 \\ S^2_{U^c} & w\ [k_2,k_1]^2 \\ U^d & w\ [k_1,1]^2 \\ k_1 & w\ [k_1,f_1]\times[e_1,k_1]\cup[e_1,k_1]\times[k_1,f_1] \\ \min & w\ (k_1,1]\times[0,e_1)\cup[0,e_1)\times(k_1,1] \\ \max & \textit{poza tym} \end{cases},\quad \mathcal{C}^1_0 \ni F = \begin{cases} T_{U^c} & w\ [0,e_1]^2 \\ S^1_{U^c} & w\ [e_1,k_2]^2 \\ S^2_{U^c} & w\ [k_2,k_1]^2 \\ U^d & w\ [k_1,1]^2 \\ k_1 & w\ [k_1,f_1]\times[e_1,k_1]\cup[e_1,k_1]\times[k_1,f_1] \\ \min & w\ (k_1,f_1]\times[0,e_1)\cup[0,e_1)\times(k_1,f_1] \\ \max & \textit{poza tym} \end{cases},$$

gdzie ($[0,e_1],T_{U^c},e_1$), ($[e_1,k_2],S^1_{U^c},e_1$) i ($[k_2,k_1],S^2_{U^c},k_2$) to uporządkowane półgrupy przemienne z elementami neutralnymi odpowiednio równymi e_1, e_1 i k_1.

Uwaga 3 ([R4], uwaga 5.8). W przypadku $k_1 < k_2$ mamy

$$\mathcal{C}_1^0 \ni F = \begin{cases} U^c & w\ [0,k_1]^2 \\ T^1_{U^d} & w\ [k_1,k_2]^2 \\ T^2_{U^d} & w\ [k_2,f_1]^2 \\ S_{U^d} & w\ [f_1,1]^2 \\ k_1 & w\ [k_1,f_1]\times[e_1,k_1]\cup[e_1,k_1]\times[k_1,f_1] \\ \max & w\ (f_1,1]\times[e_1,k_1)\cup[e_1,k_1)\times(f_1,1] \\ \min & \textit{poza tym} \end{cases}, \quad \mathcal{C}_0^1 \ni F = \begin{cases} U^c & w\ [0,k_1]^2 \\ T^1_{U^d} & w\ [k_1,k_2]^2 \\ T^2_{U^d} & w\ [k_2,f_1]^2 \\ S_{U^d} & w\ [f_1,1]^2 \\ k_1 & w\ [k_1,f_1]\times[e_1,k_1]\cup[e_1,k_1]\times[k_1,f_1] \\ \max & w\ (f_1,1]\times[0,k_1)\cup[0,k_1)\times(f_1,1] \\ \min & \textit{poza tym} \end{cases},$$

gdzie $([k_1,k_2],T^1_{U^d},k_2)$, $([k_2,f_1],T^2_{U^d},f_1)$ i $([f_1,1],S_{U^d},f_1)$ to uporządkowane półgrupy przemienne z elementami neutralnymi odpowiednio równymi k_2, f_1 i f_1.

Problem modularności dla 2-uninorm

W pracy [R6] (wraz z W. Fechnerem i L. Zedamem) rozwiązano problem modularności pomiędzy działaniami z klasy 2-uninorm. Uzyskane wyniki rozważań dla działań posiadających ten sam element zerowy obejmują zarówno nietrywialne rozwiązania równania modularności, jak również ich zupełny brak.

Równanie modularności dla działań $F \in \mathcal{U}_{k_1(e_1,f_1)}$ i $G \in \mathcal{U}_{k_2(e_2,f_2)}$ w szczególnym przypadku, gdy $k_1 = k_2 = k \notin \{0,1\}$ wymusiło ich konkretne struktury. W dwadziestu zbadanych przypadkach rozróżniono zarówno postacie obu działań, jak i właściwe uporządkowanie ich poszczególnych elementów neutralnych. Uzyskane uporządkowanie przedstawia następujący lemat.

Lemat 24 ([R6], lemat 6.1)**.** *Jeżeli* $k_1 = k_2 = k \in (0,1)$ *i działanie* $F \in \mathcal{U}_{k_1(e_1,f_1)}$ *dla* $0 \leqslant e_1 \leqslant k_1 \leqslant f_1 \leqslant 1$ *jest modularne względem działania* $G \in \mathcal{U}_{k_2(e_2,f_2)}$ *dla którego* $0 \leqslant e_2 \leqslant k_2 \leqslant f_2 \leqslant 1$*, to*

$$0 \leqslant e_2 \leqslant e_1 \leqslant k \leqslant f_2 \leqslant f_1 \leqslant 1.$$

Z kolei jeśli $e_1 = e_2 = e$ i $f_1 = f_2 = f$, to korzystając dwukrotnie z twierdzenia (twierdzenie 5.2 w [R6]), któro mówi, że jeśli dwa działania przemienne posiadające taki sam element neutralny są modularne, to są one równe w sensie struktury, wnioskujemy, że jednocześnie $F|_{[0,k]^2} = G|_{[0,k]^2}$ i $F|_{[k,1]^2} = G|_{[k,1]^2}$.

Tak więc biorąc pod uwagę strukturę działań z każdej podklasy 2-uninorm, można było natychmiast stwierdzić, że jedyną możliwością jest rozważanie modularności pomiędzy 2-uninormami F i G z tych samych podklas. W tym przypadku okazało się, że one pokrywają się w całym kwadracie jednostkowym, co też zredukowało rozważania do samomodularności, a dokładniej, równania łączności na obciętej dziedzinie tj.

$$F(x,F(y,z)) = F(F(x,y),z) \ \text{ dla wszystkich } \ x,y,z \in [0,1] \text{ takich, że } \ z \leqslant x.$$

Jeżeli $e_2 < e_1$ i $f_1 = f_2 = f$, to $U_{f_1} = U_{f_2} = U_f$ w kwadracie $[k,1]^2$ i rozważanie równania modularności dla działań z poszczególnych podklas 2-uninorm jest możliwe tylko wtedy, gdy

(*i*) $F,G \in \mathcal{C}^k \cup \mathcal{C}^0_k$, $F,G \in \mathcal{C}^k$, $F,G \in \mathcal{C}^1_k$,

(*ii*) $F \in \mathcal{C}^0_1$ i $G \in \mathcal{C}^1_0 \cup \mathcal{C}^1_k$,

(*iii*) $F \in \mathcal{C}^1_k$ i $G \in \mathcal{C}^0_1 \cup \mathcal{C}^1_0$,

(*iv*) $F \in \mathcal{C}^1_0$ i $G \in \mathcal{C}^1_k \cup \mathcal{C}^0_1$.

Jeżeli $e_1 = e_2 = e$ i $f_2 < f_1$, to $U_{e_1} = U_{e_2} = U_e$ w kwadracie $[0,k]^2$ i rozważanie równania modularności dla działań z poszczególnych podklas 2-uninorm jest możliwe tylko wtedy, gdy *(i)* $F, G \in \mathcal{C}^k \cup \mathcal{C}_k^1$, $F, G \in \mathcal{C}^k$, $F, G \in \mathcal{C}_k^0$,

(ii) $F \in \mathcal{C}_1^0$ i $G \in \mathcal{C}_k^0 \cup \mathcal{C}_0^1$,

(iii) $F \in \mathcal{C}_k^0$ i $G \in \mathcal{C}_1^0 \cup \mathcal{C}_0^1$,

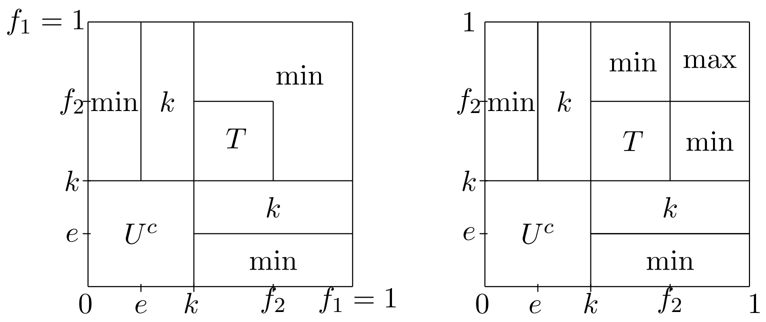
(iv) $F \in \mathcal{C}_0^1$ i $G \in \mathcal{C}_1^0 \cup \mathcal{C}_k^0$.

Zgodnie z zaproponowanymi przypadkami otrzymano zarówno negatywne, jak i pozytywne wyniki. Główne wyniki pracy [R6] dotyczące równania modularności w klasie 2-uninorm dla których otrzymano nietrywialne rozwiązania to twierdzenia 6.4 - 6.7, gdy $e_2 < e_1$ i $f_1 = f_2 = f$ oraz twierdzenia 6.8 - 6.11, gdy $e_1 = e_2 = e$ i $f_2 < f_1$. Dokładniej rozważając przykładowo przypadek $F, G \in \mathcal{C}_k^0$, dla których $0 < e_2 = e_1 = e \leqslant k < f_2 < f_1 \leqslant 1$ wykazano następujące twierdzenie (z wykorzystaniem twierdzenia 3.4 *(iii)* z [R6] dla $F_{|[k,1]^2}$ i $G_{|[k,1]^2}$).

Twierdzenie 25 ([R6], twierdzenie 6.10)**.** *Niech $F, G \in \mathcal{C}_k^0$, dla których $0 < e = e_2 = e_1 \leqslant k < f_2 < f_1 \leqslant 1$. Działanie F jest modularne względem działania G wtedy i tylko wtedy, gdy są one następującej postaci*

$$F = \begin{cases} U^c & w\ [0,k]^2 \\ T & w\ [k,f_2]^2 \\ k & w\ [k,1] \times [e,k] \cup [e,k] \times [k,1] \\ \min & poza\ tym \end{cases}, \quad G = \begin{cases} U^c & w\ [0,k]^2 \\ T & w\ [k,f_2]^2 \\ \max & w\ [f_2,1]^2 \\ k & w\ [k,1] \times [e,k] \cup [e,k] \times [k,1] \\ \min & poza\ tym \end{cases},$$

gdzie $U^c : [0,k]^2 \to [0,k]$ i $T : [k,f_2]^2 \to [k,f_2]$ są działaniami izomorficznymi odpowiednio z pewną uninormą z klasy $\mathcal{U}_e^{\min}$ oraz pewną normą trójkątną.



Rysunek 13: Struktura działań $F, G \in \mathcal{C}_k^0$ z twierdzenia 25.

Wyniki uzyskane w [R6], które zgodnie z przypadkami $e_2 < e_1$, $f_1 = f_2 = f$ oraz $e_1 = e_2 = e$, $f_2 < f_1$ nie doprowadziły do rozwiązań równania modularności tworzą zbiór twierdzeń 6.12 - 6.20 wraz z interesującymi przykładami objętymi uwagami 6.14 i 6.19.

W poniższej tabeli zestawiono wszystkie uzyskane wyniki [R6] dotyczące równania modularności dla 2-uninorm z każdej zdefiniowanej podklasy, przy czym wyszczególniono przypadki, w których istnieją rozwiązania (+), brak rozwiązań (-), sprzeczność między parametrami działań ($\sharp$).

$F \setminus G$	$\mathcal{C}_k^0$	$\mathcal{C}_1^0$	$\mathcal{C}_k^1$	$\mathcal{C}_0^1$	$\mathcal{C}^k$
$\mathcal{C}_k^0$	(+) tw. 6.10	(+) tw. 6.11	($\sharp$)	(-) uwaga 6.19	(+) tw. 6.4
$\mathcal{C}_1^0$	(-) tw. 6.18	($\sharp$)	(-) uwaga 6.14	(-) tw. 6.13 i 6.18	($\sharp$)
$\mathcal{C}_k^1$	($\sharp$)	(-) tw. 6.15	(+) tw. 6.6	(-) tw. 6.15	(-) tw. 6.17
$\mathcal{C}_0^1$	(-) tw. 6.20	(-) tw. 6.16 i 6.20	(+) tw. 6.7	($\sharp$)	($\sharp$)
$\mathcal{C}^k$	(-) tw. 6.12	($\sharp$)	(+) tw. 6.8	($\sharp$)	(+) tw. 6.5 i 6.9

W pracy [R6] wskazano częściową charakteryzację rozwiązań równania (1), tj. w przypadku, gdy zarówno 2-uninorma F jak i G mają ten sam wyróżniony element k. Aktualnie kontynuuję badania nad tym problemem w ogólniejszym przypadku, gdzie nie znamy uporządkowania pomiędzy elementami zerowymi i elementami neutralnymi. Te z nich, które są już udowodnione to twierdzenie 6.21 w [R6] (twierdzenie 11 w [R17]) oraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 26 ([R6], twierdzenie 6.22)**.** *Niech $F \in \mathcal{C}_0^1$, dla którego $0 < e_1 \leqslant k_1 \leqslant f_1 < 1$ oraz $G \in \mathcal{C}_k^0 \cup \mathcal{C}_1^0$, dla którego $0 < e_2 \leqslant k_2 < f_2 < 1$. Wówczas F nie jest modularne względem G tzn. równanie* (1) *nie ma rozwiązań.*

Poszukiwanie rozwiązań równania funkcyjnego jest ściśle związane z zadaną z góry określoną strukturą rozpatrywanych w nim funkcji. Jak można było się spodziewać, w większości przypadków uzyskano negatywne wyniki. W istocie potwierdza to jedynie tezę, że warunek modularności jest istotnie silnym warunkiem i trudno jest go spełnić w przypadku funkcji o bardziej złożonej strukturze.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

5.1 Lista publikacji nie wchodzących w skład osiągnięcia wymienionego w punkcie 4.2.

5.1.1 Publikacje naukowe w czasopismach znajdujących się w bazie Journal Citation Reports (Edycja 2016):

[R7] E. Rak, Distributivity equation for nullnorms, Journal of Electrical Engineering 56, 12/s (2005), 53–55.

[R8] **E. Rak**, P. Drygaś, Distributivity between uninorms, Journal of Electrical Engineering 57, 7/s (2006), 35–38.

[R9] E. Rak, Some remarks about distributivity between uninorms, Journal of Electrical Engineering 58, 7/s (2007), 41-42.

[R10] J. Drewniak, P. Drygaś, **E. Rak**, Distributivity equations for uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets and Systems 159 (2008), 1646-1657.

[R11] J. Drewniak, **E. Rak**, Subdistributivity and superdistributivty of binary operations, Fuzzy Sets and Systems 161 (2010), 189-210.

[R12] R. Rak, **E. Rak**, Route to chaos in generalized logistic map, Acta Physica Polonica A 127 (2015), 113-117.

[R13] K.N. Agbeko, W. Fechner, **E. Rak**, On lattice-valued maps stemming from the notion of optimal average, Acta Mathematica Hungarica 152 (1) (2017), 72–83.

5.1.2 Publikacje naukowe inne niż w czasopismach znajdujących się w bazie Journal Citation Reports (Edycja 2016):

[R14] R. Rak, **E. Rak**, Route to chaos in generalized logistic map, 7th International workshop for young mathematicians 'Applied Mathematics', KMS UJ Kraków (2005), ISBN:83-233-2075-6, 191-201.

[R15] E. Rak, Structure of idempotent uninorms, Scientific bulletin of Chełm, Section of mathematics and computer science no. 1/2007, ISBN:978-83-61149-20-0, 117-121.

[R16] E. Rak, Conditional distributivity of binary increasing operations, w: K.T. Atanassov i in. (red.), Developments in Fuzzy Sets, Intuitionistic Fuzzy Sets, Generalized Nets and Related Topics, Vol. I, Foundations, SRI PAS/IBS PAN, Warsaw 2010, 175-185.

[R17] E. Rak, The modularity equation in the class of 2-uninorms, w: P. Angelov i in. (red.), Intelligent Systems' 2014 Advances in Intelligent Systems and Computing 322, Springer International Publishing Switzerland 2015, 45-54 (indeksowana w Web of Science).

[R18] P. Drygaś, F. Qin, **E. Rak**, The distributivity between semi-t-operators and uninorms, Proceedings of the 8th International Summer School on Aggregation Operators (AGOP 2015), Michał Baczyński, Bernard De Baets, Radko Mesiar (red.) University of Silesia, Katowice 2015, ISBN:978-83-8012-519-3, 103-108.

[R19] P. Drygaś, **E. Rak**, L. Zedam, Distributivity of aggregation operators with 2-neutral elements, Proceedings of the 8th International Summer School on Aggregation Operators (AGOP 2015), Michał Baczyński, Bernard De Baets, Radko Mesiar (red.) University of Silesia, Katowice, Poland, 2015, ISBN:978-83-8012-519-3, 109-114.

[R20] S. Milles, **E. Rak**, L. Zedam, On intuitionistic fuzzy lattices, Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE) 2015, DOI: 10.1109/FUZZ-IEEE.2015.7338095, 4 pages (indeksowana w Web of Science).

[R21] S. Milles, **E. Rak**, L. Zedam, Intuitionistic fuzzy complete lattices, w: K.T. Atanassov i in. (red.), Novel Developments in Uncertainty Representation and Processing, Advances in Intelligent Systems and Computing 401, Springer International Publishing Switzerland 2016, 149-160 (indeksowana w Web of Science).

[R22] L. Zedam, S. Milles, **E. Rak**, The fixed point property for intuitionistic fuzzy ordered sets, Fuzzy Information and Engineering 9 (2017), 359–381.

[R23] U. Bentkowska, J. Drewniak, P. Drygaś, A. Król, **E. Rak**, Dominance of binary operations on posets, w: K.T. Atanassov i in. (red.), Uncertainty and Imprecision in Decision Making and Decision Support: Cross Fertilization, New Models and Applications, Advances in Intelligent Systems and Computing 559, Springer International Publishing AG 2018, DOI: 10.1007/978-3-319-65545-1 14.

Omówienie najważniejszych wyników powyższych publikacji

Prace [R7] - [R10] a także [R14]-[R15] zostały opublikowane przed uzyskaniem stopnia doktora. Obejmują one pełną charakteryzację par dwuargumentowych działań rosnących z wyróżnionym elementem idempotentnym (tj. elementem neutralnym lub zerowym), które spełniają aksjomat rozdzielności przy możliwie słabych założeniach. Cechą szczególną uzyskanych wyników jest to, że warunkiem koniecznym rozdzielności jest zawsze idempotentność działania, względem którego ona zachodzi, natomiast warunek wystarczający wymusza określoną strukturę dziedziny pierwszego działania, którego zacieśnienia muszą spełniać dodatkowe własności.

Odnosząc się do wyników z prac [46]-[47], samodzielnie jak w [R7] i [R9] oraz przy współpracy z P. Drygasiem i J. Drewniakiem w [R8] i [R10], wykazałam zbędność pewnych założeń nakładanych na działania poddawane sprawdzeniu spełniania przez nie równania rozdzielności. Okazało się bowiem, że zarówno przemienność jak i łączność nie jest wymagana w tego typu rozważaniach. Dzięki temu zdefiniowałam dwie klasy działań rosnących uogólniające odpowiednio uninormy i nullnormy.

Wartym podkreślenia jest fakt, że praca [R10], która dotyczy rozdzielności uogólnionych uninorm względem nullnorm i odwrotnie, jest moją najczęściej cytowaną pracą i posiada aktualnie 41 cytowań (bez samocytowań) zgodnie z bazą Google Scholar.

Praca [R15] pośrednio nawiązuje do omówionych wyżej rozwiązań równań rozdzielności dla działań z klasy $\mathcal{N}_e$. Wskazano w niej minimalny zestaw założeń jaki należy nałożyć na działanie $\mathcal{N}_e$ aby implikowały jego idempotentność. W ten sposób udowodniono twierdzenie 3.3, mówiące, że działanie z klasy $\mathcal{N}_e^{\min}$ lub $\mathcal{N}_e^{\max}$ jest nadidempotentne w $[0, e]$ i podidempotentne w $[e, 1]$ wtedy i tylko wtedy gdy jest jedyną (najmniejszą) uninormą idempotentną w klasie $\mathcal{N}_e^{\min}$ lub jedyną (największą) uninormą idempotentną w klasie $\mathcal{N}_e^{\max}$. Ponadto pokazano na przykładach istotność wszystkich nałożonych założeń (zob. przykład 3.1).

Pozostałe prace (opublikowane po uzyskaniu stopnia doktora) można podzielić zasadniczo na dwie grupy. Pierwszą najliczniejszą z nich, tworzą prace [R11],[R16]-[R19],[R23] w dalszym ciągu skoncentrowane wokół równań i nierówności funkcyjnych.

Praca [R11] (z J. Drewniakiem) jest szczegółowym podsumowaniem różnych wyników dotyczących równania samorozdzielności ($F = G$ w równaniu (LD)) i nierówności funkcyjnych rozdzielności dla typowych działań z rodzin średnich, norm i konorm trójkątnych. Podjęte próby stosownego ich uogólniania prowadziły jednak do konstruowania różnorodnych kontrprzykładów. Większość z tych wyników dotyczy zatem dobrze znanych przykładów wspomnianych wyżej działań. Poprzez dokładne przeliczenie wszystkich przypadków ujętych w tabelach 3 i 4 w [R11] udało się wskazać pewne istniejące w literaturze nieścisłości odnoszące się do tego tematu rozważań (zob. wzory (64),(65) w [50] - dotyczy przykładu 3.5 w [R11] oraz twierdzeń 6 i 10 w [12] - zob. komentarz do wniosku 3.13 w [R11]).

W [R11] wskazano również związek pomiędzy własnością dominacji a własnością podrozdzielności i nadrozdzielności. Dominacja jest własnością działań, która jak się okazało odgrywa znaczącą rolę w rozważaniach związanych z nierównościami funkcyjnymi rozdzielności. Pojęcie dominacji wprowadzili Schweizer i Sklar [60] dla działań łącznych o wspólnej dziedzinie i wspólnym elemencie neutralnym.

Definicja 12 (por. [60], definicja 12.7.2)**.** Niech $F, G : [0,1]^2 \to [0,1]$. Działanie F dominuje działanie G ($F \gg G$) jeśli dla wszystkich $x, y, z, w \in [0,1]$ zachodzi warunek

$$F(G(x,y), G(z,w)) \geqslant G(F(x,z), F(y,w)).$$

Dwa główne twierdzenia pracy [R11] opisujące zależność pomiędzy dominacją a nierównościami funkcyjnymi rozdzielności dla działań dwuargumentowych o minimalnych założeniach są następującej treści:

Twierdzenie 27 ([R11], twierdzenie 5.3)**.** *Niech* $F, G : [0,1]^2 \to [0,1]$ *oraz* G *będzie działaniem rosnącym.*

- *Jeżeli działanie* F *jest lewostronnie i prawostronnie nadrozdzielne względem działania* G *oraz* $G \geqslant \max$*, to* F *dominuje* G*.*
- *Jeżeli działanie* F *jest lewostronnie i prawostronnie podrozdzielne względem działania* G *oraz* $G \leqslant \min$*, to* G *dominuje* F*.*

Twierdzenie 28 ([R11], twierdzenie 5.4)**.** *Niech* $F, G : [0,1]^2 \to [0,1]$ *oraz* F *będzie działaniem rosnącym.*

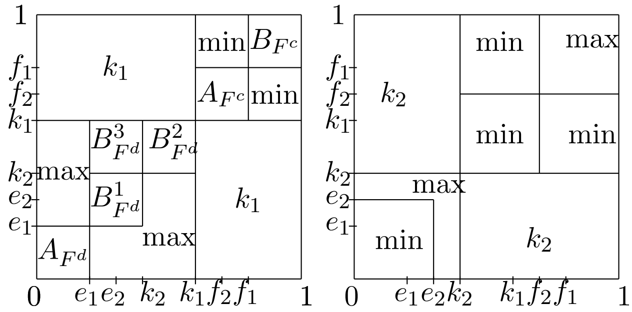
- *Jeżeli działanie* F *dominuje* G *oraz* G *jest podidempotentne* ($G(x,x) \leqslant x$)*, to* F *jest nadrozdzielne względem działania* G*.*
- *Jeżeli działanie* G *dominuje* F *oraz* G *jest nadidempotentne* ($G(x,x) \geqslant x$)*, to* F *jest podrozdzielne względem działania* G*.*

Pierwsze z nich bezpośrednio pokazuje, że poprzez prosty łańcuch nierówności- lewo i prawostronna nadrozdzielność F względem $G \geqslant \max$ implikuje dominację F nad G, podczas gdy drugie mogłoby wydawać się w pewnym stopniu twierdzeniem odwrotnym (choć istotnie nie jest), zastępując $G \geqslant \max$ warunkiem podidempotentności dla działania G.

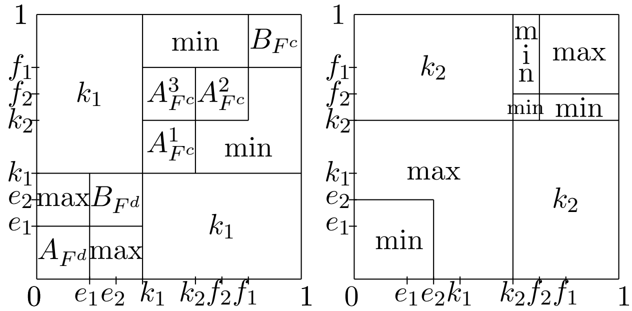
Szersze i ogólniejsze opracowanie dotyczące relacji dominacji dla działań binarnych określonych na zbiorach częściowo uporządkowanych, również w odniesieniu do nierówności funkcyjnych rozdzielności, obejmuje praca [R23] napisana wspólnie z U. Bentkowską, J. Drewniakiem, P. Drygasiem i A. Król, którzy podobnie jak ja na różnych etapach pracy badawczej zajmowali się tą tematyką.

Prace [R16], [R17], [R18] opublikowane w materiałach pokonferencyjnych obejmują głównie szczególne przypadki odpowiednich artykułów [R2], [R6], [R5] omówionych szczegółowo w punkcie 4 niniejszego autoreferatu.

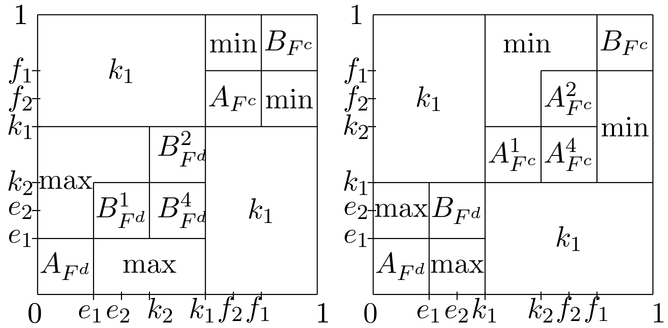
Wyniki pracy [R19], napisanej wspólnie z P. Drygasiem i L. Zedamem, stanowią uogólnienie wyników z pracy [R4] w jednym z rozpatrywanych w niej przypadków. Wprowadzono bowiem pojęcie klasy 2-semi-uninorm $\mathcal{N}_{k(e,f)}$ wraz ze strukturyzacją jednej z jej możliwych podklas $\mathcal{N}^{k}_{k(e,f)}$, a następnie scharakteryzowano rozwiązania równań rozdzielności (LD) i (RD) dla działań z tej podklasy w zależności od uporządkowania ich elementów zerowych oraz elementów neutralnych. Uzyskane rozwiązania obejmujące twierdzenia 5.1 i 5.3 oraz uwagę 5.4 w [R19] mają następującą reprezentację graficzną (rys. 14, 15, 16).



Rysunek 14: Struktura działań $F \in \mathbf{N}^{k_1}_{k_1(e_1,f_1)}$ i $G \in \mathbf{N}^{k_2}_{k_2(e_2,f_2)}$ z twierdzenia 5.1 w [R19], gdy $k_2 \leqslant k_1$.



Rysunek 15: Struktura działań $F \in \mathbf{N}^{k_1}_{k_1(e_1,f_1)}$ i $G \in \mathbf{N}^{k_2}_{k_2(e_2,f_2)}$ z twierdzenia 5.3 w [R19], gdy $k_1 < k_2$.



Rysunek 16: Struktura działania $F \in \mathbf{N}^{k_1}_{k_1(e_1,f_1)}$ z uwagi 5.4 w [R19] (przypadek $k_2 \leqslant k_1$ (z lewej), przypadek $k_1 < k_2$ (z prawej).

Drugą grupę opublikowanych po doktoracie prac naukowych stanowią prace [R12]-[R13] oraz [R20]-[R22].

W pracy [R12] wraz z R. Rakiem zaproponowano uogólnienie znanego w teorii układów dynamicznych odwzorowania logistycznego $x_{n+1} = f_r(x_n) = rx_n(1-x_n)$, $x_n \in [0,1]$, $r \in (0,4]$, $n = 0,1,2,...$, którego dynamika w zależności od parametru r zmienia się od okresowości do chaosu. Poszerzenie możliwości optymalizacji procesu modelowania ewolucji populacji umożliwia następujące równanie różnicowe $x_{n+1} = f_r(x_n) = r^p x_n(1 - x_n^q)$, $x_n \in [0,1]$, $n = 0,1,2,...$, gdzie p i q mogą przyjmować dowolne dodatnie wartości rzeczywiste. Dla zaproponowanego równania przeprowadzono szczegółową analizę i przedstawiono scenariusz przejścia Feigenbauma od regularności do chaosu dla całego spektrum parametrów modelu. W szczególności wykazano, że dla $p = q$ wartość parametru r_{max}, odpowiadającego za całą dynamikę układu, jest taka sama jak w przypadku klasycznego równania logistycznego ($r_{max} = 4$). Przeprowadzono również analityczną i numeryczna analizę modelu w przypadku $p = 1$ i $q = 2$, zarówno w regionie okresowym, jak i chaotycznym, gdzie wykładnik Lyapunova ma wartości dodatnie. Okazało się, że dynamika tego równania jest znacznie szybsza niż w przypadku klasycznego odwzorowania logistycznego, osiągając maksymalną wartość parametru r_{max} już na poziomie wartości około $r \approx 2,3$. Ponadto w regionie okresowości można było zidentyfikować stałą Feigenbauma δ jako typową dla wszystkich układów rozproszonych (także dla odwzorowania logistycznego). Dla obszaru chaotycznego określono także analityczną formę funkcji gęstości niezmienniczej. W obu układach zaproponowano konkretną postać reprezentacji danych, która pozwoliła uzyskać nietypową strukturę zbioru punktów przyciągających (atraktorów).

W pracy [R13] (napisanej wraz z K.N. Agbeko i W. Fechnerem) rozważano odwzorowania o wartościach w kracie z wykorzystaniem równań i nierówności funkcyjnych jako morfizmy pomiędzy strukturą algebraiczną a strukturą uporządkowaną, czyli równanie

$$T(x * y) = T(x) \vee T(y), \quad x, y \in S \tag{14}$$

i związane z nim nierówności funkcyjne

$$T(x * y) \geqslant T(x) \vee T(y), \quad x, y \in S \tag{15}$$

$$T(x * y) \leqslant T(x) \vee T(y), \quad x, y \in S, \tag{16}$$

gdzie $(S, *)$ jest pógrupą, a $(L, \leqslant)$ kratą.

Główne wyniki zasadniczo dotyczyły kwestii oddzielania (twierdzenia 3.1 i 3.2) oraz problemu stabilności typu Hyersa-Ulama (twierdzenie 3.4).

Twierdzenia o oddzielaniu były badane przez wielu autorów. Klasycznym wynikiem jest twierdzenie Mazura-Orlicza [48] uogólnione przez R. Kaufmana [37] i przez P. Kranza [40]. W 1978 G. Rodé [52] udowodnił uogólnienie twierdzenia Hahna-Banacha, bardzo przydatne w teorii równań i nierówności funkcyjnych. Z. Gajda i Z. Kominek [29] przedstawili z kolei inne podejście, które zmotywowało nas do udowodnienia twierdzeń 3.1 i 3.2 w [R13] dotyczących problemu oddzielania dla nierówności (15) i (16). Dokładniej wskazano w nich warunki aby dwa rozwiązania przeciwnych nierówności można było oddzielić rozwiązaniem równania. Przypomnijmy w tym celu pojęcie σ-ciągłej kraty.

Definicja 13 ([8])**.** Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem w kracie $L = (L, \leqslant)$. Mówimy, że $x_n \uparrow x$ $(x \in L)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_n \leqslant ...$, istnieje $\bigvee x_n$ oraz $\bigvee x_n = x$. W tym przypadku możemy zapisać $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.
Kratę L nazywamy σ-ciągłą jeśli $x_n \uparrow x$ pociąga za sobą $x_n \wedge y \uparrow x \wedge y$ (lub równoważnie $x_n \downarrow x$ implikuje $x_n \vee y \downarrow x \vee y$) dla każdego $y \in L$. Jeśli L jest σ-ciągła, to dla takich ciągów $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ z L, że $x_n \uparrow x$, $y_n \uparrow y$ mamy $x_n \wedge y_n \uparrow x \wedge y$ (lub równoważnie $x_n \downarrow x$ i $y_n \downarrow y$ implikuje $x_n \vee y_n \downarrow x \vee y$).

Twierdzenie 29 ([R13], twierdzenie 3.1)**.** *Niech dana będzie σ-ciągła krata L oraz półgrupa przemienna $(S, *)$ z nieskończonym rzędem elementów tzn. jeśli $x \in S$, to nie istnieje taka liczba $n \geqslant 2$ dla której $x^n = x$. Następnie niech $f, g \colon S \to L$ będą funkcjonałami spełniającymi nierówności $g(x * y) \geqslant g(x) \vee g(y)$ i $f(x * y) \leqslant f(x) \vee f(y)$ dla wszystkich $x, y \in S$. Jeżeli $g(x) \leqslant f(x)$ i $\lim\limits_{n\to\infty} g(x^{2^n}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x^{2^n})$ dla każdego $x \in S$, to istnieje taki funkcjonał $a \colon G \to L$, że*

(i) *$g(x) \leqslant a(x) \leqslant f(x)$ dla każdego $x \in S$,*

(ii) *$a(x * y) = a(x) \vee a(y)$ dla każdych $x, y \in S$.*

Ponadto funkcjonał $a\colon S \to L$ spełniający warunki **(i)** *i* **(ii)** *jest jedyny.*

Twierdzenie 30 ([R13], twierdzenie 3.2)**.** *Niech $(S, *)$ będzie grupą abelową oraz $(L, \leqslant)$ będzie kratą. Jeżeli odwzorowania $g\colon S \to L$ i $f\colon G \to L$ spełniają odpowiednio nierówności* (15) *i* (16)*, to*

(i) *$g(x) = g(e)$ dla każdego $x \in S$;*

(ii) *$f(e) \leqslant f(x) \vee f(x^{-1})$ dla każdego $x \in S$. Dodatkowo dla danego $x \in S$, jeśli $f(x) = f(x^{-1})$, to $f(e) \leqslant f(x)$;*

(iii) *$f(e) \geqslant f(x) \vee f(x^{-1})$ dla każdego $x \in S$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = f(e)$ dla każdego $x \in S$.*

Ponadto jeśli $g(x) \leqslant f(x)$ i $f(x) = f(x^{-1})$ dla każdego $x \in S$, to funkcjonały f i g mogą być oddzielone funkcją stałą tzn. istnieje takie $\beta \in L$, że $g(x) \leqslant \beta \leqslant f(x)$ dla każdego $x \in S$.

Kolejny główny wynik z [R13] stwierdza, że następujące równanie funkcyjne

$$T(x^2) = T(x), \quad x \in S$$

wykazuje pewien rodzaj stabilności w sensie Hyersa-Ulama (zob. [63] i [32]) dla odwzorowań zdefiniowanych na półgrupie przemiennej o wartościach w kracie Banacha.

Twierdzenie 31 ([R13], twierdzenie 3.4)**.** *Niech $(S, *)$ będzie półgrupą przemienną, $\mathcal{B}$ kratą Banacha oraz $F\colon S \to \mathcal{B}$ i $\Psi\colon S \times S \to [0, +\infty)$ spełniają*

$$\|F(x * y) - F(x) \vee F(y)\| \leqslant \Psi(x, y), \quad x, y \in S. \tag{17}$$

Jeżeli $(\alpha_n)_{n\in\mathcal{N}}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich zbieżnym do zera oraz $\Phi\colon S \to [0, +\infty)$ zdefiniowana jako

$$\Phi(x) = \Psi(x, x), \quad x, y \in S$$

spełnia

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(x^{2^k}) = 0, \quad x \in S, \tag{18}$$

to dla każdego $x \in S$ ciąg $(\alpha_n F(x^{2^n}))_{n\in\mathcal{N}}$ jest zbieżny do zera w $\mathcal{B}$.

Na odwrót, jeśli istnieje taki ciąg $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych dodatnich, że dla każdego $x \in S$ ciąg $(\alpha_n F(x^{2^n}))_{n\in\mathcal{N}}$ jest zbieżny do pewnego $T(x)$ oraz Ψ spełnia

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \Psi(x^{2^n}, y^{2^n}) = 0 \quad x, y \in S, \tag{19}$$

to $T\colon S \to \mathcal{B}$ jest rozwiązaniem równania (14)*.*

Warto tutaj podkreślić, że w dowodzie twierdzenia 31 nie było potrzeby korzystania z zupełności kraty $\mathcal{B}$, co wyróżnia go spośród większości innych wyników dotyczących stabilności z jawnym założeniem zupełności przestrzeni wartości. Jednak w drugiej części tego twierdzenia jest ono częściowo ukryte w założeniach, ponieważ zakłada się zbieżność ustalonego ciągu.

Ostatnia grupa prac [R20]-[R22] obejmuje wyniki współpracy z S. Millesem i L. Zedamem nad intuicjonistycznymi zupełnymi kratami rozmytymi.

Wbrew nazwie intuicjonistyczne zbiory rozmyte Atanassova (wprowadzone w 1983 r. jako jedno z uogólnień zbiorów rozmytych Zadeha [66]) nie mają wiele wspólnego z intuicjonizmem w matematyce i logice (zob. dyskusję na temat terminologii zbiorów intuicjonistycznych w [25]). Dokładniej:

Definicja 14 ([7])**.** Niech dany będzie niepusty zbiór $\mathcal{X}$. Intuicjonistyczny zbiór rozmyty A w zbiorze $\mathcal{X}$ określony jest jako trójka uporządkowana $A =^{def} \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle : \ x \in \mathcal{X}\}$,
gdzie $\mu_A : X \to [0,1]$ i $\nu_A : X \to [0,1]$ oznaczają odpowiednio funkcję charakterystyczną przynależności i funkcję charakterystyczną nieprzynależności elementu x do zbioru A spełniających warunek

$$0 \leqslant \mu_A(x) + \nu_A(x) \leqslant 1 \text{ dla każdego } x \in \mathcal{X}.$$

Klasę wszystkich intuicjonistycznych zbiorów rozmytych określonych w $\mathcal{X}$ oznaczamy jako $IFS(\mathcal{X})$. Ponadto nośnik intuicjonistycznego zbioru rozmytego $A \in IFS(\mathcal{X})$ określony jest następującym wzorem

$$Supp(A) = \{x \in \mathcal{X} : \ \mu_A(x) > 0 \text{ lub } (\mu_A(x) = 0 \text{ and } \nu_A(x) < 1)\}.$$

Słabe (α, β)-cięcie (znane również jako (α, β)-przekrój) intuicjonistycznego zbioru rozmytego A określamy jako $A_{\alpha,\beta} = \{x \in \mathcal{X} : \ \mu_A(x) \geqslant \alpha \text{ oraz } \nu_A(x) \leqslant \beta\}$, gdzie $\alpha, \beta \in [0,1]$ spełniają $\alpha + \beta \leqslant 1$. $C \in IFS(\mathcal{X})$ nazywamy intuicjonistycznym łańcuchem rozmytym jeśli $Supp(C)$ jest klasycznym łańcuchem w $\mathcal{X}$.

Zdefiniowanie intuicjonistycznej zupełnej kraty rozmytej, czyli w przypadku gdy $\mathcal{X}$ jest kratą zupełną, zainspirowane zastało koncepcją intuicjonistycznej kraty rozmytej zaproponowanej przez K.V. Thomasa i L.S. Naira w pracy [62].

Definicja 15 ([R20], definicja 6)**.** Niech L będzie kratą zupełną oraz $A = \{< x, \mu_A(x), \nu_A(x) >: x \in L\} \in IFS(L)$. Wtedy zbiór A nazywamy intuicjonistyczną zupełną kratą rozmytą jeśli dla dowolnego intuicjonistycznego zbioru rozmytego $B \in IFS(L)$ spełnione są następujące warunki:

(i) $\mu_A(\sqcup Supp(B)) \geqslant \inf \mu_A(Supp(B)) = \inf_{x \in Supp(B)} \mu_A(x)$,

(ii) $\mu_A(\sqcap Supp(B)) \geqslant \inf \mu_A(Supp(B))$,

(iii) $\nu_A(\vee Supp(B)) \leqslant \sup \nu_A(Supp(B)) = \sup_{x \in Supp(B)} \nu_A(x)$,

(iv) $\nu_A(\wedge Supp(B)) \leqslant \sup \nu_A(Supp(B))$.

Na podstawie powyższej definicji dokonano pewnych charakteryzacji tych krat, w szczególności wskazano kryteria ich zupełności w ujęciu zarówno klasycznych krat zupełnych, jak również intuicjonistycznych łańcuchów rozmytych.

Twierdzenie 32 ([R20], twierdzenie 2)**.** *Niech L będzie kratą zupełną oraz $A \in IFS(L)$. Wówczas*

(1) A jest intuicjonistyczną zupełną kratą rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy A spełnia warunki (i) i (iii) definicji 15 dla każdego zbioru intuicjonistycznego $B \in IFS(L)$.

(2) A jest intuicjonistyczną zupełną kratą rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy A spełnia warunki (ii) and (iv) definicji 15 dla każdego zbioru intuicjonistycznego $B \in IFS(L)$.

Twierdzenie 33 ([R20], Twierdzenie 3)**.** *Niech L będzie kratą zupełną oraz $A \in IFS(L)$. Wówczas A jest intuicjonistyczną zupełną kratą rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy jej słabe (α, β)-cięcia są klasycznymi kratami zupełnymi.*

Twierdzenie 34 ([R20], Twierdzenie 4)**.** *Niech A będzie intuicjonistyczną kratą rozmytą. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) A jest intuicjonistyczną zupełną kratą rozmytą,

(ii) A jest intuicjonistycznym zupełnym łańcuchem rozmytym,

(iii) *każdy maksymalny intuicjonistyczny łańcuch rozmyty A jest intuicjonistyczną zupełną kratą rozmytą.*

Z kolei w pracy [R21] i jej rozszerzonej wersji [R22], uwzględniającej obszerne dowody ich głównych wyników, wskazano między innymi kolejne istotne kryterium zupełności intuicjonistycznych krat rozmytych z wykorzystaniem punktów stałych intuicjonistycznych odwzorowań izotonicznych.

W 1955 r. A. Tarski w [61] udowodnił twierdzenie mówiące, że każda funkcja izotoniczna określona w kracie zupełnej ma punkt stały. Twierdzenie odwrotne podała A.C. Davis w [18] dowodząc, że jeśli każda funkcja izotoniczna określona w kracie ma punkt stały, to krata ta jest zupełna. W rezultacie tych wyników ustalono kryterium zupełności krat w odniesieniu do punktów stałych odwzorowań izotonicznych. Uzyskany wynik (twierdzenie 3 w [R21], czy twierdzenie 3 w [R22]), choć prosty w wypowiedzi a skomplikowany dowodowo, potwierdza fakt obowiązywania tego kryterium również w przypadku intuicjonistycznych zupełnych krat rozmytych.

Literatura

[1] J. Aczél, Lectures on functional equations and their applications, Acad. Press, New York, 1966.

[2] P. Akella, Structure of n-uninorms, Fuzzy Sets Syst. **158** (2007), 1631-1651.

[3] C. Alsina, On a family of connectives for fuzzy sets, Fuzzy Sets Syst. **16** (1985), 231-235.

[4] C. Alsina, E. Trillas, On almost distributive Łukasiewicz triplets, Fuzzy Sets Syst. **50** (1992), 175-178.

[5] C. Alsina, E. Trillas, L. Valverde, On non-distributive logical connectives for fuzzy sets theory, BUSEFAL **3** (1980), 18-29.

[6] C. Alsina, M.J. Frank, B. Schweizer, Associative Functions: Triangular Norms and Copulas, World Scientific, Singapore, 2006.

[7] K. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets Syst. **20** (1986), 87-96.

[8] A. Avallone, A. De Simone, Extensions of modular functions on orthomodular lattices. Ital. J. Pure Appl. Math. **9** (2001), 109-122.

[9] M. Baczyński, On a class of distributive fuzzy implications, Internat. J. Uncertainty, Fuzzines Knowledge-Based Syst. **9** (2001), 229-238.

[10] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, Aggregation Functions: A Guide for Practitioners, Stud. Fuzziness Soft Comput., vol. 221, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

[11] G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo, A Practical Guide to Averaging Functions, Stud. Fuzziness Soft Comput., vol. 329, Springer, Cham, 2016.

[12] C. Bertoluzza, V. Doldi, On the distributivity between t-norms and t-conorms, Fuzzy Sets Syst. **142** (2004), 85-104.

[13] T. Calvo, On some solutions of the distributivity equation, Fuzzy Sets Syst. **104** (1999), 85-96.

[14] T. Calvo, B. De Baets, J. Fodor, The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets Syst. **120** (2001), 385-394.

[15] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, Aggregation Operators: New Trends and Applications, Stud. Fuzziness Soft Comput., vol.97, Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.

[16] M. Carbonell, M. Mas, J. Suñer, J. Torrens, On distributivity and modularity in De Morgan triplets, Internat. J. Uncertainty, Fuzzines Knowledge-Based Syst. **4** (1996), 351-368.

[17] W.E. Combs, J.E. Andrews, Combinatorial rule explosion eliminated by a fuzzy rule configuration, IEEE Trans. Fuzzy Syst. **6** (1998), 1–11.

[18] A. C. Davis, A characterization of complete lattices, Pacific J. Math. **5** (1955), 311-319.

[19] J. Dombi, Properties of the fuzzy connectives in light of the general representations theorem, Acta Cybernet. **7** (1986), 313-321.

[20] J. Drewniak, Binary operations on fuzzy sets, BUSEFAL **14** (1983), 69-74.

[21] J. Drewniak, Podstawy teorii zbiorów rozmytych, Uniwersytet Śląski, Katowice, 1984.

[22] P. Drygaś, Distributivity between semi t-operators and semi nullnorms, Fuzzy Sets Syst. **264** (2015), 100-109.

[23] D. Dubois, H. Prade, New results about properties and semantics of fuzzy set-theoretic operators, in: P. Wang, S. Chang (eds), Fuzzy Sets: Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems, Plenum Press, New York 1980, pp. 59-75.

[24] D. Dubois, E. Pap, H. Prade, Hybrid probabilistic-possibilistic mixtures and utility functions, in: Preferences and Decisions under Incomplete Knowledge, in: Stud. Fuzziness Soft Comput., vol.51, Springer-Verlag, 2000, pp.51–73.

[25] D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk, H. Prade, Terminological difficulties in fuzzy set theory-the case of "intuitionistic fuzzy sets", Fuzzy Sets Syst. **156** (2005), 485–491.

[26] Q. Feng, Uninorm solutions and (or) nullnorm solutions to the modularity condition equations, Fuzzy Sets Syst. **148** (2004), 231-242.

[27] J.C. Fodor, R.R. Yager, A. Rybalov, Structure of uninorms, Internat. J. Uncertainty, Fuzzines Knowledge-Based Syst. **5** (1997), 411-427.

[28] D. Gabbay, G. Metcalfe, Fuzzy logics based on [0, 1)-continuous uninorms, Arch. Math. Logic **46** (2007), 425-449.

[29] Z. Gajda, Z. Kominek, On separation theorem for subadditive and superadditive functionals, Studia Math. **100** (1991), 25–38.

[30] M. Galar, A. Jurío, C. López-Molina, D. Paternain, J. Sanz, H. Bustince, Aggregation functions to combine RGB color channels in stereo matching, Opt. Express **21** (2013), 1247–1257.

[31] M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, Aggregation Functions (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 127), Cambridge University Press, New York, 2009.

[32] D. H. Hyers, On the stability of the linear functional equation, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **27** (1941), 222–224.

[33] M. Hosszú, On the functional equation of auto-distributivity, Publ. Math. Debrecen **3** (1953), 83-86.

[34] M. Hosszú, On the functional equation of distributivity, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae **4** (1953), 159-167.

[35] D. Jočić, I. Štainer-Papuga, Restricted distributivity for aggregation operators with absorbing element, Fuzzy Sets Syst. **224** (2013), 23-35.

[36] D. Jočić, I. Štainer-Papuga, Some implications of the restricted distributivity of aggregation operators with absorbing elements for utility theory, Fuzzy Sets Syst. **291** (2016), 54-65.

[37] R. Kaufman, Interpolation of additive functionals, Studia Math. **27** (1966), 269–272.

[38] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, Triangular Norms, Kluwer, Dordrecht, 2000.

[39] G.J. Klir, B. Yuan, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Application, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.

[40] P. Kranz, Additive functionals on abelian semigroups, Comment. Math. Prace Mat. **16** (1972), 239–246.

[41] A. Lundberg, Generalized distributivity for real, continuous functions. I. Structure theorems and surjective solutions, Aequationes Math. **24** (1982), 74-96.

[42] A. Lundberg, Generalized distributivity for real, continuous functions. II. Local solutions in the continuous case, Aequationes Math. **28** (1985), 236-251.

[43] A. Lundberg, Variants of the distributivity equation arising in theories of utility and psychophysics, Aequationes Math. **69** (2005), 128-145.

[44] M. Mas, G. Mayor, J. Torrens, t-operators, Internat. J. Uncertainty, Fuzzines Knowledge-Based Syst. **7** (1999), 31-50.

[45] M. Mas, G. Mayor, J. Torrens, The modularity condition for uninorms and t-operators, Fuzzy Sets Syst. **126** (2002), 207-218.

[46] M. Mas, G. Mayor, J. Torrens, The distributivity condition for uninorms and t-operators, Fuzzy Sets Syst. **128** (2002), 209-225.

[47] M. Mas, G. Mayor, J. Torrens, Corrigendum to "The distributivity condition for uninorms and t-operators"[Fuzzy Sets Syst. **128** (2002), 209-225], Fuzzy Sets Syst. **153** (2005), 297-299.

[48] S. Mazur, W. Orlicz, Sur les espaces métriques linéaires. II, Studia Math. **13** (1953), 137–179.

[49] K. Menger. Statistical metrics. Procs. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37** (1942), 535-537.

[50] M. Mizumoto, Fuzzy sets and their operations. II, Inform. and Control **50** (1981) (2), 160-174.

[51] D. Paternain, J. Fernandez, H. Bustince, R. Mesiar, G. Beliakov, Construction of image reduction operators using averaging aggregation functions, Fuzzy Sets Syst. **261** (2015), 87–111.

[52] G. Rodé, Eine abstrakte Version des Satzes von Hahn–Banach, Arch. Math. (Basel) **31** (1978), 474–481.

[53] D. Ruiz, J. Torrens, Distributive idempotent uninorms, Internat. J. Uncertainty, Fuzzines Knowledge-Based Syst. **11** (2003), 413-428.

[54] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, Distributivity of strong implications over conjunctive and disjunctive uninorms, Kybernetika **42** (2006), 319-336.

[55] D. Ruiz, J. Torrens, Distributivity and conditional distributivity of a uninorm and a continuous t-conorm, IEEE Trans. Fuzzy Syst. **14** (2006), 180–190.

[56] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, Distributivity of residual implications over conjunctive and disjunctive uninorms, Fuzzy Sets Syst. **158** (2007), 23-37.

[57] W. Sander, J. Siedekum, Multiplication, Distributivity and fuzzy-integral I, II, III Kybernetika **41** (2005), 397-422; 469-496; 497-518.

[58] H. H. Schaefer, Banach Lattices and Positive Operators, Springer-Verlag, 1974.

[59] L. Stout, Open problems from the Linz 2000 closing session, Fuzzy Sets Syst. **138** (2003), 83-84.

[60] B. Schweizer, A. Sklar, Probabilistic metric spaces, North Holland, New York, 1983.

[61] A. Tarski, A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications, Pacific J. Math. **5** (1955), 285-309.

[62] K. V. Thomas, L. S. Nair, Intuitionistic fuzzy sublattices and ideals, Fuzzy Inf. Eng. **3** (2011), 321–331.

[63] S.M. Ulam, A Collection oj Mathematical Problems, Interscience Publishers, London, UK, 1960.

[64] R.R. Yager, Uninorms in fuzzy system modeling, Fuzzy Sets Syst. **122** (2001), 167-175.

[65] R.R. Yager, A. Rybalov, Uninorm aggregation operators, Fuzzy Sets Syst. **80** (1996), 111-120.

[66] L. Zadeh, Fuzzy sets, Information and control **8** (1965), 338-353.

[67] H. Zhan, Y-M. Wang, H-W. Liu, The modularity condition for semi-t-operators and semi-uninorms, Fuzzy Sets Syst. (2017) https://doi.org/10.1016/j.fss.2017.05.025.

Ewa Rak