AUTOREFERAT

1. **Imiona i nazwisko:** Andrzej Piotr Olbryś

2. **Posiadane dyplomy**

   (a) Dyplom magistra matematyki (specjalność teoretyczna) uzyskany 9 czerwca 2000 roku na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Ślaskiego w Katowicach. Tytuł pracy magisterskiej: "*Twierdzenie Banacha-Kakutaniego-Saksa i jego konsekwencje*"; promotor: prof. dr hab. Roman Ger.

   (b) Dyplom doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki uzyskany 28 czerwca 2005 roku w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach. Tytuł rozprawy doktorskiej: "*Funkcje t-wypukłe w sensie Wrighta*"; promotor: prof. dr hab. Zygfryd Kominek.

3. **Zatrudnienie w jednostkach naukowych**

   (a) od 1.02.2007 adiunkt w Zakładzie Równań Funkcyjnych Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach (etat)

   (b) od 1.10.2005 do 31.01.2007 asystent w Zakładzie Równań Funkcyjnych Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach (0,9 etatu)

   (c) od 15.02.2005 do 30.09.2005 asystent w Zakładzie Równań Funkcyjnych Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach (0,5 etatu)

4. **Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule naukowym w zakresie sztuki:** jednotematyczny cykl sześciu publikacji

   (a) Tytuł: Twierdzenia o oddzielaniu i podpieraniu dla wybranych klas odwzorowań i ich konsekwencje.

   (b) Publikacje stanowiące cykl:

      (I) A. Olbryś, *A support theorem for t-Wright convex functions*, Math. Inequal. Appl. 14 (2011), no. 2, 399-412.

      (II) A. Olbryś, *Representation theorems for t-Wright convexity*, J. Math. Anal. Appl. 384 (2011), no. 2, 273-283.

      (III) A. Olbryś, *On support, separation and decomposition theorems for t-Wright-concave functions*, Math. Slovaca 67 (2017), no. 3, 719-730.

      (IV) A. Olbryś, *On sandwich theorem for delta-subadditive and delta-superadditive mappings*, Results Math. 72 (2017), no. 1-2, 385-399.

      (V) A. Olbryś, *Support theorem for generalized convexity and its applications*, J. Math. Anal. Appl. 458 (2018), no. 2, 1044-1058.

      (VI) A. Olbryś, Zs. Páles, *Support theorems in abstract settings*, Publ. Math. Debrecen 93 (2018), no. 1-2, 215-240.

(c) Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

Celem naukowym przedłożonego cyklu prac jest przedstawienie twierdzeń o oddzielaniu i podpieraniu dla ważnych klas odwzorowań, które uogólniają klasy funkcji wypukłych i podaddytywnych oraz pokazanie zastosowań tych wyników.

Wprowadzenie

Przybliżymy w tym miejscu pokrótce rozpatrywane w rozprawie klasy funkcji i zależności między nimi. Dla ustalonej liczby $t \in (0,1)$ symbolem $\mathbb{Q}(t)$ oznaczać będziemy najmniejsze podciało ciała liczb rzeczywistych zawierające singleton $\{t\}$. Oczywiście $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(t)$. Załóżmy, że $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ jest ustalonym ciałem, a X przestrzenią liniową nad tym ciałem. Powiemy, że zbiór $D \subseteq X$ jest A-*wypukły*, gdzie $A \subseteq \mathbb{K}$, jeżeli

$$x, y \in D,\ \alpha \in A \cap [0,1] \Longrightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \in D.$$

W przypadku, gdy $A = \{t\}$, mówimy, że D jest zbiorem t-wypukłym, natomiast, gdy $A = \mathbb{R}$, to zbiór D nazywamy wypukłym.

Punkt $x_0 \in D$ należy do $\mathbb{K}$-algebraicznego wnętrza zbioru D, co oznaczamy symbolem $x_0 \in algint_{\mathbb{K}}(D)$, jeżeli dla dowolnego $x \in X$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że

$$x_0 + \alpha x \in D \quad \text{dla } \alpha \in (-\delta, \delta) \cap \mathbb{K}.$$

Zbiór nazywamy $\mathbb{K}$-*algebraicznie otwartym*, jeżeli $algint_{\mathbb{K}}(D) = D$. Jeżeli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, to piszemy $x_0 \in algint(D)$, a zbiór spełniający warunek $algint(D) = D$ nazywamy *algebraicznie otwartym.* Każdy otwarty podzbiór rzeczywistej przestrzeni liniowo-topologicznej jest zbiorem algebraicznie otwartym, ale przeciwna implikacja nie jest prawdziwa (zobacz [62], Example 1.1).

Załóżmy, że D jest wypukłym podzbiorem rzeczywistej przestrzeni liniowej. Powiemy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest *wypukła*, jeżeli

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) \quad \text{dla } x, y \in D,\ t \in [0,1].$$

Jeżeli powyższa nierówność jest spełniona dla $x, y \in D$ i ustalonej liczby $t \in (0,1)$, to mówimy, że f jest funkcją t-*wypukłą*; jeżeli $t = \frac{1}{2}$, to f nazywamy funkcją *wypukłą w sensie Jensena.*

Oczywiście każda funkcja wypukła jest t-wypukła dla każdego $t \in (0,1)$, w szczególności wypukła w sensie Jensena. Implikacja przeciwna na ogół nie zachodzi. Ustalmy $t \in (0,1)$. Wtedy każda nieciągła funkcja addytywna $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tj. rozwiązanie równania funkcyjnego Cauchy'ego

$$a(x+y) = a(x) + a(y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

spełniająca dodatkowo warunek

$$a(tx) = ta(x), \ x \in \mathbb{R}$$

jest przykładem funkcji t-wypukłej i wypukłej w sensie Jensena, która nie jest funkcją wypukłą (dowód istnienia takich funkcji można znaleźć na przykład w [71], Theorem 5.4.2). Z drugiej strony każda funkcja t-wypukła jest funkcją wypukłą w sensie Jensena. Wynik ten został dowiedziony przez N. Kuhna w pracy [69], a bezpośrednią motywacją była praca R. Gera [39]. Bardzo prosty dowód tego faktu podali Z. Daróczy i Zs. Páles w [29].

Każda funkcja wypukła określona na otwartym i wypukłym podzbiorze rzeczywistej przestrzeni liniowej skończenie wymiarowej jest ciągła. W przestrzeni nieskończenie wymiarowej własność ta nie zachodzi. Dowolny nieciągły funkcjonał liniowy jest przykładem nieciągłej funkcji wypukłej. Z drugiej strony, stosunkowo słabe warunki regularnościowe narzucone na funkcję wypukłą w sensie Jensena implikują jej ciągłość. Najbardziej znanym wynikiem tego typu jest twierdzenie Bernsteina-Doetscha [14] (patrz także [62], Theorem 5.1), które orzeka, że każda funkcja wypukła w sensie Jensena określona na otwartym i wypukłym podzbiorze przestrzeni liniowo-topologicznej, ograniczona z góry na zbiorze o niepustym wnętrzu, jest wypukła i ciągła. Przegląd wyników dotyczących warunków implikujących ciągłość funkcji addytywnych i wypukłych w sensie Jensena można znaleźć w monografii M. Kuczmy [71].

Kuhn w pracy [70] badał ogólniejszą nierówność funkcyjną. Dla ustalonych liczb $s, t \in (0,1)$ funkcję $f : D \to \mathbb{R}$ określoną na zbiorze wypukłym D nazwiemy (s,t)-*wypukłą*, jeżeli

$$f(sx + (1-s)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) \quad \text{dla } x, y \in D.$$

W przypadku, gdy $s = t$ klasa funkcji (t,t)-wypukłych pokrywa się z klasą funkcji t-wypukłych. Kuhn [70] pokazał, że każda funkcja (s,t)-wypukła jest wypukła w sensie Jensena. Problem istnienia niestałych rozwiązań powyższej nierówności dla $s \neq t$ zależy od algebraicznej struktury liczb s i t i został rozwiązany przez J. Matkowskiego i M. Pycię w [77] (Z. Kominek w [63] podał częściowe rozwiązanie tego problemu). Wykazali oni, że s i t są liczbami sprzężonymi, tzn. obie są przestępne lub obie są algebraiczne i są pierwiastkami tego samego wielomianu minimalnego o wymiernych współczynnikach, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niestała funkcja (s,t)-wypukła.

W celu podania definicji funkcji wypukłych w sensie Schura przypomnijmy kilka niezbędnych pojęć. W 1934 roku G. Hardy, J. E. Littlewood i G. Pólya [46] wprowadzili relację majoryzacji w następujący sposób: dla $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \ \text{ dla } k = 1, ..., n-1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{[i]},$$

gdzie dla $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ symbolem $(x_{[1]}, ..., x_{[n]})$ oznaczamy wektor o współrzędnych ustawionych w porządku nierosnącym: $x_{[1]} \geqslant ... \geqslant x_{[n]}$. Jeżeli $x \prec y$, to mówimy, że wektor x jest *majoryzowany* przez wektor y. Okazuje się, że tak zdefiniowana relacja jest półporządkiem, tzn. jest zwrotna i przechodnia. Fakt, że $x \prec y$ jest równoważny (zobacz [9], [46]) istnieniu takiej macierzy podwójnie stochastycznej [1] $S \in \mathbb{R}^n_n$, że

$$x = Sy.$$

Funkcje zachowujące tak zdefiniowany półporządek (na cześć pomysłodawcy I. Schura [109], który jako pierwszy je rozważał) nazywamy funkcjami *wypukłymi w sensie Schura*. Tak więc powiemy, że funkcja $f : W \to \mathbb{R}$, gdzie $W \subseteq \mathbb{R}^n$, jest *wypukła w sensie Schura*, jeżeli dla wszelkich $x, y \in W$ zachodzi implikacja

$$x \prec y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

W przypadku, gdy $W = I^n$, z pewnym przedziałem $I \subseteq \mathbb{R}$, powyższy warunek jest równoważny następującemu:

$$f(Sx) \leqslant f(x) \quad \text{dla} \;\; x \in I^n$$

i dla dowolnej macierzy podwójnie stochastycznej $S \in \mathbb{R}^n_n$. Przegląd wyników dotyczących majoryzacji i funkcji wypukłych w sensie Schura można znaleźć w obszernej monografii B. C. Arnolda, A. W. Marshalla i I. Olkina [9].

W 1954 roku E. M. Wright [125] wprowadził nowy rodzaj wypukłości. Powiemy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest *wypukła w sensie Wrighta*, jeżeli

$$(1) \qquad f(tx + (1-t)y) + f((1-t)x + ty) \leqslant f(x) + f(y) \quad \text{dla } x, y \in D, \;\; t \in [0,1].$$

Oczywiście każda funkcja wypukła i każda funkcja addytywna jest funkcją wypukłą w sensie Wrighta, a każda funkcja wypukła w sensie Wrighta jest wypukła w sensie Jensena.

Klasy funkcji wypukłych w sensie Schura i funkcji wypukłych w sensie Wrighta łączy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1 ([81], Ng, 1987) *Niech $D \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie niepustym zbiorem otwartym i wypukłym, $f : D \to \mathbb{R}$ oraz $F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n f(x_j)$. Wówczas następujące warunki są parami równoważne:*

(a) *F jest wypukła w sensie Schura dla pewnego $n \geqslant 2$,*

(b) *F jest wypukła w sensie Schura dla dowolnego $n \geqslant 2$,*

(c) *f jest funkcją wypukłą w sensie Wrighta,*

(d) *funkcja f jest postaci*

$$f(x) = w(x) + a(x), \quad x \in D,$$

gdzie $w : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą, zaś $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funkcją addytywną.

[1] Macierz o nieujemnych współczynnikach $S \in \mathbb{R}^n_n$ nazywamy *podwójnie stochastyczną*, jeżeli suma elementów każdego wiersza i każdej kolumny jest równa 1.

Równoważność $(c) \Leftrightarrow (d)$ podaje charakteryzację funkcji wypukłych w sensie Wrighta i dla funkcji określonych na algebraicznie otwartym podzbiorze rzeczywistej przestrzeni liniowej, została wykazana przez Kominka w pracy [62].

Jeżeli nierówność (1) jest spełniona dla $x, y \in D$ i ustalonej liczby $t \in (0,1)$, to funkcję f nazywamy *t-wypukłą w sensie Wrighta*. Definicję funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta wprowadził Matkowski w [76]. W tej pracy pytał, czy każda funkcja t-wypukła w sensie Wrighta musi być wypukła w sensie Jensena? Gy. Maksa, K. Nikodem i Zs. Páles w pracy [74] podali pozytywne rozwiązanie problemu Matkowskiego dla wymiernych i pewnych algebraicznych liczb $t \in (0,1)$. Z drugiej strony dla wszystkich przestępnych oraz takich algebraicznych liczb $t \in (0,1)$, że algebraiczne sprzężenie (pierwiastek wielomianu minimalnego) leży na zewnątrz domkniętej kuli $\overline{K}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ skonstruowali ograniczoną z góry na całej prostej $\mathbb{R}$ funkcję t-wypukłą w sensie Wrighta, która jest wklęsła w sensie Jensena. Taka funkcja ma wiele patologicznych własności, w szczególności jest nieciągła w każdym punkcie. Do przykładu tego będziemy się wielokrotnie odwoływać w dalszej części autoreferatu.

Jeżeli f jest taką funkcją, że funkcja $-f$ jest wypukła (t-wypukła, wypukła w sensie Jensena, t-wypukła w sensie Wrighta), to mówimy, że f jest *wklęsła* (*t-wklęsła*, *wklęsła w sensie Jensena*, *t-wklęsła w sensie Wrighta*).

Jeżeli f jest taką funkcją, że f oraz $-f$ są jednocześnie wypukłe (t-wypukłe, wypukłe w sensie Jensena, t-wypukłe w sensie Wrighta), to funkcję f nazywamy *afiniczną* (*t-afiniczną*, *afiniczną w sensie Jensena*, *t-afiniczną w sensie Wrighta*).

Następujące twierdzenie podaje postać funkcji t-afinicznych w sensie Wrighta. Twierdzenie to wykazał K. Lajkó w pracy [72] dla funkcji określonych na przedziale. Podana tutaj wersja uogólnia je w kilku kierunkach i jest szczególnym przypadkiem twierdzenia dowiedzionego w pracy (O3).

Twierdzenie 2 *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $D \subseteq X$ będzie takim zbiorem $\mathbb{Q}(t)$-wypukłym, że $\mathrm{algint}_{\mathbb{Q}(t)}(D) \neq \emptyset$. Wówczas $f : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją t-afiniczną w sensie Wrighta wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci:*

$$f(x) = a_0 + a_1(x) + a_2(x,x), \quad x \in D,$$

gdzie $a_0 \in \mathbb{R}$ jest stałą, $a_1 : X \to \mathbb{R}$ funkcją addytywną, $a_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcją 2-addytywną, symetryczną i spełniającą warunek:

$$a_2(tx, (1-t)x) = 0 \quad dla\ x \in X.$$

W klasie funkcji ciągłych pojęcia: wypukłości, t-wypukłości, wypukłości w sensie Jensena i t-wypukłości w sensie Wrighta pokrywają się.

Przejdźmy teraz do pojęcia delta-wypukłości funkcji. Definicję odwzorowań delta-wypukłych wprowadzili L. Veselý i L. Zajíček w pracy [120] przyjmując następujące określenie:

Definicja 1 Niech X i Y będą rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi, $D \subseteq X$ zbiorem wypukłym. Powiemy, że odwzorowanie $F : D \to Y$ jest *delta-wypukłe*, jeżeli istnieje taka wypukła i ciągła funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, że funkcja $f + y^\star \circ F$ jest wypukła i ciągła dla dowolnego elementu $y^\star \in Y^\star$ o normie równej 1. Jeżeli powyższy warunek jest spełniony, to mówimy, że F jest odwzorowaniem delta-wypukłym z kontrolną funkcją f.

Okazuje się (zobacz [120]), że ciągłe odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe z ciągłą funkcją kontrolną $f : D \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia nierówność:

$$\left\| \frac{F(x)+F(y)}{2} - F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \right\| \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} - f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \tag{2}$$

dla wszelkich $x, y \in D$. Oczywiście powyższą nierówność możemy badać w szerszej klasie odwzorowań, nie wymagając od nich żadnych warunków regularnościowych. Łatwo sprawdzić, że w przypadku, gdy $Y = \mathbb{R}$ odwzorowanie jest delta-wypukłe wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnicą dwóch funkcji wypukłych. Klasa odwzorowań wprowadzona przez Veselý'ego i Zajička jest więc uogólnieniem (na przypadek odwzorowań przyjmujących wartości w przestrzeniach wektorowych) funkcji, które można przedstawić w postaci różnicy dwóch funkcji wypukłych.

Modyfikując odpowiednio nierówność (2) możemy rozpatrywać odwzorowania: *delta wypukłe w sensie Jensena* [41], *delta (s,t)-wypukłe* (O7), *delta-podaddytywne* [40], (IV) *delta wypukłe w sensie Schura* (O8) itp., jako naturalne uogólnienia klas funkcji będących różnicami dwóch funkcji: wypukłych w sensie Jensena, (s,t)-wypukłych, podaddytywnych, wypukłych w sensie Schura.

Twierdzenia o podpieraniu i oddzielaniu, ściśle związane z klasycznym twierdzeniem Hahna-Banacha, mają zastosowanie w wielu dziedzinach współczesnej analizy funkcjonalnej, geometrii wypukłej, teorii optymalizacji i ekonomii. Twierdzenia o podpieraniu pozwalają reprezentować funkcje wypukłe w postaci maksimum punktowego funkcji afinicznych, funkcje podaddytywne w postaci maksimum punktowego funkcji addytywnych, zaś zbiory wypukłe jako przekroje pewnych półprzestrzeni. Z odpowiedniej wersji twierdzenia o podpieraniu możemy wywnioskować niepustość subgradientu dla funkcji wypukłych oraz słynne twierdzenie Fenchela-Moreau o dualności, które znajduje liczne zastosowania w teorii optymalizacji, ekonomii i matematyce finansowej.

Głównym narzędziem w dowodach twierdzeń o podpieraniu jest zastosowanie odpowiedniej wersji twierdzenia Hahna-Banacha, twierdzenia o oddzielaniu lub jednej z uogólnionych wersji tych twierdzeń ([8], [11], [12], [18], [19], [22], [35]-[38], [58], [67], [68], [79], [88]-[93], [105], [106], [111], [115], [116]). Przegląd wyników dotyczących twierdzenia Hahna-Banacha został zawarty w rozprawie [22]. Klasyczne twierdzenie o oddzielaniu dowiedzione przez S. Kakutaniego [57] mówi, że dwa rozłączne i wypukłe podzbiory rzeczywistej przestrzeni liniowej można przedzielić półprzestrzenią, tzn. zbiorem wypukłym, którego dopełnienie jest wypukłe. Twierdzenie to jest znane jako geometryczna wersja twierdzenia Hahna-Banacha. Problem oddzielania był intensywnie badany przez wielu matematyków. Klasycznym wynikiem jest twierdzenie S. Mazura i W. Orlicza [79], które zostało uogólnione przez R. Kaufmanna [58], a następnie P. Kranza [68]. W 1978 roku G. Rodé [105] udowodnił abstrakcyjną wersję twierdzenia Hahna-Banacha, wprowadzając pojęcie uogólnionej wypukłości w języku operacji komutujących. Aby zacytować to twierdzenie wprowadzimy kilka niezbędnych pojęć.

Niech X będzie niepustym zbiorem, $m \in \mathbb{N}$. Symbolem $\mathcal{P}^m(X)$ oznaczać będziemy rodzinę takich par (σ, s), że $\sigma : X^m \to X$ jest funkcją, ponadto istnieją $s_0 \in \mathbb{R}$ oraz takie $s_1, \dots, s_m \in [0, \infty)$, że $s : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jest funkcją afiniczną postaci:

$$s(y_1, \dots, y_m) := s_0 + s_1 y_1 + \dots + s_m y_m.$$

Niech $\mathcal{P}(X) := \cup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^m(X)$, $\Pi \subseteq \mathcal{P}(X)$ będzie ustalonym podzbiorem, niech $\Pi^m := \Pi \cap \mathcal{P}^m(X),\ m \in \mathbb{N}$. Powiemy, że rodzina Π jest *komutująca*, jeżeli dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}, (\sigma, s) \in \Pi^m, (\tau, u) \in \Pi^n$ mamy:

$$\sigma(\tau(x_1^1, \dots, x_n^1), \dots, \tau(x_1^m, \dots, x_n^m)) = \tau(\sigma(x_1^1, \dots, x_1^m), \dots, \sigma(x_n^1, \dots, x_n^m))$$

dla wszelkich $x_i^j \in X,\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m$ oraz

$$s(u(y_1^1, \dots, y_n^1), \dots, u(y_1^m, \dots, y_n^m)) = u(s(y_1^1, \dots, y_1^m), \dots, s(y_n^1, \dots, y_n^m))$$

dla wszelkich $y_i^j \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m$.

Powiemy, że funkcja $f : X \to [-\infty, \infty)$ jest Π-*wypukła*, jeżeli

$$f(\sigma(x_1, \dots, x_m)) \leqslant s_0 + s_1 f(x_1) + \dots + s_m f(x_m),$$

dla wszelkich $m \in \mathbb{N},\ (\sigma, s) \in \Pi^m$ oraz $x_1, \dots, x_m \in X$; f jest Π-*wklęsła* jeżeli funkcja $-f$ jest Π-wypukła. Jeżeli f jest jednocześnie Π-wypukła i Π-wklęsła, to mówimy, że jest Π-*afiniczna*.

Twierdzenie 3 ([105], Rodé, 1978) *Niech* $\Pi \subseteq \mathcal{P}(X)$ *będzie rodziną komutującą,* $f : X \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją* Π-*wypukłą oraz*

$$M(\Pi, f) := \{g : X \to [-\infty, \infty) \mid g \textit{ jest } \Pi\textit{-wklęsła oraz } g \leqslant f\}.$$

Wówczas każdy element maksymalny rodziny $M(\Pi, f)$ *jest funkcją* Π-*afiniczną.*

Powyższy wynik, wraz z uogólnieniem (patrz P. Volkmann, H. Weigel [122]), jest jedną z najsilniejszych wersji twierdzenia Hahna-Banacha, a jego prosty dowód można znaleźć w pracy H. Königa [67]. Geometryczna wersja twierdzenia Rodégo została wykazana przez Pálesa w pracy [93], natomiast warunki konieczne i wystarczające na oddzielanie dwóch funkcji odwzorowaniem Π-wypukłym, Π-wklęsłym i Π-afinicznym można znaleźć w pracy [88].

Problem podpierania i oddzielania dla funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta

Prace (I)-(III) dotyczą problemu oddzielania i podpierania funkcji t-wypukłych i t-wklęsłych w sensie Wrighta oraz zastosowań uzyskanych wyników do charakteryzacji pewnych podklas klasy funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta. W pracy (I) zajmujemy się problemem odzielania funkcji t-wypukłych i t-wklęsłych w sensie Wrighta i dowodzimy twierdzenia o podpieraniu.

Twierdzenie o oddzielaniu dla funkcji t-wypukłych, a więc, w szczególności, także dla funkcji wypukłych w sensie Jensena, jest konsekwencją twierdzenia Rodégo. Niestety twierdzenie Rodégo nie stosuje się do funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta. Następujące twierdzenie uogólnia analogiczne twierdzenie dla funkcji wypukłych w sensie Jensena ($t = \frac{1}{2}$):

Twierdzenie 4 ((I), Theorem 2) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $D \subseteq X$ będzie zbiorem t-wypukłym. Jeżeli $f : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta, $g : D \to \mathbb{R}$ funkcją t-wklęsłą w sensie Wrighta oraz*

$$g(x) \leqslant f(x), \quad x \in D,$$

to istnieje funkcja t-afiniczna w sensie Wrighta $a : D \to \mathbb{R}$ spełniająca

$$g(x) \leqslant a(x) \leqslant f(x), \quad x \in D.$$

Przypomnijmy, że funkcję $a_y : D \to \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją podpierającą* funkcję $f : D \to \mathbb{R}$ lub *podpórką* funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ w punkcie $y \in D$, jeżeli

(i) $a_y(y) = f(y)$,

(ii) $a_y(x) \leqslant f(x)$ dla $x \in D$.

Wiadomo, że każdą funkcję t-wypukłą (wypukłą w sensie Jensena) możemy podeprzeć w dowolnym punkcie, będącym punktem algebraicznie wewnętrznym dziedziny, funkcją t-afiniczną (afiniczną w sensie Jensena). Twierdzenie to jest również konsekwencją wyniku Rodégo, a alternatywne dowody tego twierdzenia można znaleźć w pracach [62], [63], [70], [86]. W dowodach tych wykorzystuje się kluczowy fakt mówiący, że każda funkcja wypukła w sensie Jensena określona na zbiorze algebraicznie otwartym i przyjmująca wartości w zbiorze $[-\infty, \infty)$ jest tożsamościowo równa $-\infty$ lub przyjmuje tylko wartości rzeczywiste. Własność ta nie zachodzi dla funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta. Jak łatwo sprawdzić, dla $t \in (0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ funkcja $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x = x_0 \\ -\infty & , \ x \neq x_0 \end{cases}$$

jest t-wypukła w sensie Wrighta. Dowód twierdzenia o podpieraniu w tym przypadku wymagał zastosowania nowej metody dowodowej. Kluczowym narzędziem okazało się twierdzenie, które przytaczamy poniżej. Wypowiedź tego twierdzenia wymaga jednak wprowadzenia kilku oznaczeń.

Dla ustalonego punktu $y \in D$ niech $D_y := (2y - D) \cap D$. Jest to największy w sensie inkluzji, symetryczny względem punktu y (tzn. $D_y = 2y - D_y$), podzbiór zbioru D. Zbiór D_y dziedziczy wypukłość po zbiorze D. Następnie, rekurencyjnie definiujemy ciąg średnich $M_n, N_n : D \times D \to D$:

$$M_1(x,z) = M(x,z) := tx + (1-t)z, \qquad N_1(x,z) = N(x,z) := (1-t)x + tz,$$

i dalej:

$$M_{n+1}(x,z) := M(M_n(x,z), N_n(x,z)), \qquad N_{n+1}(x,z) := N(M_n(x,z), N_n(x,z)).$$

Oczywiście $M_n(x,z) = N_n(z,x),\ M_n(x,x) = N_n(x,x) = x,\ x, z \in D,\ n \in \mathbb{N}$. Ponadto, jeżeli $f : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta, to dla wszelkich $x, z \in D$ oraz $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$f(M_{n+1}(x,z)) + f(N_{n+1}(x,z)) \leqslant f(M_n(x,z)) + f(N_n(x,z)).$$

Zatem, dla dowolnych $x, z \in D$, istnieje granica:

$$\lim_{n\to\infty} [f(M_n(x,z)) + f(N_n(x,z))].$$

Skończoność powyższej granicy odgrywa kluczową rolę w dalszych rozważaniach.

Twierdzenie 5 ((I), Theorem 3) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $D \subseteq X$ będzie zbiorem t-wypukłym. Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta. Jeżeli $y \in D$ oraz*

$$(\star) \qquad \lim_{n\to\infty} [f(M_n(x, 2y-x)) + f(N_n(x, 2y-x))] > -\infty \quad \text{dla } x \in D_y,$$

to funkcja $A_y : D_y \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$(3) \qquad A_y(x) = \lim_{n\to\infty} [f(M_n(x, 2y-x)) + f(N_n(x, 2y-x))], \quad x \in D_y$$

jest t-afiniczna w sensie Wrighta. Jeżeli ponadto $y \in algint_{\mathbb{Q}(t)}(D)$, to wzór (3) określa t-afiniczną w sensie Wrighta funkcję $A_y : X \to \mathbb{R}$.

Dowód tego twierdzenia został poprzedzony kilkoma technicznymi lematami, które pozwalają stwierdzić, że funkcja A_y określona wzorem (3) jest t-afiniczna w sensie Wrighta.

Zauważmy, że jeżeli f jest funkcją wypukłą w sensie Jensena ($t = \frac{1}{2}$), to dla dowolnego $x \in D_y$ mamy:

$$A_y(x) = 2f(y),$$

co wykorzystamy w dalszych częściach autoreferatu.

W pracy (II, Observation 1) pokazaliśmy więcej. Mianowicie, jeżeli $y \in algint_{\mathbb{Q}(t)}(D)$, to funkcja $A_y : X \to \mathbb{R}$ dana wzorem (3) jest postaci:

$$A_y(x) = 2f(y) + a_2(y - x, y - x), \quad x \in X,$$

gdzie $a_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ jest funkcją 2-addytywną i symetryczną. Ponadto, ponieważ a_2 jest funkcją otrzymaną przez zastosowania uogólnionej wersji twierdzenia Lajki (Twierdzenie 2), więc dodatkowo:

$$a_2(tx, (1 - t)x) = 0 \quad \text{dla } x \in X.$$

Korzystając z twierdzenia o oddzielaniu (Twierdzenie 4) oraz Twierdzenia 5 otrzymujemy następujące twierdzenie o podpieraniu.

Twierdzenie 6 ((I), Theorem 4) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $D \subseteq X$ będzie zbiorem t-wypukłym. Załóżmy, że $f : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta oraz $y \in D$. Wówczas istnieje t-afiniczna w sensie Wrighta funkcja podpierająca funkcję $f_{|D_y}$ w punkcie y tj. funkcja $a_y : D_y \to \mathbb{R}$ spełniająca*

(i) $a_y(y) = f(y)$,

(ii) $a_y(x) \leqslant f(x)$ *dla* $x \in D_y$,

(iii) $a_y(tx + (1 - t)z) + a_y((1 - t)x + tz) = a_y(x) + a_y(z)$ *dla* $x, z \in D_y$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\star) \qquad \lim_{n\to\infty}[f(M_n(x, 2y - x)) + f(N_n(x, 2y - x))] > -\infty \quad \text{dla } x \in D_y.$$

Ponadto, jeżeli $y \in algint_{\mathbb{Q}(t)}(D)$ oraz spełniony jest warunek $(\star)$, to istnieje t-afiniczna w sensie Wrihta podpórka $a_y : D \to \mathbb{R}$ funkcji f w punkcie y określona na całej dziedzinie D.

Uwaga 1 *Przykład* [74, Example] *pokazuje, że funkcja t-wypukła w sensie Wrighta warunku $(\star)$ spełniać nie musi.*

Z dowodu powyższego twierdzenia wynika w szczególności, że funkcję podpierającą możemy oszacować z góry i z dołu w następujący sposób:

$$A_y(x) - f(2y - x) \leqslant a_y(x) \leqslant f(x), \quad x \in D_y.$$

W przypadku funkcji wypukłych w sensie Jensena otrzymujemy więc oszacowanie:

$$2f(y) - f(2y - x) \leqslant a_y(x) \leqslant f(x), \quad x \in D_y.$$

Powyższe oszacowanie jest bardzo użyteczne, w szczególności, jeżeli f jest funkcją ograniczoną na zbiorze D_y, to funkcja podpierająca a_y dziedziczy tę własność.

Kolejne twierdzenie podaje warunki równoważne istnieniu podpórki w danym punkcie, dla funkcji określonych na zbiorach $\mathbb{Q}(t)$-algebraicznie otwartych. Okazuje się, że istnienie funkcji podpierającej w jednym punkcie gwarantuje jej istnienie w dowolnym punkcie.

Twierdzenie 7 ((I), Theorem 5) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, niech $D \subseteq X$ będzie zbiorem t-wypukłym i $\mathbb{Q}(t)$-algebraicznie otwartym. Niech, ponadto $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) *istnieje taki punkt $y \in D$, że*

$$(\star) \qquad \lim_{n\to\infty} [f(M_n(x, 2y - x)) + f(N_n(x, 2y - x))] > -\infty, \quad x \in D_y;$$

(ii) *istnieje funkcja t-wklęsła w sensie Wrighta $g : D \to \mathbb{R}$ o tej własności, że*

$$g(x) \leqslant f(x), \quad x \in D;$$

(iii) *dla dowolnego punktu $y \in D$ spełniony jest warunek $(\star)$;*

(iv) *w dowolnym punkcie $y \in D$ istnieje t-afiniczna w sensie Wrighta podpórka funkcji f.*

Twierdzenia o oddzielaniu i podpieraniu mają wiele konsekwencji. W pracy (II) podajemy zastosowania dowiedzionych twierdzeń do charakteryzacji pewnych podklas klasy wszystkich funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta. W pracy [66] Maksa, Nikodem i Páles podali algebraiczne warunki (zależne od algebraicznych własności liczby $t \in (0, 1)$), które implikują, że funkcja t-wypukła w sensie Wrighta jest wypukła w sensie Jensena. Następujące twierdzenie podaje topologiczne warunki konieczne i wystarczające na to, aby funkcja t-wypukła w sensie Wrighta była wypukła w sensie Jensena.

Twierdzenie 8 ((II), Theorem 5) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, niech $D \subseteq X$ będzie zbiorem $\mathbb{Q}(t)$-wypukłym i $\mathbb{Q}(t)$-algebraicznie otwartym, $f : D \to \mathbb{R}$ funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta. Wówczas f jest funkcją wypukłą w sensie Jensena wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu $y \in D$ istnieje taki zbiór $U_y \subseteq D$ symetryczny względem y, że $y \in algint_{\mathbb{Q}(t)}(U_y)$ oraz funkcja*

$$U_y \ni x \longrightarrow f(x) + f(2y - x)$$

jest ograniczona z dołu.

Oczywiście każda funkcja lokalnie ograniczona z dołu spełnia powyższy warunek. W przestrzeniach lokalnie wypukłych prawdziwe jest ogólniejsze twierdzenie:

Twierdzenie 9 ((II), Theorem 9) *Niech D będzie wypukłym i otwartym podzbiorem lokalnie wypukłej, rzeczywistej przestrzeni liniowo-topologicznej oraz niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta. Jeżeli funkcja f jest ograniczona z dołu na pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in D$, to f jest wypukła w sensie Jensena.*

Poniższe twierdzenie i wniosek podają kolejne warunki konieczne i wystarczające na wypukłość w sensie Jensena funkcji t-wypukłej w sensie Wrighta.

Twierdzenie 10 ((II), Theorem 6) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, niech $D \subseteq X$ będzie zbiorem $\mathbb{Q}(t)$-wypukłym i $\mathbb{Q}(t)$-algebraicznie otwartym, $f : D \to \mathbb{R}$ funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta. Wówczas f jest funkcją wypukłą w sensie Jensena wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $\Phi : D \to \mathbb{R}$, że*

$$\Phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant f(x) + f(y) \quad \text{dla } x, y \in D.$$

Wniosek 1 ((II), Corollary 1) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, niech $D \subseteq X$ będzie zbiorem $\mathbb{Q}(t)$-wypukłym i $\mathbb{Q}(t)$-algebraicznie otwartym, $f : D \to \mathbb{R}$ funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta. Wówczas f jest funkcją wypukłą w sensie Jensena wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka wypukła w sensie Jensena funkcja $g : D \to \mathbb{R}$, że*

$$g(x) \leqslant f(x), \quad x \in D.$$

Ciekawym i ważnym jest, że funkcja f występująca w Twierdzeniu 9, Twierdzeniu 10 oraz we Wniosku 1 nie musi być t-wypukła. Odpowiedni przykład znajdziemy w omawianej pracy (II).

Kolejne twierdzenie orzeka, że warunek $(\star)$ w istocie charakteryzuje pewną ważną podklasę klasy funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta:

Twierdzenie 11 ((II), Theorem 10) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, niech $D \subseteq X$ będzie zbiorem $\mathbb{Q}(t)$-wypukłym i $\mathbb{Q}(t)$-algebraicznie otwartym, $f : D \to \mathbb{R}$ funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta. Wówczas istnieje taki punkt $y \in D$, że*

$$(\star) \qquad \varliminf_{n\to\infty} [f(M_n(x, 2y - x)) + f(N_n(x, 2y - x))] > -\infty \quad \text{dla każdego } x \in D_y$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x) = a(x) + g(x), \quad x \in D,$$

gdzie $a : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją t-afiniczną w sensie Wrighta, $g : D \to \mathbb{R}$ funkcją wypukłą w sensie Jensena.

Korzystając z twierdzenia o oddzielaniu (Twierdzenie 4) otrzymujemy następujące twierdzenie o majoryzacji:

Twierdzenie 12 ((II), Theorem 11) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, niech $D \subseteq X$ będzie zbiorem $\mathbb{Q}(t)$-wypukłym i $\mathbb{Q}(t)$-algebraicznie otwartym, $f : D \to \mathbb{R}$ funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta, $g : D \to \mathbb{R}$ funkcją t-wklęsłą w sensie Wrighta. Jeżeli*

$$g(x) \leqslant f(x), \quad \text{dla } x \in D,$$

to istnieją: funkcja wypukła w sensie Jensena $F : D \to \mathbb{R}$, funkcja wklęsła w sensie Jensena $G : D \to \mathbb{R}$ oraz funkcja t-afiniczna w sensie Wrighta $a : D \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x) = a(x) + F(x), \qquad g(x) = a(x) + G(x), \quad x \in D.$$

Następne twierdzenie z pracy (II) podaje warunki konieczne i wystarczające na to aby funkcja t-wypukła w sensie Wrighta była wypukła w sensie Wrighta.

Twierdzenie 13 ((II), Theorem 12) *Niech D będzie wypukłym i algebraicznie otwartym podzbiorem rzeczywistej przestrzeni liniowej X oraz niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) *f jest funkcją wypukłą w sensie Wrighta;*

(ii) *istnieją: funkcja addytywna $a : X \to \mathbb{R}$ oraz funkcja wypukła $w : D \to \mathbb{R}$, że*

$$f(x) = a(x) + w(x), \quad x \in D;$$

(iii) *dla dowolnych $x, y \in D$:*

$$\lim_{\alpha \to \frac{1}{2}} [f(\alpha x + (1-\alpha)y) + f((1-\alpha)x + \alpha y)] = 2f\Big(\frac{x+y}{2}\Big);$$

(iv) *istnieje taka funkcja $\Phi : D \to [0, \infty)$, że*

$$\bigwedge_{x,y \in D} \ \bigvee_{\lambda_{xy} \in (0,\frac{1}{2})} \ \bigwedge_{\lambda \in (\frac{1}{2}-\lambda_{xy}, \frac{1}{2}+\lambda_{xy})} |f(\lambda x + (1-\lambda)y) + f((1-\lambda)x + \lambda y)| \leqslant \Phi\Big(\frac{x+y}{2}\Big).$$

Powyższe twierdzenie dostarcza również kolejnych argumentów do rozważania wprowadzonej przez Kominka [66] podklasy W_0 klasy funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta określonej następująco:

$$W_0 := \{f : D \to \mathbb{R} : f = a + g, \ \text{gdzie } a : X \to \mathbb{R} \text{ jest funkcją addytywną}, \\ g : D \to \mathbb{R} \text{ funkcją wypukłą i ciągłą}\}.$$

Oczywiście, jeżeli D jest wypukłym i otwartym podzbiorem przestrzeni skończenie wymiarowej, to klasa W_0 pokrywa się z klasą funkcji wypukłych w sensie Wrighta, natomiast w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych klasa ta jest istotnie mniejsza.

Twierdzenie 14 ((II), Theorem 13) *Niech D będzie wypukłym i algebraicznie otwartym podzbiorem rzeczywistej przestrzeni liniowo-topologicznej X oraz niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $f \in W_0$;

(ii) *istnieje taki punkt $y \in D$, że*

$$\lim_{x \to y}[f(x) + f(2y - x)] = 2f(y);$$

(iii) *istnieje punkt $y \in D$ i takie symetryczne względem niego jego otoczenie* [2] $U_y \subseteq X$, *że funkcja*

$$U_y \cap D \ni x \longrightarrow f(x) + f(2y - x)$$

jest ograniczona.

W pracy (III) rozpatrujemy analogiczne problemy jak w pracach (I) oraz (II) dla funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta określonych na całej przestrzeni. Założenie, że dziedziną rozpatrywanych funkcji jest cała przestrzeń jest istotne i w większości twierdzeń nie można go pominąć. Zauważmy, że jeżeli $t \neq \frac{1}{2}$, to funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest t-wypukła w sensie Wrighta wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x) + f(y) \leqslant f\Big(\frac{t}{2t-1}x + \frac{1-t}{2t-1}y\Big) + f\Big(\frac{1-t}{2t-1}x + \frac{t}{2t-1}y\Big) \quad \text{dla } x, y \in X.$$

W całej pracy (III) zakładamy, że $t \neq \frac{1}{2}$. Pomimo użycia tam analogicznych metod jak w pracach (I) oraz (II), wyniki w niej zawarte są na tyle zaskakujące i nieoczekiwane, że warto je tu przytoczyć. Rozpocznijmy od następującego twierdzenia o oddzielaniu:

Twierdzenie 15 ((III), Theorem 2) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta, a $g : D \to \mathbb{R}$ funkcją t-wklęsłą w sensie Wrighta. Jeżeli*

$$f(x) \leqslant g(x), \quad x \in X,$$

to istnieje taka funkcja t-afiniczna w sensie Wrighta $a : X \to \mathbb{R}$, że

$$f(x) \leqslant a(x) \leqslant g(x) \quad \textit{dla } x \in X.$$

Można pokazać (stosując np. Theorem 7.1 z pracy [62]), że w przypadku gdy $f, -g$ są funkcjami wypukłymi w sensie Jensena, określonymi na całej przestrzeni liniowej (nad ciałem liczb rzeczywistych), to nierówność $f \leqslant g$ implikuje, że f i g są funkcjami

[2] Do pracy (II) wkradł się błąd drukarski, występuje w niej założenie $y \in \mathit{algint}_{\mathbb{R}}(U_y)$, choć dowód był przeprowadzony dla zbioru U_y otwartego w przestrzeni X.

afinicznymi w sensie Jensena różniącymi się o stałą.

Analogicznie jak poprzednio definiujemy rekurencyjnie ciąg odwzorowań $K_n, L_n : X \times X \to X$ wzorami:

$$K_1(x,z) = K(x,z) = \frac{t}{2t-1}x + \frac{t-1}{2t-1}z, \qquad L_1(x,z) = L(x,z) = \frac{t-1}{2t-1}x + \frac{t}{2t-1}z,$$

i dalej:

$$K_{n+1}(x,z) := K(K_n(x,z), L_n(x,z)), \qquad L_{n+1}(x,z) := L(K_n(x,z), L_n(x,z)).$$

Oczywiście $K_n(x,z) = L_n(z,x)$, $K_n(x,x) = L_n(x,x) = x$ dla $x, z \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Ponadto, jeżeli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta, to dla wszelkich $x, z \in X$ oraz $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność

$$f(K_n(x,z)) + f(L_n(x,z)) \leqslant f(K_{n+1}(x,z)) + f(L_{n+1}(x,z)).$$

Tym razem otrzymujemy istnienie granicy

$$\lim_{n\to\infty}[f(K_n(x,z)) + f(L_n(x,z))],$$

dla dowolnych $x, z \in X$, a następujące twierdzenie możemy interpretować jako twierdzenie o podpieraniu dla funkcji t-wklęsłych w sensie Wrighta.

Twierdzenie 16 ((III), Theorem 5) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta ($t \neq \frac{1}{2}$), $y \in X$. Wówczas istnieje taka funkcja t-afiniczna w sensie Wrighta $a_y : X \to \mathbb{R}$, że*

$$a_y(y) = f(y) \qquad \textit{oraz} \qquad f(x) \leqslant a_y(x),\ x \in X$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\diamond) \qquad \lim_{n\to\infty}[f(K_n(x, 2y-x)) + f(L_n(x, 2y-x))] < \infty, \quad x \in X.$$

W przypadku, gdy f jest funkcją wypukłą w sensie Jensena, istnienie funkcji afinicznej w sensie Jensena $a_y : X \to \mathbb{R}$ spełniającej $f(y) = a_y(y)$, $f(x) \leqslant a_y(x)$, $x \in X$ jest możliwe tylko w przypadku gdy f jest funkcją afiniczną w sensie Jensena, ale wówczas twierdzenie to jest trywialne. Istnieją natomiast funkcje t-wypukłe w sensie Wrighta spełniające warunek $(\diamond)$, które nie są funkcjami t-afinicznymi w sensie Wrighta. Własność tę posiada np. wspomniana funkcja skonstruowana przez Maksę, Nikodema i Pálesa w pracy [74]. Oczywiście każda taka funkcja musi być nieciągła w dowolnym punkcie.

Dwa warunki równoważne warunkowi $(\diamond)$ podaje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 17 ((III), Theorem 6) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta. Wówczas następujące warunki są równoważne*

(a) *istnieje punkt $y \in X$ o tej własności, że*

$$\lim_{n\to\infty}[f(K_n(x, 2y - x)) + f(L_n(x, 2y - x))] < \infty \quad \text{dla } x \in X;$$

(b) *istnieje taka t-wklęsła w sensie Wrighta funkcja $g : X \to \mathbb{R}$, że*

$$f(x) \leqslant g(x) \quad \text{dla } x \in X;$$

(c) *dla dowolnego $y \in X$ mamy*

$$\lim_{n\to\infty}[f(K_n(x, 2y - x)) + f(L_n(x, 2y - x))] < \infty \quad \text{dla } x \in X.$$

Następne twierdzenie podaje warunki konieczne i wystarczające na to, aby dowolna funkcja t-wypukła w sensie Wrighta była wklęsła w sensie Jensena. Przykład podany przez Maksę, Nikodema i Pálesa pokazuje, że takie funkcje istnieją i mają patologiczne własności.

Twierdzenie 18 ((III), Theorem 7) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta. Wówczas f jest funkcją wklęsłą w sensie Jensena wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $\Psi : X \to \mathbb{R}$, że*

$$f(x) + f(y) \leqslant \Psi\Big(\frac{x+y}{2}\Big), \quad x, y \in X.$$

Jako wniosek z powyższego twierdzenia oraz z Twierdzenia 9 otrzymujemy warunki konieczne i wystarczające na to, aby funkcja t-wypukła w sensie Wrighta była afiniczna w sensie Jensena.

Twierdzenie 19 ((III), Theorem 8) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta. Wówczas f jest funkcją afiniczną w sensie Jensena wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $G : X \to \mathbb{R}$, że*

$$|f(x) + f(y)| \leqslant G\Big(\frac{x+y}{2}\Big), \quad x, y \in X.$$

W szczególności z Twierdzenia 18 wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 20 ((III), Theorem 9) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta. Jeżeli f jest ograniczona z góry, to jest wklęsła w sensie Jensena.*

Widzimy więc, że wklęsłość w sensie Jensena nieciągłej funkcji t-wypukłej w sensie Wrighta, ograniczonej z góry na całej prostej w przykładzie podanym przez Maksę, Nikodema i Pálesa, choć zaskakuje, jest w istocie zachowaniem normalnym dla funkcji określonych na całej przestrzeni. Wobec powyższego twierdzenia wystarczyło wskazać dowolną funkcję t-wypukłą w sensie Wrighta, nieciągłą i ograniczoną z góry na całej przestrzeni.

Z dowodu powyższego twierdzenia wnioskujemy, że ograniczoność z góry funkcji f wystarczy postulować intuicyjnie "daleko". W przypadku, gdy X jest przestrzenią liniowo-topologiczną, wystarczy zakładać, że f jest ograniczona z góry poza pewnym właściwym otoczeniem zera.

Również warunek $(\diamond)$ charakteryzuje pewną podklasę klasy funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta określonych na całej przestrzeni. Mówi o tym następujące twierdzenie:

Twierdzenie 21 *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta. Wówczas f spełnia warunek $(\diamond)$, tj.*

$$\lim_{n\to\infty}[f(K_n(x, 2y - x)) + f(L_n(x, 2y - x))] < \infty, \quad x \in X,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci

$$f(x) = a(x) + g(x), \quad x \in X,$$

gdzie $a : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją t-afiniczną w sensie Wrighta, a $g : X \to \mathbb{R}$ funkcją wklęsłą w sensie Jensena.

Ostatnia charakteryzacja dotyczy funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta, które są majoryzowane przez funkcje t-wklęsłe w sensie Wrighta.

Twierdzenie 22 *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $f, -g : X \to \mathbb{R}$ będą funkcjami t-wypukłymi w sensie Wrighta. Jeżeli*

$$f(x) \leqslant g(x) \quad \text{dla } x \in X,$$

to istnieją wklęsłe w sensie Jensena funkcje $F, -G : X \to \mathbb{R}$ i taka t-afiniczna w sensie Wrighta funkcja $a : X \to \mathbb{R}$, że

$$f(x) = a(x) + F(x), \qquad g(x) = a(x) + G(x), \quad x \in X.$$

Odpowiednik twierdzenia typu Kranza dla odwzorowań delta-podaddytywnych

W pracy (IV) rozpatrujemy problemy oddzielania i podpierania dla odwzorowań delta-poddaddytywnych i delta-naddaddytywnych. Odworowania delta-poddaddytywne jako pierwszy rozważał Ger w pracy [40]. Omawiana praca (IV) zawiera częściowe uogólnienia wyników uzyskanych przez Kranza [68] oraz Z. Gajdę i Kominka [37].

Zakładamy, że $(Y, \|\cdot\|)$ jest rzeczywistą przestrzenią Banacha, $(S, \cdot)$ półgrupą słabo przemienną, tzn. półgrupą spełniającą warunek:

$$\bigwedge_{x,y \in S} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (x \cdot y)^{2^n} = x^{2^n} \cdot y^{2^n}.$$

Potęgi postaci x^{2^n} definiujemy rekurencyjnie: $x^{2^0} = x,\ x^{2^{k+1}} = x^{2^k} \cdot x^{2^k}$. Pojęcie słabej przemienności wprowadził Józef Tabor [114]. Oczywiście każda półgrupa przemienna jest słabo przemienna, ale istnieją półgrupy, a nawet grupy nieprzemienne spełniające powyższy warunek.

Definicja 2 Niech $(S, \cdot)$ będzie półgrupą. Odwzorowanie $F : S \to Y$ nazywamy *delta-podaddytywnym* z kontrolną funkcją $f : S \to \mathbb{R}$ (co zapisujemy krótko $(F, f) \in D_s(S)$), jeżeli

$$\|F(x) + F(y) - F(x \cdot y)\| \leqslant f(x) + f(y) - f(x \cdot y), \quad x, y \in S.$$

W przypadku gdy $(-F, -f) \in D_s(S)$ mówimy, że F jest *delta-nadaddytywna* z kontrolną funkcją f.

Łatwo sprawdzić, że jeżeli $(F, f), (-F, -f) \in D_s(S)$, to odwzorowania F i f muszą być addytywne.

Klasyczne twierdzenie o oddzielaniu otrzymane przez Kranza ma następującą postać:

Twierdzenie 23 ([68], Kranz, 1972) *Niech $(S, \cdot)$ będzie półgrupą przemienną, $f : S \to \mathbb{R}$ funkcją podaddytywną, tzn.*

$$f(x \cdot y) \leqslant f(x) + f(y) \quad \textit{dla } x, y \in S,$$

$g : S \to \mathbb{R}$ funkcją nadaddytywną, tj.

$$g(x \cdot y) \geqslant g(x) + g(y) \quad \textit{dla } x, y \in S$$

oraz

$$g(x) \leqslant f(x) \quad \textit{dla } x \in S.$$

Wówczas istnieje taka funkcja addytywna $a : S \to \mathbb{R}$, że

$$g(x) \leqslant a(x) \leqslant f(x) \quad \textit{dla } x \in S.$$

Dla rzeczywistej przestrzeni unormowanej $(Y, \|\cdot\|)$ rozpatrzmy przestrzeń liniową $\overline{Y} := Y \times \mathbb{R}$ z działaniami dodawania i mnożenia przez skalary po współrzędnych. Przypomnijmy, że dla ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ zbiór postaci:

$$\mathcal{K}_\varepsilon := \{(x,t) \in \overline{Y} : \ \varepsilon\|x\| \leqslant t\}$$

nazywamy *stożkiem Lorentza.* Stożek ten indukuje w $\overline{Y}$ częściowy porządek, w następujący sposób:

$$(x_1, t_1) \preceq_{\mathcal{K}_\varepsilon} (x_2, t_2) \Leftrightarrow \varepsilon\|x_2 - x_1\| \leqslant t_2 - t_1.$$

Porządek ten jest zgodny ze strukturą liniową przestrzeni $\overline{Y}$, tzn.

- $x \preceq_{\mathcal{K}_\varepsilon} y \Rightarrow x + z \preceq_{\mathcal{K}_\varepsilon} y + z \quad$ dla $x, y, z \in \overline{Y}$,
- $x \preceq_{\mathcal{K}_\varepsilon} y \Rightarrow \alpha x \preceq_{\mathcal{K}_\varepsilon} \alpha y \quad$ dla $x, y \in \overline{Y}, \ \alpha \geqslant 0$.

Zauważmy, że określając dla danych funkcji $F : S \to Y$ oraz $f : S \to \mathbb{R}$ odwzorowanie $\overline{F} : S \to \overline{Y}$ wzorem:

$$\overline{F}(x) := (F(x), f(x)), \quad x \in S,$$

możemy przepisać nierówność definiującą delta-podaddytywność odwzorowania F z kontrolną funkcją f w postaci:

$$\overline{F}(x \cdot y) \preceq_{\mathcal{K}_1} \overline{F}(x) + \overline{F}(y), \quad x, y \in S,$$

gdzie $\mathcal{K}_1 = \{(x,t) \in \overline{Y} : \|x\| \leqslant t\}$. Uwaga ta pokazuje, że odwzorowania delta-podaddytywne uogólniają odwzorowania podaddytywne przez zastąpienie klasycznej nierówności relacją częściowego porządku indukowanego przez stożek Lorentza. Klasyczne wyniki dotyczące funkcji podaddytywnych otrzymujemy kładąc $F = 0$. Dla odwzorowań delta-podaddytywnych zachodzi następująca wersja twierdzenia o oddzielaniu:

Twierdzenie 24 ((IV), Theorem 1) *Niech $(S, \cdot)$ będzie półgrupą słabo przemienną, $(Y, \|\cdot\|)$ rzeczywistą przestrzenią Banacha. Załóżmy ponadto, że $F : S \to Y$ jest odwzorowaniem delta-podaddytywnym z kontrolną funkcją $f : S \to \mathbb{R}$, a $G : S \to Y$ odwzorowaniem delta-nadaddytywnym z kontrolną funkcją $g : S \to \mathbb{R}$. Jeżeli $(G, g) \preceq_{\mathcal{K}_1} (F, f)$, tzn.*

$$\|F(x) - G(x)\| \leqslant f(x) - g(x), \quad x \in S,$$

oraz

$$\sup\{f(x) - g(x) : x \in S\} < \infty,$$

to istnieją jedyne funkcje addytywne $A : S \to Y$ oraz $a : S \to \mathbb{R}$ spełniające

$$(G(x), g(x)) \preceq_{\mathcal{K}_1} (A(x), a(x)) \preceq_{\mathcal{K}_1} (F(x), f(x)), \quad x \in S.$$

Twierdzenie powyższe uogólnia Twierdzenie 1 z pracy Gajdy i Kominka [37]. Stosując to twierdzenie otrzymaliśmy bardzo prosty dowód następującego twierdzenia o stabilności w sensie Hyersa-Ulama dla równania Cauchy'ego:

Twierdzenie 25 ((IV), Corollary 2) *Niech $(S, \cdot)$ będzie półgrupą słabo przemienną, $(Y, \|\cdot\|)$ rzeczywistą przestrzenią Banacha. Wówczas, jeśli $F : S \to Y$ jest odwzorowaniem ε-addytywnym, tzn.*

$$\|F(x) + F(y) - F(x \cdot y)\| \leqslant \varepsilon \quad \textit{dla } x \in S,$$

gdzie $\varepsilon > 0$, to istnieje dokładnie jedna taka funkcja addytywna $A : S \to Y$, że

$$\|F(x) - A(x)\| \leqslant \varepsilon \quad \textit{dla } x \in S.$$

Problem stabilności został sformułowany przez S. Ulama w 1940 roku, który pytał, czy jeśli zaburzymy równanie Cauchy'ego, tzn. będziemy postulować jego spełnienie przez daną funkcję z pewną dokładnością, to czy istnieje rozwiązanie równania Cauchy'ego jednostajnie bliskie tej funkcji? Pozytywne rozwiazanie problemu Ulama dla funkcji przeprowadzajacych jedną przestrzeń Banacha w drugą jako pierwszy podał niecały rok po sformułowaniu problemu D. H. Hyers [50].

Warunki konieczne i wystarczające istnienia w ustalonym punkcie funkcji podpierającej dowiedliśmy dla odwzorowań określonych na abelowych grupach jednoznacznie podzielnych przez dwa. Grupa abelowa $(G, +)$ jest *jednoznacznie podzielna przez* 2, jeżeli dla dowolnego $x \in G$ istnieje jedyny taki element $y \in G$, że $2y = x$; element ten oznaczamy symbolem $\frac{1}{2}x$. Korzystając z twierdzenia o podpieraniu dowiedzionego w pracy (O7) (zobacz część 5 na str. 30) otrzymujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 26 ((IV), Theorem 3) *Niech $(X, +)$ będzie abelową grupą jednoznacznie podzielną przez 2, a $(Y, \|\cdot\|)$ rzeczywistą przestrzenią Banacha. Niech $F : X \to Y$ będzie odwzorowaniem delta-podaddytywnym z kontrolną funkcją $f : X \to \mathbb{R}$ oraz $y \in X$. Wówczas istnieją takie funkcje addytywne $A_y : X \to Y$ i $a_y : X \to \mathbb{R}$, że*

$$\|F(x) - A_y(x)\| \leqslant f(x) - a_y(x) \quad \textit{dla } x \in X,$$

oraz

$$A_y(y) = F(y), \qquad a_y(y) = f(y),$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(y^n) = nf(y) \quad \textit{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Twierdzenie o podpieraniu dla funkcji podliniowych określonych na prostej rzeczywistej zostało dowiedzione przez E. Berza w pracy [15]. Analogiczny wynik dla rzeczywistych funkcji podaddytywnych i $\mathbb{N}$-jednorodnych określonych na półgrupach słabo przemiennych otrzymali Gajda i Kominek w [37].

Twierdzenie o podpieraniu dla uogólnionej wypukłości

W literaturze można znaleźć wiele uogólnień pojęcia t-wypukłości, wypukłości w sensie Jensena i wypukłości, które polegają na zaburzeniu prawej strony nierówności przy niezmienionej lewej stronie (np. pojęcie aproksymatywnej wypukłości, silnej wypukłości, delta wypukłości, wypukłości w sensie Wrighta i wiele innych). W pracy (V) zaproponowaliśmy rozważanie ogólniejszej rodziny funkcji, która zawiera tego typu klasy odwzorowań.

Niech D będzie t-wypukłym (wypukłym) podzbiorem rzeczywistej przestrzeni liniowej, a $\omega : D \times D \times [0,1] \to \mathbb{R}$ daną funkcją. Dla ustalonej liczby $t \in [0,1]$ powiemy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest

(ω, t)-*wypukła*, jeżeli

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) + \omega(x,y,t) \quad \text{dla } x, y \in D; \tag{4}$$

(ω, t)-*wklęsła*, jeżeli

$$tf(x) + (1-t)f(y) + \omega(x,y,t) \leqslant f(tx + (1-t)y) \quad \text{dla } x, y \in D;$$

(ω, t)-*afiniczna*, jeżeli

$$tf(x) + (1-t)f(y) + \omega(x,y,t) = f(tx + (1-t)y) \quad \text{dla } x, y \in D.$$

Jeżeli powyższe nierówności są spełnione dla wszelkich $t \in [0,1]$, to funkcję f nazywamy odpowiednio ω-*wypukłą*, ω-*wklęsłą*, ω-*afiniczną*. Pojęcie ω-wypukłości jest wspólnym uogólnieniem pojęcia wypukłości, silnej wypukłości, aproksymatywnej wypuklości, delta wypukłości i wielu innych. Wspomniane klasy funkcji były intensywnie badane przez wielu matematyków, zobacz np.: [10], [51], [96], [97], [107], [113], [120], [125]. I tak:

- $\omega = 0$: dla wypukłości,
- $\omega(x,y,t) = -ct(1-t)\|x-y\|^2,\ c > 0$: dla silnej wypukłości,
- $\omega(x,y,t) = c\|x-y\|^\gamma,\ c > 0, \gamma \geqslant 0$: dla aproksymatywnej wypukłości,
- $\omega(x,y,t) = -\|tF(x) + (1-t)F(y) - F(tx + (1-t)y)\|$: dla delta wypukłości,
- $\omega(x,y,t) = (1-t)f(x) + tf(y) - f((1-t)x + ty)$: dla wypukłości w sensie Wrighta.

Bez żadnych dodatkowych założeń na funkcję ω nic nie można powiedzieć o funkcji f. Istotnie, dowolna funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest (ω, t)-afiniczna, a więc w szczególności (ω, t)-wypukła i (ω, t)-wklęsła, z następującą funkcją ω:

$$\omega(x,y,t) = f(tx + (1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y).$$

Głównym wynikiem pracy (V) jest twierdzenie, podające warunki konieczne i wystarczające na ω, gwarantujące istnienie (ω, t)-afinicznej podpórki w punkcie.

Twierdzenie 27 ((V), Theorem 3) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subset \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, D niech będzie zbiorem t-wypukłym oraz $y \in algint_{\mathbb{Q}(t)}(D)$. Załóżmy, że $f : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją (ω, t)-wypukłą, gdzie $\omega : D \times D \times [0,1] \to \mathbb{R}$. Wówczas w punkcie y istnieje taka (ω, t)-afiniczna funkcja podpierająca $a_y : D \to \mathbb{R}$, że $f - a_y$ jest funkcją t-wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja ω dla wszelkich $u, v, x, z \in D$ oraz $s \in \{t, 1-t\}$ spełnia warunki:*

(a) $\omega(y, y, t) = 0,$
(b) $\omega(x, z, t) = \omega(z, x, 1-t),$
(c) $$\begin{aligned} &\omega(u, z, s) + (1-s)\omega(v\,, z, s) - \omega(su + (1-s)v, z, s) \\ &\qquad\leqslant s\omega(u, v, s) - \omega(su + (1-s)z, sv + (1-s;)z, s). \end{aligned}$$

Dla funkcji ω-wypukłych twierdzenie przyjmuje postać:

Twierdzenie 28 ((V), Theorem 5) *Niech D będzie wypukłym podzbiorem rzeczywistej przestrzeni liniowej oraz $y \in algint(D)$. Załóżmy, że $f : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją ω-wypukłą, gdzie $\omega : D \times D \times [0,1] \to \mathbb{R}$. Wówczas w punkcie y istnieje taka ω-afiniczna funkcja podpierająca $a_y : D \to \mathbb{R}$, że $f - a_y$ jest funkcją wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja ω dla wszelkich $u, v, x, z \in D$ oraz $s, t \in [0,1]$ spełnia warunki:*

(i) $\omega(y, y, t) = 0,$
(ii) $\omega(x, z, t) = \omega(z, x, 1-t),$
(iii) $$\begin{aligned} &s\omega(u, z, t) + (1-s)\omega(v\,, z, t) - \omega(su + (1-s)v, z, t) \\ &\qquad\leqslant t\omega(u, v, s) - \omega(tu + (1-t)z, tv + (1-t;)z, s). \end{aligned}$$

Okazuje się, że istnienie (ω, t)-afinicznej (ω-afinicznej) podpórki w dowolnym punkcie charakteryzuje funkcje (ω, t)-wypukłe (ω-wypukłe), a więc podobnie jak w przypadku funkcji wypukłych, funkcja ma (ω, t)-afiniczną (ω-afiniczną) podpórkę w każdym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy jest (ω, t)-wypukła (ω-wypukła). Stąd każda funkcja (ω, t)-wypukła (ω-wypukła) jest równa punktowemu supremum funkcji (ω, t)-afinicznych (ω-afinicznych) leżących pod nią.

Jako konsekwencje twierdzeń o podpieraniu otrzymujemy następujące twierdzenie o reprezentacji utrzymane w duchu twierdzenia C. T. Ng [81]:

Twierdzenie 29 ((V), Theorem 7) *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{Q}(t) \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ (rzeczywistą przestrzenią liniową), niech D będzie takim zbiorem t-wypukłym (wypukłym), że $algint_{\mathbb{Q}(t)}(D) \neq \emptyset$ ($algint(D) \neq \emptyset$). Załóżmy, że $f : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją (ω, t)-wypukłą (ω-wypukłą), a $\omega : D \times D \times [0,1] \to \mathbb{R}$. Wówczas istnieją: funkcja t-wypukła (wypukła) $h : D \to \mathbb{R}$ oraz (ω, t)-afiniczna (ω-afiniczna) $a : D \to \mathbb{R}$, że*

$$f(x) = a(x) + h(x) \quad dla\ x \in D,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego punktu $y \in algint_{\mathbb{Q}(t)}(D)$ ($y \in algint(D)$) spełnione są warunki (a)-(c) ((i)-(iii)).

Bezpośrednią konsekwencją powyższego twierdzenia jest następujący wynik:

Twierdzenie 30 ((V), Theorem 8) *Niech X i D będą jak w poprzednim twierdzeniu, $f : D \to \mathbb{R}$ niech będzie funkcją (ω, t)-wypukłą (ω-wypukłą), a $\omega : D \times D \times [0,1] \to \mathbb{R}$ spełnia warunki* (a)-(c) ((i)-(iii)) *dla pewnego punktu $y \in algint_{\mathbb{Q}(t)}(D)$ ($y \in algint(D)$). Jeżeli*

$$\omega(x,z,t) \geqslant 0 \text{ dla } x,z \in D \qquad (\omega(x,z,t) \geqslant 0 \text{ dla } x,z \in D,\ t \in [0,1]),$$

to f jest funkcją delta t-wypukłą (delta-wypukłą), czyli istnieją takie funkcje t-wypukłe (wypukłe) $g, h : D \to \mathbb{R}$, że

$$f(x) = g(x) - h(x), \quad x \in D.$$

Jeżeli D jest wypukłym podzbiorem rzeczywistej przestrzeni unitarnej, to funkcja $\omega : D \times D \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dana wzorem:

$$\omega(x,y,t) = ct(1-t)\|x-y\|^2$$

spełnia warunki (a)-(c) oraz (i)-(iii). Zatem stosując główne wyniki pracy (V) jako bezpośrednie wnioski otrzymujemy twierdzenia o podpieraniu dla funkcji silnie t-wypukłych (silnie wypukłych) oraz funkcji aproksymatywnie t-wypukłych (aproksymatywnie wypukłych) (dla $\gamma = 2$). Stosowne twierdzenie dla funkcji silnie $\frac{1}{2}$-wypukłych zostało dowiedzione w pracy [10].

Kolejnym zastosowaniem głównych wyników pracy (V) jest następujące twierdzenie, które podaje warunki konieczne i wystarczające na to, aby norma pochodziła od iloczynu skalarnego.

Twierdzenie 31 ((V), Theorem 14) *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie rzeczywistą przestrzenią unormowaną. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(α) *odwzorowanie $\omega : D \times D \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dane wzorem*

$$\omega(x,y,t) = ct(1-t)\|x-y\|^2, \quad x,y \in X$$

spełnia dla pewnych $c > 0$ oraz $t \in (0,1)$ nierówności (c) *Twierdzenia 27;*

(β) *istnieją liczba $t \in (0,1)$ oraz taka funkcja $g : X \to \mathbb{R}$, że*

$$\|x-y\|^2 = tg(x) + (1-t)g(y) - g(tx + (1-t)y) \quad \text{dla } x,y \in X;$$

(γ) (X, $\|\cdot\|$) *jest przestrzenią unitarną.*

Najbardziej znanym wynikiem tego typu jest twierdzenie P. Jordana i J. von Neumana [56], które orzeka, że przestrzeń unormowana jest przestrzenią unitarną wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona tożsamość równoległoboku, tj.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{dla } x, y \in X.$$

Przegląd analogicznych rezultatów można znaleźć np. w monografii D. Amira [7] (zobacz także [6]).

Ostatnie zastosowanie Twierdzenia 27 pokazuje, że nie dla wszystkich funkcji ω istnieją rozwiązania nierówności (4). Mianowicie

Twierdzenie 32 ((V), Theorem 15) *Niech* $(X, \|\cdot\|)$ *będzie rzeczywistą przestrzenią unormowaną,* $t \in (0,1)$*,* $c > 0$*. Wówczas nie istnieje funkcja* $f : X \to \mathbb{R}$ *spełniająca nierówność*

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) - c\|x-y\| \quad \textit{dla } x, y \in X.$$

Abstrakcyjna wersja twierdzenia Hahna-Banacha i twierdzenia o podpieraniu

Praca (VI) wspólna z Zsoltem Pálesem powstała w głównej mierze podczas pobytu na stażu naukowym w Uniwersytecie w Debreczynie. Celem pracy było dowiedzenie twierdzenia o podpieraniu dla możliwie szerokiej klasy odwzorowań określonych na abstrakcyjnych strukturach i przyjmujących wartości w strukturach częściowo-uporządkowanych. Bezpośrednie motywacje do prowadzenia tych badań zawiera praca (O7) (zobacz część 5, na str. 30).

Ponieważ dziedzinami rozpatrywanych odwzorowań są ogólne struktury algebraiczne, w pierwszej części pracy wprowadzamy intuicyjne pojęcie wypukłości zbioru i punktów ekstremalnych dla podzbiorów danego zbioru bez struktury liniowej. Niech Γ oraz X będą niepustymi zbiorami, $n : \Gamma \to \mathbb{N}$ daną funkcją. Załóżmy, że mamy daną rodzinę w operacji określonych na zbiorze X:

$$w = \{w_\gamma : X^{n(\gamma)} \to X \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

Powiemy, że zbiór $E \subseteq X$ jest *w-wypukły*, jeśli

$$w_\gamma(E^{n(\gamma)}) \subseteq E \quad \text{dla } \gamma \in \Gamma.$$

Zbiór $E \subseteq X$ jest *w-ekstremalny*, jeżeli

$$w_\gamma^{-1}(E) \subseteq E^{n(\gamma)} \quad \text{dla } \gamma \in \Gamma.$$

Punkt $p \in X$ nazywamy *w-ekstremalnym*, jeżeli zbiór $\{p\}$ jest w-ekstremalny. Łatwo sprawdzić, że przekrój dowolnej rodziny zbiorów w-wypukłych (w-ekstremalnych) jest zbiorem w-wypukłym (w-ekstermalnym), co pozwala dla zbioru A określić jego w-wypukłą (w-ekstremalną) otoczkę jako najmniejszy w sensie inkluzji zbiór w-wypukły (w-ekstremalny) zawierający A. Oznaczamy ją symbolem $conv_w(A)$ ($ext_w(A)$).

Pojęcie w-ekstremalnej otoczki pozwoliło na zdefiniowanie odpowiednika relatywnego wnętrza i brzegu zbioru w następujący sposób:

Definicja 3 Mówimy, że punkt $p \in X$ jest punktem *w-wewnętrznym* zbioru X, jeżeli $ext_w(\{p\}) = X$. Zbiór wszystkich w-wewnętrznych punktów zbioru X nazywamy *w-wnętrzem* zbioru X i oznaczamy symbolem $int_w(X)$. Dopełnienie zbioru $int_w(X)$ nazywamy *w-brzegiem* zbioru X i oznaczamy symbolem:

$$\partial_w(X) := X \setminus int_w(X).$$

Uogólnienia twierdzenia Hahna-Banacha na odwzorowania przyjmujące wartości w zbiorach częściowo uporządkowanych wymagają dodatkowych założeń dotyczących struktury porządkowej. B. Rodriguez-Salinas i L. Bou w [106] pokazali, że twierdzenia o oddzielaniu dla odwzorowań o wartościach w uporządkowanych przestrzeniach wektorowych są prawdziwe tylko dla przestrzeni, w których rodzina przedziałów ma tzw. własność podwójnego przekroju.

W literaturze najczęściej pojawiającym się założeniem w twierdzeniach typu Hahna-Banacha dla operatorów dotyczącym struktury porządkowej jest założenie, że przeciwdziedzina jest zbiorem zupełnym w sensie Dedekinda, tzn. każdy ograniczony z dołu podzbiór ma kres dolny. R. J. Silverman oraz T. Yen [111] (zobacz także [8], [18], [19], [53], [115], [116]) pokazali, że jeżeli porządek w przestrzeni liniowej jest generowany przez stożek algebraicznie domknięty (domknięty w tzw. topologii *core*), to zupełność w sensie Dedekinda przeciwdziedziny jest równoważna zachodzeniu twierdzenia Hahna-Banacha.

W odniesieniu do przeciwdziedziny zakładać będziemy, że $(Y, \leqslant)$ jest takim zbiorem częściowo uporządkowanym, że każdy ograniczony z dołu łańcuch posiada infimum. Jeżeli warunek ten jest spełniony, to mówimy, że przestrzeń ma własność *lcc* (*lower chain complete*). Oczywiście, jeżeli przestrzeń jest zupełna w sensie Dedekinda, to ma też własność *lcc*, ale nie na odwrót. Podamy teraz przykłady przestrzeni z własnością *lcc*, które nie są zupełne w sensie Dedekinda. Przybliżymy wcześniej kilka niezbędnych pojęć.

Niech $(Y, +)$ będzie grupą abelową. Każda podpółgrupa S grupy Y spełniająca warunki: $0 \in S$ oraz $S \cap (-S) \subseteq \{0\}$ indukuje częściowy porządek $\leqslant_S$ w Y w następujący sposób:

$$x \leqslant_S y \Leftrightarrow y - x \in S.$$

Tak zdefiniowany porządek jest zgodny z algebraiczną strukturą grupy Y, tzn. jeżeli $x \leqslant_S y$, to $x + z \leqslant_S y + z$ dla dowolnego $z \in S$.

Trójkę $(Y,+,d)$ nazywamy *grupą z metryką*, jeśli $(Y,+)$ jest grupą, (Y,d) przestrzenią metryczną, przy czym metryka d jest niezmiennicza na przesunięcia, tzn.

$$d(x+z,y+z)=d(x,y) \quad \text{dla } x,y,z\in Y.$$

Metryka taka indukuje w naturalny sposób pseudonormę $\|\cdot\|:Y\to \mathbb{R}_+$ zadaną wzorem $\|x\|_d:=d(x,0)$. Ważną klasą półgrup, które mają własność *lcc* stanowią tzw. półgrupy addytywnie kontrolowane.

Definicja 4 Niech $(Y,+,d)$ będzie grupą abelową z metryką. Mówimy, że podpółgrupa S grupy Y jest *addytywnie kontrolowana*, jeśli istnieje taka ciągła funkcja addytywna $a:Y\to\mathbb{R}$, że

$$\|y\|_d\leqslant a(y),\quad y\in S.$$

Okazuje się, że każda domknięta półgrupa addytywnie kontrolowana, zupełnej grupy metrycznej, indukuje porządek, który posiada własność *lcc.* W zastosowaniach (np. teorii optymalizacji) rozpatruje się przestrzenie unormowane i w naturalny sposób w miejsce półgrupy pojawia się stożek. W pracy (VI) pokazaliśmy, że każda przestrzeń częściowo uporządkowana, w której porządek jest indukowany przez domknięty i wypukły stożek, że $int(\mathcal{K}^\circ)\neq\emptyset$ ma własność *lcc*, gdzie $\mathcal{K}^\circ$ oznacza stożek sprzężony z $\mathcal{K}$, tj.

$$\mathcal{K}^\circ:=\{\phi\in Y^\star:\phi(y)\geqslant 0,\ y\in\mathcal{K}\}.$$

Ważnym przykładem stożka, który ma tę własność jest stożek Lorentza:

$$\mathcal{K}_\varepsilon:=\{(x,t)\in Y\times\mathbb{R}:\varepsilon\|x\|\leqslant t\}.$$

Podamy teraz założenia, pod jakimi udowodniliśmy główne twierdzenia pracy (VI):

(H) Niech X będzie niepustym zbiorem, $(Y,\leqslant)$ przestrzenią częściowo uporządkowaną, $\Gamma\neq\emptyset$, $n:\Gamma\to\mathbb{N}$, a $w=\{w_\gamma:X^{n(\gamma)}\to X\mid\gamma\in\Gamma\}$ oraz $\Omega=\{\Omega_\gamma:Y^{n(\gamma)}\to Y\mid \gamma\in\Gamma\}$ rodzinami operacji.

Mówimy, że rodzina odwzorowań $\{w_\gamma\mid\gamma\in\Gamma\}$ jest *parami dystrybutywna*, jeżeli dla dowolnych $\gamma,\beta\in\Gamma,\ k\in\{1,2,\dots,n(\gamma)\}$ oraz wszelkich $x_1,\dots,x_{k-1},\ x_{k+1},\dots,x_{n(\gamma)}$, $y_1,\dots,y_{n(\beta)}\in X$ mamy:

$$\begin{aligned}&w_\gamma(x_1\,,\dots,x_{k-1},w_\beta(y_1,\dots,y_{n(\beta)}),x_{k+1},\dots,x_{n(\gamma)})\\&=w_\beta(\,w_\gamma(x_1,\dots,x_{k-1},y_1,x_{k+1},\dots,x_{n(\gamma)}),\dots,\\&\qquad w_\gamma(x_1,\dots,x_{k-1},y_{n(\beta)},x_{k+1},\dots,x_{n(\gamma)})).\end{aligned}$$

Założenie parami dystrybutywności jest mniej restrykcyjne od założenia komutatywności, pod jakim zostało dowiedzione twierdzenie Rodégo.

Powiemy, że rodzina operacji $\{w_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ jest *refleksywna*, jeżeli dla wszelkich $\gamma \in \Gamma$ spełniony jest warunek:

$$w_\gamma(x, \dots, x) = x, \quad x \in X.$$

Załóżmy warunek (H) oraz niech $D \subseteq X$ będzie zbiorem w-wypukłym. Mówimy, że funkcja $f : D \to Y$ jest (w, Ω)-*wypukła*, jeśli

$$f\Big(w_\gamma(x_1, \dots, x_{n(\gamma)})\Big) \leqslant \Omega_\gamma\Big(f(x_1), \dots, f(x_{n(\gamma)})\Big) \quad \text{dla } \gamma \in \Gamma \text{ oraz } x_1, \dots, x_{n(\gamma)} \in D.$$

Jeżeli

$$f\Big(w_\gamma(x_1, \dots, x_{n(\gamma)})\Big) \geqslant \Omega_\gamma\Big(f(x_1), \dots, f(x_{n(\gamma)})\Big) \quad \text{dla } \gamma \in \Gamma \text{ oraz } x_1, \dots, x_{n(\gamma)} \in D,$$

to mówimy, że f jest (w, Ω)-*wklęsła*. Funkcję $f : D \to Y$ nazywamy (w, Ω)-*afiniczną*, jeśli

$$f\Big(w_\gamma(x_1, \dots, x_{n(\gamma)})\Big) = \Omega_\gamma\Big(f(x_1), \dots, f(x_{n(\gamma)})\Big) \quad \text{dla } \gamma \in \Gamma \text{ oraz } x_1, \dots, x_{n(\gamma)} \in D.$$

Następujące twierdzenie jest uogólnioną wersją twierdzenia Hahna-Banacha dla odwzorowań (w, Ω)-wypukłych:

Twierdzenie 33 ((VI), Theorem 4.3) *Załóżmy* (H) *oraz że spełnione są następujące warunki:*

(H1) $(Y, \leqslant)$ *jest zbiorem częściowo uporządkowanym z własnością lcc;*

(H2) *rodzina w składa się z operacji parami dystrybutywnych;*

(H3) *rodzina Ω składa się z takich operacji parami dystrybutywnych, że dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ operacja Ω_γ jest automorfizmem porządkowym względem każdej zmiennej.*

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją (w, Ω)-wypukłą, D niech będzie takim niepustym, w-wypukłym podzbiorem zbioru X, że $ext_w(D) = X$ oraz $f|_D$ jest (w, Ω)-afiniczna. Wówczas istnieje taka funkcja (w, Ω)-afiniczna $g : X \to Y$, że $g \leqslant f$ oraz $g|_D = f|_D$.

Zakładając dodatkowo, że rodziny operacji w i Ω są refleksywne, jako wniosek, otrzymujemy twierdzenie o podpieraniu:

Twierdzenie 34 ((VI), Corollary 4.4) *Załóżmy* (H) *oraz że spełnione są następujące warunki:*

(H1+) $(Y, \leqslant)$ *jest zbiorem częściowo uporządkowanym z własnością lcc;*

(H2+) *rodzina w składa się z operacji refleksywnych i parami dystrybutywnych;*

(H3+) *rodzina Ω składa się z takich operacji refleksywnych i parami dystrybutywnych, że dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ operacja Ω_γ jest automorfizmem porządkowym względem każdej zmiennej.*

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją (w, Ω)-wypukłą. Wówczas dla dowolnego w-wewnętrznego punktu $p \in X$ istnieje taka (ω, Ω)-afiniczna funkcja $g : X \to Y$, że $g \leqslant f$ oraz $g(p) = f(p)$.

Kolejnym wnioskiem jest twierdzenie o podpieraniu dla odwzorowań podaddytywnych określonych na abstrakcyjnych strukturach. Twierdzenie to uogólnia twierdzenie Berza [15] oraz Twierdzenie 26 o podpieraniu dla odwzorowań delta-podaddytywnych.

Twierdzenie 35 ((VI), Corollary 4.5) *Niech $(X, +)$ będzie półgrupą abelową, Y grupą abelową z metryką zupełną, częściowo-uporządkowaną przez relację $\leqslant_S$ generowaną przez taką addytywnie kontrolowaną półgrupę $S \subseteq Y$, że $0 \in S$. Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem podaddytywnym, tj.*

$$f(x+y) \leqslant_S f(x) + f(y) \quad dla\ x, y \in X.$$

Załóżmy ponaddto, że $p \in X$ oraz

(i) *f(np)=nf(p) dla wszelkich $n \in \mathbb{N}$,*

(ii) *dla dowolnego $x \in X$ istnieją $y \in X$ oraz takie $n \in \mathbb{N}$, że $x + y = np$.*

Wówczas istnieje takie odwzorowanie addytywne $g : X \to Y$, że

$$g \leqslant_S f \quad oraz \quad g(p) = f(p).$$

Przypomnimy w tym miejscu pojęcie zbioru $\frac{1}{2}$-wypukłego. Niech $(G, +)$ będzie abelową grupą jednoznacznie podzielną przez 2. Powiemy, że podzbiór X grupy G jest $\frac{1}{2}$*-wypukły*, jeżeli dla wszelkich $x, y \in X$,

$$\frac{1}{2}(x+y) \in X.$$

Łatwo dowieść indukcyjnie, że jeżeli X jest zbiorem $\frac{1}{2}$-wypukłym, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz wszelkich $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n\}$ mamy

$$\frac{k}{2^n}x + (1 - \frac{k}{2^n})y \in X, \quad \text{dla } x, y \in X.$$

Definicja 5 Niech $(G, +)$ będzie jednoznacznie podzielną przez 2 grupą abelową, $X \subseteq G$. Mówimy, że punkt $p \in G$ należy do *relatywnego algebraicznego wnętrza* zbioru X (co zapisujemy $p \in ri(X)$), jeśli dla dowolnego $x \in X$ istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $p + \frac{1}{2^n}(p - x) \in X$.

Dysponując tymi pojęciami możemy sformułować kolejne twierdzenie o podpieraniu dla addytywnych rodzin operacji.

Twierdzenie 36 ((VI), Theorem 4.8) *Niech X będzie $\frac{1}{2}$-wypukłym podzbiorem jednoznacznie podzielnej przez dwa abelowej grupy $(G,+)$, niech $(Y,+,d)$ będzie abelową grupą metryczną z metryką zupełną, częściowo uporządkowaną relacją $\leqslant_S$ generowaną przez taką domkniętą i addytywnie-kontrolowaną półgrupę $S \subseteq Y$, że $0 \in S$. Ponadto załóżmy, że $n \geqslant 2$ oraz $a_1, \dots, a_n : G \to G$ i $A_1, \dots, A_n : Y \to Y$ są odwzorowaniami addytywnymi spełniającymi warunki:*

(i) *$a_i \circ a_j = a_j \circ a_i$ oraz $A_i \circ A_j = A_j \circ A_i$, dla dowolnych $i, j = 1, \dots, n$;*

(ii) *$a_1 + \cdots + a_n = id_G$ oraz $A_1 + \cdots + A_n = id_Y$;*

(iii) *$a_1(X) + \ldots + a_n(X) \subseteq X$;*

(iv) *A_i jest taką bijekcją, że $A_i(S) = S$ dla wszelkich $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Załóżmy, że $f : X \to Y$ dla wszelkich $x_1, \dots, x_n \in X$ spełnia nierówność:

$$f\Big(a_1(x_1) + \cdots + a_n(x_n)\Big) \leqslant_S A_1\Big(f(x_1)\Big) + \cdots + A_n\Big(f(x_n)\Big).$$

Wówczas dla dowolnego $p \in ri(X)$, istnieje taka funkcja $g : G \to Y$, że $g \leqslant_S f$, $g(p) = f(p)$ oraz

$$g\Big(a_1(x_1) + \cdots + a_n(x_n)\Big) = A_1\Big(g(x_1)\Big) + \cdots + A_n\Big(g(x_n)\Big), \quad dla\ x_1, \dots, x_n \in X.$$

Jako bezpośredni wniosek z powyższego twierdzenia (specyfikując odpowiednio odwzorowania addytywne i rozpatrując porządek generowany przez stożek Lorentza) otrzymujemy główny wynik z pracy (O7), od której rozpoczynaliśmy nasze, wspólne z Zsoltem Pálesem badania i która stanowiła ich główną motywację.

5. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

(a) Wykaz opublikowanych prac naukowych nie wchodzących w skład osiągnięcia wymienionego w punkcie 4:

(O1) A. Olbryś, *On the measurability and the Baire property of t-Wright convex functions*, Aequationes Math. 68 (2004), no. 1-2, 28-37.

(O2) A. Olbryś, *Some conditions implying the continuity of t-Wright convex functions*, Publ. Math. Debrecen 68 (2006), no. 3-4, 401-418.

(O3) A. Olbryś, *A characterization of $(t_1, \ldots, t_n)$-Wright affine functions*, Comment. Math. (Prace Mat.) 47 (2007), no. 1, 47-56.

(O4) A. Olbryś, *On the boundedness, Christensen measurability and continuity of t-Wright convex functions*, Acta Math. Hungar. 141 (2013), no. 1-2, 68-77.

(O5) M. Lewicki, A. Olbryś, *On non-symmetric t-convex functions*, Math. Inequal. Appl. 17 (2014), no. 1, 95-100.

(O6) A. Olbryś, *On some inequalities equivalent to the Wright-convexity*, J. Math. Inequal. 9 (2015), no. 2, 449–461.

(O7) A. Olbryś, *A support theorem for delta (s,t)-convex mappings*, Aequationes Math. 89 (2015), no. 3, 937–948.

(O8) A. Olbryś, *On delta Schur-convex mappings*, Publ. Math. Debrecen 86 (2015), no. 3-4, 313-323.

(O9) A. Olbryś, *On separation by h-convex functions*, Tatra Mt. Math. Publ. 62 (2015), 105-111.

(O10) A. Olbryś, *Representation theorems for h-convexity*, J. Math. Anal. Appl, 426 (2015), no. 2, 986–994.

(O11) A. Olbryś, T. Szostok, *Inequalities of the Hermite–Hadamard Type Involving Numerical Differentiation Formulas*, Results. Math. 67 (2015), no. 3-4, 403–416.

(O12) W. Fechner, A. Olbryś, *Systems of Inequalities Characterizing Ring Homomorphisms*, J. Funct. Spaces 2016, Art. ID 8069104, 5 pp.

(O13) A. Olbryś, *On the $\mathbb{K}$-Riemann integral and Hermite-Hadamard inequalities for $\mathbb{K}$-convex functions*, Aequationes Math. 91 (2017), no. 3, 429-444.

(O14) A. Olbryś, *On a problem of T. Szostok concerning the Hermite-Hadamard inequalities*, arXiv:1808.06524 [math.CA].

(b) Omówienie tematyki prac ujętych w punkcie 5(a)

Praca (O3) wchodziła w skład rozprawy doktorskiej. Podaję w niej charakteryzację funkcji t-afinicznych w sensie Wrighta wyższych rzędów. Praca ta uogólnia wyniki Lajki [72], który scharakteryzował funkcje t-afiniczne w sensie Wrighta określone na przedziale i o wartościach rzeczywistych. Wyniki Lajki zostały uogólnione w dwóch kierunkach. Po pierwsze podałem postać rozwiązań znacznie ogólniejszego równania funkcyjnego niż to rozważane przez Lajkó, po drugie rozpatrywane odwzorowania są określone i przyjmują wartości w abstrakcyjnych strukturach.

Prace (O1), (O2), (O4) dotyczą problemu ciągłości funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta. W teorii równań i nierówności funkcyjnych jednym z ważniejszych nurtów badań jest problem "poprawy regularności" rozwiązań. Chodzi o wykazanie, że funkcja spełniająca dane równanie bądź nierówność funkcyjną pod możliwie słabymi założeniami regularnościowymi posiada wyższą regularność. Najbardziej znanym wynikiem dotyczącym tego zagadnienia jest twierdzenie dowiedzione przez Bernsteina i Doetscha [14] w 1915 roku, które orzeka, że każda funkcja wypukła w sensie Jensena i ograniczona z góry na niepustym przedziale otwartym jest wypukła, więc w szczególności ciągła w każdym punkcie wewnętrznym dziedziny. Z kolei twierdzenie Sierpińskiego [110] mówi, że każda mierzalna w sensie Lebesgue'a funkcja wypukła w sensie Jensena jest wypukła. Znanych jest wiele uogólnień przytoczonych twierdzeń zobacz np. [34], [42], [62], [71], [80]. Prace (O1) i (O2) wchodziły w skład rozprawy doktorskiej.

W pracy (O1) rozpatrywałem funkcje t-wypukłe w sensie Wrighta określone na przedziale. Dowiodłem, że zarówno mierzalność w sensie Lebesgue'a jak i Baire'a implikuje ciągłość takich funkcji. W pracy (O2) pokazałem, że każda funkcja t-wypukła w sensie Wrighta, ciągła w co najmniej jednym punkcie otwartego i wypukłego podzbioru rzeczywistej przestrzeni liniowo-topologicznej jest ciągła w dowolnym punkcie. Jest to przeniesienie analogicznego wyniku Kominka, dowiedzionego w pracy [61] dla funkcji określonych na przedziale. Główny wynik pracy (O2) orzeka, że dowolna funkcja t-wypukła w sensie Wrighta, której zacieśnienie do zbioru dużego w sensie miary lub kategorii jest półciągłe z dołu jest wypukła i ciągła.

Praca (O4) składa się z dwóch części. W pierwszej części omawiam związek lokalnej ograniczoności funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta z ciągłością. Wiadomo, że jednostronna ograniczoność z góry lub z dołu (nawet globalna) nie implikują ciągłości tych funkcji. Naturalne jest więc pytanie o odpowiednią wersję twierdzenia Bernsteina-Doetscha dla obustronnej ograniczoności. Poniższe twierdzenie jest głównym wynikiem pierwszej części tej pracy.

Twierdzenie 37 ((O4), Theorem 5) *Niech D będzie wypukłym i otwartm podzbiorem rzeczywistej przestrzeni liniowo-topologicznej, $f : D \to \mathbb{R}$ funkcją t-wypukłą w sensie Wrighta. Jeżeli f jest ograniczona w otoczeniu pewnego punktu, to jest wypukła i ciągła.*

Twierdzenie to dostarcza motywacji do badania następującej klasy zbiorów:

$$\begin{aligned} C_t(D) := \{\, T \subseteq D \mid & \text{ każda ograniczona na zbiorze } T \text{ funkcja t-wypukła} \\ & \text{w sensie Wrighta } f : D \to \mathbb{R} \text{ jest ciągła.}\} \end{aligned}$$

W pracy pokazałem, że do klasy $C_t(D)$ należą "mniejsze" zbiory (w sensie miary i kategorii) niż zbiory o niepustym wnętrzu. Analogiczna klasa zbiorów dla funkcji wypukłych w sensie Jensena została wprowadzona przez Gera i Kuczmę w pracy [42]. Wiele faktów dotyczących tego pojęcia można znaleźć w monografii [71].

W drugiej części pracy wykazałem, że także mierzalność w sensie Christensena implikuje wypukłość i ciągłość funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta. Analogiczny wynik dla funkcji wypukłych w sensie Jensena ($t = \frac{1}{2}$) otrzymali P. Fischer i Z. Słodkowski w [34].

Praca (O5) wspólna z Michałem Lewickim dotyczy funkcji niesymetrycznie t-wypukłych. Definicję tych funkcji zaproponował Páles, modyfikując definicję funkcji t-wypukłych w następujący sposób:

Definicja 6 Niech $t \in (0,1)$ będzie ustaloną liczbą. Mówimy, że funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest *niesymetrycznie t-wypukła* (gdzie $I \subseteq \mathbb{R}$ jest przedziałem), jeżeli

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) \quad \text{dla takich } x, y \in I, \text{ że } x < y.$$

Ponieważ każda funkcja t-wypukła jest funkcją wypukłą w sensie Jensena, więc naturalne jest pytanie, czy tę własność mają też funkcje niesymetrycznie t-wypukłe. Problem ten ustnie zgłosił Páles podczas jednej z konferencji naukowych z serii ISFE. W omawianej pracy pokazaliśmy, że każda funkcja niesymetrycznie t-afiniczna, tzn. rozwiązanie odpowiedniego równania funkcyjnego, jest t-afiniczna, czyli spełnia to równanie dla wszelkich $x, y \in I$. W szczególności spełnia to równanie przy $t = \frac{1}{2}$.

Z drugiej strony, podaliśmy negatywne rozwiązanie problemu Pálesa, konstruując dwa przykłady. Pierwszy, to przykład funkcji niesymetrycznie t-wypukłej, która jest istotnie niesymetrycznie t-wklęsła, a drugi funkcji niesymetrycznie t-wypukłej, która jest wklęsła w sensie Jensena. Przykłady te pokazują przy okazji, że funkcje niesymetrycznie t-wypukłe nie mają w dowolnym punkcie niesymetrycznie t-afinicznych podpórek.

W pracy (O6) badam funkcje wypukłe w sensie Wrighta. Podaję w niej szereg charakteryzacji tych funkcji. Okazuje się, że funkcje te można opisać przy użyciu drugiej pochodnej symetrycznej. Pokazałem, że wypukłość w sensie Wrighta funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ jest równoważna klasycznej wypukłości funkcji:

$$[0,1] \ni t \longrightarrow f(tx + (1-t)y) + f((1-t)x + ty),$$

dla wszelkich $x, y \in D$ oraz funkcji:

$$D_y \ni x \longrightarrow f(x) + f(2y - x),$$

dla wszelkich $y \in D$, gdzie $D_y = D \cap (2y - D)$, a D jest zbiorem wypukłym. Stosując powyższe charakteryzacje otrzymałem, bez żadnych dodatkowych założeń, odpowiednie wersje nierówności Hermita-Hadamarda. Znane do tego czasu wyniki dotyczace nierówności Hermita-Hadamarda dla funkcji wypukłych w sensie Wrighta odnajdujemy w pracach ([28], [49], [117]), jednak ich autorzy zakładają mierzalność rozpatrywanych funkcji, co w istocie implikuje ich ciągłość oraz wypukłość i prowadzi do znanych, klasycznych nierówności Hermita-Hadamarda.

Praca (O7) dotyczy tzw. odwzorowań delta (s,t)-wypukłych. Podaję w niej wspólne uogólnienie odwzorowań delta-wypukłych wprowadzonych przez Vesely'ego i Zajička w [120] oraz funkcji (s,t)-wypukłych wprowadzonych przez Kuhna w pracy [70]. Załóżmy, że $s,t \in (0,1)$ są ustalonymi liczbami, natomiast X, Y rzeczywistymi przestrzeniami Banacha.

Definicja 7 Niech $D \subseteq X$ będzie zbiorem wypukłym. Mówimy, że odwzorowanie $F : D \to Y$ jest *delta (s,t)-wypukłe* z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$, jeżeli dla wszelkich $x, y \in D$ spełniona jest nierówność:

$$\begin{aligned}\|tF(x) + (1-t)F(y) - &F(sx + (1-s)y)\| \\ &\leqslant tf(x) + (1-t)f(y) - f(sx + (1-s)y).\end{aligned}$$

W przypadku, gdy $s = t$, mówimy, że F jest *delta t-wypukła* z kontrolną funkcją f; jeżeli $t = \frac{1}{2}$, to F nazywamy *delta-wypukłą w sensie Jensena* z kontrolną funkcją f.

Stosując identyczność Daróczy'ego-Pálesa [29] pokazałem, że każde odwzorowanie delta (s,t)-wypukłe musi być delta wypukłe w sensie Jensena. W szczególności każde odwzorowanie delta t-wypukłe jest delta wypukłe w sensie Jensena, a stąd możemy wywnioskować, że w klasie funkcji ciągłych pojęcie delta wypukłości i delta t-wypukłości są równoważne. W przypadku, gdy $t = \frac{1}{2}$ twierdzenie to zostało wykazane przez Vesely'ego i Zajička w pracy [120]. Głównym wynikiem pracy (O7) jest następujące twierdzenie o podpieraniu dla odwzorowań delta (s,t)-wypukłych:

Twierdzenie 38 ((O7), Theorem 4) *Niech $D \subseteq X$ będzie zbiorem otwartym i wypukłym, $F : D \to Y$ odwzorowaniem delta (s,t)-wypukłym z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$. Wówczas dla dowolnego punktu $y \in D$ istnieją takie odwzorowania (s,t)-afiniczne $A_y : D \to Y$ oraz $a_y : D \to \mathbb{R}$, że*

$$\|F(x) - A_y(x)\| \leqslant f(x) - a_y(x) \quad \textit{dla } x \in D$$

oraz

$$A_y(y) = F(y), \quad a_y(y) = f(y).$$

Okazuje się, że istnienie (s,t)-afinicznej funkcji podpierającej w dowolnym punkcie charakteryzuje odwzorowania delta (s,t)-wypukłe.

Praca (O8) została poświęcona odwzorowaniom delta wypukłym w sensie Schura. Przenoszę w niej definicję półporządku na produkt kartezjański dowolnych rzeczywistych przestrzeni liniowych oraz wprowadzam wspólne uogólnienie odwzorowań delta-wypukłych i wypukłych w sensie Schura.

Definicja 8 Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową. Powiemy, że wektor $x = (x_1, ..., x_n) \in X^n$ jest *majoryzowany* przez wektor $y = (y_1, ..., y_n) \in X^n$, co zapisujemy $x \prec y$, jeżeli istnieje taka macierz podwójnie stochastyczna $S \in \mathbb{R}^n_n$, że

$$(x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n)S.$$

Wspólne uogólnienie pojęcia odwzorowań wypukłych w sensie Schura i odwzorowań delta-wypukłych podaje następująca definicja.

Definicja 9 Niech X oraz Y będą rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi, $D \subseteq X$ zbiorem wypukłym. Mówimy, że odwzorowanie $F : D^n \to Y$ jest *delta wypukłe w sensie Schura* z kontrolną funkcją $f : D^n \to \mathbb{R}$, jeżeli dla wszelkich $x, y \in D^n$ mamy

$$x \prec y \Longrightarrow \|F(x) - F(y)\| \leqslant f(y) - f(x).$$

Łatwo sprawdzić, że w przypadku, gdy $Y = \mathbb{R}$ odwzorowanie jest delta wypukłe w sensie Schura wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnicą dwóch funkcji wypukłych w sensie Schura. W tym przypadku funkcje delta wypukłe w sensie Schura tworzą najmniejszą podprzestrzeń liniową zawierająca stożek wszystkich funkcji wypukłych w sensie Schura. Pojęcie to jest więc naturalnym uogólnieniem na przypadek odwzorowań o wartościach wektorowych funkcji, które są różnicą dwóch funkcji wypukłych w sensie Schura. Celem pracy było uogólnienie wyniku Ng [81], czyli podanie charakteryzacji odwzorowań delta wypukłych w sensie Schura postaci: $H(x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^n F(x_j)$. Korzystając z twierdzenia o podpieraniu ((O7), Theorem 1) dowodzę następującego odpowiednika twierdzenia Ng (Twierdzenie 1, str. 4)

Twierdzenie 39 ((O8), Theorem 5) *Niech X oraz Y będą rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, $D \subseteq X$ zbiorem otwartym i wypukłym. Niech ponadto $F : D \to Y$, $f : D \to \mathbb{R}$ oraz $G(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n F(x_j)$, $g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n f(x_j)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) *odwzorowanie G jest delta wypukłe w sensie Schura z funkcją kontrolną g, dla pewnego $n \geqslant 2$;*

(ii) *odwzorowanie G jest delta wypukłe w sensie Schura z funkcją kontrolną g, dla dowolnego $n \geqslant 2$;*

(iii) *F jest delta wypukła w sensie Wrighta z kontrolną funkcją f, tzn.*

$$\begin{aligned}\|F(x) + F(y) - F(tx + (1-t)y) - F((1-t)x + ty)\| \\ \leqslant f(x) + f(y) - f(tx + (1-t)y) - f((1-t)x + ty)\end{aligned}$$

dla wszelkich $x, y \in D$, $t \in [0, 1]$;

(iv) *F jest postaci*

$$F(x) = W(x) + A(x), \quad x \in D,$$

gdzie $W : D \to Y$ *jest odwzorowaniem delta-wypukłym, a* $A : X \to Y$ *funkcją addytywną.*

Ostatnie twierdzenie pracy uogólnia twierdzenie Ng na przypadek odwzorowań o wartościach wektorowych dla ogólniejszych sum postaci $\sum_{j=1}^{n} F_j(x_j)$:

Twierdzenie 40 ((O8), Theorem 6) *Załóżmy, że* X *oraz* Y *są rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, a* $D \subseteq X$ *zbiorem otwartym i wypukłym. Jeżeli* $F_j : D \to Y$ *oraz* $f_j : D \to \mathbb{R}$ *dla* $j = 1, ..., n$, *to odwzorowanie* $G(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x_j)$ *jest delta wypukłe w sensie Schura z kontrolną funkcją* $g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie stałe* $C_1, ..., C_n \in Y$, *funkcja addytywna* $A : X \to Y$ *oraz odwzorowanie delta-wypukłe* $W : D \to Y$, *że*

$$F_j(x) = A(x) + W(x) + C_j \quad \text{dla } j = 1, ..., n \text{ oraz } x \in D.$$

Prace (O9), (O10) dotyczą funkcji h-wypukłych. Definicję tych funkcji wprowadziła S. Varošanec w pracy [118].

Definicja 10 Niech D będzie wypukłym podzbiorem rzeczywistej przestrzeni liniowej, $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Powiemy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest *h-wypukła*, jeżeli:

$$f(tx + (1 - t)y) \leqslant h(t)f(x) + h(1 - t)f(y) \quad \text{dla } x, y \in D, \ t \in [0, 1].$$

Szczególnymi przypadkami funkcji h-wypukłych są funkcje wypukłe ($h(t) = t$), s-wypukłe w sensie Brecknera ($h(t) = s^t$) [21], tzw. funkcje Godunovej-Levina ($h(t) = \frac{1}{t}$, dla $t \in (0, 1)$) [43] i P-funkcje ($h(t) = 1$) [94].

W pracy (O9) podaję warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwie funkcje można było przedzielić funkcją h-wypukłą, dla multiplikatywnej funkcji h. Twierdzenie to uogólnia na przestrzenie nieskończenie wymiarowe twierdzenie Barona-Matkowskiego-Nikodema [13], które podaje warunki konieczne i wystarczające dla oddzielania funkcjonałem wypukłym.

W pracy (O10) badam funkcje h-wypukłe zakładając, że

$$h(t) + h(1 - t) = 1 \quad \text{dla } t \in [0, 1]. \tag{5}$$

Jeżeli powyższy warunek jest spełniony, to funkcja h-wypukła może przyjmować dowolne wartości, w przeciwnym razie przyjmuje wartości stale nieujemne lub stale niedodatnie. Głównym wynikiem pracy (O10) jest następująca charakteryzacja funkcji h-wypukłych w przypadku (5):

Twierdzenie 41 ((O10), Theorem 5) *Niech D będzie algebraicznie otwartym podzbiorem rzeczywistej przestrzeni liniowej i niech funkcja $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ spełnia warunek* (5). *Wówczas $f : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją h-wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją stałą lub $h(t) = t,\ t \in [0,1]$. W szczególności f jest funkcją wypukłą.*

Wspólna z Tomaszem Szostokiem praca (O11) poświęcona została nowej metodzie dowodzenia nierówności dla funkcji wypukłych przy użyciu twierdzenia Levina-Stečkina [73], które podaje warunki konieczne i wystarczające na to, aby dla dowolnej funkcji wypukłej i ciągłej $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spełniona była nierówność:

$$\int_a^b f(x)dF_1(x) \leqslant \int_a^b f(x)dF_2(x),$$

gdzie $F_1, F_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ są funkcjami o wahaniu skończonym. Wiele klasycznych nierówności spełnionych przez funkcje wypukłe można bardzo łatwo uzyskać specyfikując funkcje F_1 oraz F_2 w twierdzeniu Levina-Stečkina. W szczególności nierówności Hermita-Hadamarda, które można zapisać w postaci

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

gdzie $F' = f$. W pracy otrzymujemy ogólniejsze nierówności, zastępując środkowe wyrażenie $\frac{F(y)-F(x)}{y-x}$ wyrażeniami różniczkowania numerycznego postaci

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i F(\alpha_i x + (1-\alpha_i)y)}{y-x},$$

gdzie $\sum_{i=1}^n a_i = 0$.

Praca (O12) wspólna z Włodzimierzem Fechnerem dotyczy charakteryzacji homomorfizmu pierścieni poprzez układy nierówności funkcyjnych. Pierwszy wynik tego typu pochodzi od M. Rădulescu [98]. Załóżmy, że X jest zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa, a $C(X)$ przestrzenią wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych określonych na X wyposażoną w normę supremum. Rădulescu w pracy [98] pokazał, że jeśli operator $T : C(X) \to C(X)$ spełnia układ nierówności:

$$\begin{cases} T(f+g) \geqslant T(f) + T(g) \\ T(f \cdot g) \geqslant T(f) \cdot T(g) \end{cases} \tag{6}$$

dla wszystkich $f, g \in C(X)$, to istnieje zbiór otwarto-domknięty $B \subseteq X$ i taka funkcja ciągła $\phi : X \to X$, że

$$T(f) = \chi_B \cdot f \circ \phi,$$

gdzie χ_B oznacza funkcję charakterystyczną zbioru B. W szczególności operator T jest liniowy, multyplikatywny i ciągły. Z. Ercan w pracy [31] pokazał, że założenie, że X jest zwartą przestrzenią Hausdorffa można opuścić. Układ (6) był intensywnie badany przez następujących autorów: J. X. Chen, Z. L. Chen [25], J. Dhombres [30], W. Fechner [32, 33], I. Gusić [44] oraz Volkmann [123, 124].

W omawianej pracy rozpatrywaliśmy ogólniejsze układy nierówności dla operatorów określonych na pierścieniach i przyjmujących wartości w pierścieniach uporządkowanych. Pokazaliśmy, pod pewnymi, technicznymi założeniami dotyczącymi pierścieni, że operatory $U, T : \mathcal{P} \to \mathcal{R}$, spełniają układ

$$\begin{cases} T(f+g) \geqslant T(f) + T(g) \\ U(f \cdot g) \geqslant U(f) \cdot U(g) \end{cases}$$

oraz nierówność $U \leqslant T$, dla wszelkich $f, g \in \mathcal{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U = T$ jest homomorfizmem pierścieni.

Kolejny wynik tego typu mówi, że jeśli dodatkowo $1 \in \mathcal{P}$, to operatory $T, U : \mathcal{P} \to \mathcal{R}$ spełniają układ:

$$\begin{cases} T(f+g) \geqslant U(f) + T(g) \\ U(f \cdot g) \geqslant T(f) \cdot T(g) \end{cases}$$

dla wszelkich $f, g \in \mathcal{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U = T$ jest homomorfizmem pierścieni.

Jako zastosowanie twierdzeń tego typu podajemy warunki wystarczające na to, aby dwa operatory $T, U : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$ (gdzie $\mathcal{B}(X)$ jest pierścieniem funkcji ograniczonych określonych na zwartej przestrzeni Hausdorffa X) można było przedzielić operatorem addytywno-multiplikatywnym.

Celem pracy (O13) było wykazanie odpowiednika nierówności Hermita-Hadamarda dla funkcji wypukłych w sensie Jensena. Ponieważ jednak funkcje te mogą być bardzo nieregularne (np. nieciągłe w każdym punkcie, niemierzalne, więc w szczególności niecałkowalne) zaszła konieczność uogólnienia pojęcia całki Riemanna na szerszą klasę odwzorowań.

Dla podciała $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ definiujemy $\mathbb{K}$-przedział domknięty o rzeczywistych końcach a i b ($a \leqslant b$) jako

$$[a, b]_{\mathbb{K}} := \{\alpha a + (1-\alpha)b : \ \alpha \in [0, 1] \cap \mathbb{K}\}.$$

Następnie dla ustalonej funkcji $f : [a, b]_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R}$ definiujemy dolne i górne sumy Darboux, dolną i górną całkę jak dla klasycznej całki Riemanna zacieśnionej do zbioru $[a, b]_{\mathbb{K}}$. Jeżeli całka dolna i górna są sobie równe, to mówimy, że f jest $\mathbb{K}$-*całkowalna w sensie Riemanna* i wspólną wartość oznaczamy symbolem:

$$\int_a^b f(x) d_{\mathbb{K}} x.$$

Oczywiście, jeżeli $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2$, to każda funkcja $\mathbb{K}_2$-całkowalna w sensie Riemanna jest także $\mathbb{K}_1$-całkowalna w sensie Riemanna, ale nie na odwrót. W szczególności każda funkcja całkowalna w sensie Riemanna w klasycznym sensie jest $\mathbb{K}$-całkowalna w sensie Riemanna dla dowolnego ciała $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ i całki te są sobie równe. Pojęcie to istotnie uogólnia klasyczną całkę Riemanna. W pracy dowodzę szeregu własności $\mathbb{K}$-całki Riemanna, omawiam związek z tzw. $\mathbb{K}$-pochodną wprowadzoną przez Borosa i Pálesa w pracy [20] oraz podaję klasy funkcji całkowalnych w uogólnionym sensie. Okazuje się, że każda funkcja $\mathbb{K}$-wypukła $f : I \to \mathbb{R}$, tj. spełniająca nierówność:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \quad \text{dla } x, y \in I, \text{ oraz } \alpha \in [0,1] \cap \mathbb{K},$$

jest $\mathbb{K}$-całkowalna w sensie Riemanna na dowolnym przedziale $[a,b]_{\mathbb{K}} \subseteq I$. W szczególności każda funkcja $\mathbb{K}$-liniowa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tzn. addytywna i $\mathbb{K}$-jednorodna ma tę własność, a ponadto,

$$\int_a^b g(x) d_{\mathbb{K}} x = g\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a).$$

Główny wynik pracy orzeka, że jeżeli $f : I \to \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą w sensie Jensena, to dla dowolnych $a, b \in I$, $a < b$, f jest $\mathbb{Q}$-całkowalna w sensie Riemanna na zbiorze $[a,b]_{\mathbb{Q}}$, a ponadto

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) d_{\mathbb{Q}} x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Pojęcie uogólnionej całki Riemanna okazało się bardzo użytecznym narzędziem. Wykorzystałem je także w pracy (O14). W pracy tej podałem rozwiązanie problemu Tomasza Szostoka [112], który pytał o ogólną postać rozwiązań $f, F : (a,b) \to \mathbb{R}$ układu nierówności:

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \text{dla } x, y \in (a,b),\ x \neq y. \tag{7}$$

Następujące twierdzenie daje odpowiedź na pytanie Szostoka:

Twierdzenie 42 ((O14), Theorem 1) *Funkcje $F, f : (a,b) \to \mathbb{R}$ spełniają układ nierówności* (7) *wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją wypukłą, a F jest funkcją pierwotną dla f, tzn. $F' = f$.*

Powyższy wynik może być rozumiany jako regularnościowy fenomen. Rozwiązania f, F układu nierówności (7) bez żadnych dodatkowych założeń są odpowiednio ciągłe i różniczkowalne. W literaturze znanych jest kilka analogicznych wyników dla równań i nierówności funkcyjnych. Zjawisko to jest bardzo rzadkie dla rozwiązań nierówności funkcyjnych. Jak wiadomo, nierówność definiująca wypukłość, dla funkcji określonych na otwartym i wypukłym podzbiorze przestrzeni skończenie wymiarowej ma tylko ciągłe rozwiązania (zobacz np. [83], [103]). Ten sam efekt otrzymali autorzy we wspomnianych wcześniej pracach [31], [98] dla układu nierówności funkcyjnych charakteryzujące homomorfizmy pierścieni. Charakteryzację funkcji spełniających tzw.

nierówność Shannona podali J. Aczél i A. M. Ostrowski w pracy [4] (zobacz także [3], str. 116). Pokazali oni, że funkcja $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ spełnia nierówność funkcyjną

$$\sum_{k=1}^{n} p_k h(p_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k h(q_k),$$

dla wszelkich takich $p_1, \dots, p_n;\ q_1, \dots, q_n \in (0,1)$, że $\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} q_k = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie stałe $b, c \in \mathbb{R},\ c \leqslant 0$, że

$$h(p) = c \log p + b \quad \text{dla } p \in (0,1).$$

W przypadku równań funkcyjnych zjawisko regularności rozwiązań jest charakterystyczne dla równań pochodzących od twierdzeń o wartości średniej. W 1985 Aczél [1] dowiódł, że funkcje $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają równanie funkcyjne

$$F(y) - F(x) = (y-x) f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $F(x) = cx^2$ oraz $f(x) = 2cx$. Wyniki tego typu można znaleźć także w pracach [47], [54], [59], [60], [100], [108] oraz monografii [99].

Literatura

[1] J. Aczél, *A mean value property of the derivative of quadratic polynomials-without mean values and derivatives*, Math. Mag. 58 (1985), no. 1, 42-45.

[2] J. Aczél, J. Dhombres, *Functional Equations in Several Variables. With applications to mathematics, information theory and to the natural and social sciences*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 31, Cambridge University Press, 1989.

[3] J. Aczél, Z. Daróczy, *On measures of information and their characterizations,*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 115. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.

[4] J. Aczél, A. M. Ostrowski, *On the characterization of Shannon's entropy by Shannon's inequality*, J. Austral. Math. Soc. 16 (1973), 368-374.

[5] C. D. Aliprantis, R. Tourky, *Cones and Duality*, Graduate Studies in Mathematics, 84. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[6] C. Alsina, J. Sikorska, M. Santos Tõmas, *Norm derivatives and characterizations of inner product spaces*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2010.

[7] D. Amir, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Operator Theory: Advances and Applications Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

[8] B. Anger, J. Lembcke, *Hahn-Banach type theorems for hypolinear functionals on preordered topological vector spaces*, Pacific J. Math., 54 (1974), 13-33.

[9] B.C. Arnold, A.W. Marshall, I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Scond Edition. Springer Series in Statistics. Sringer, New York, 2011 (Second Edition).

[10] A. Azócar, J. Giménez, K. Nikodem, J. L. Sánchez, *On strongly midconvex functions*, Opuscula Math. 31 (2011), 15-26.

[11] R. Badora, *On the Hahn-Banach theorem for groups*, Arch. Math. (Basel) 86 (2006), no. 6, 517-528.

[12] M. Balaj, *Sandwich theorems*, An. Univ. Oradea Fasc. Mat. 8 (2001), 15-20.

[13] K. Baron, J. Matkowski, K. Nikodem, *A sandwich with convexity*, Math. Pannon. 5 (1994), no. 1, 139-144.

[14] F. Bernstein and G. Doetsch, *Zur Theorie der konvexen Funktionen*, Math. Ann. 76 (1915), no. 4, 514-526.

[15] E. Berz, *Sublinear functions on* $\mathbb{R}$, Aequationes Math. 12 (1975), no. 2/3, 200-206.

[16] G. Birkhoff, *Lattice theory*, Third Edition. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXV American Mathematical Society, Providence, R.I. 1967.

[17] E. Bishop, R.R. Phelps, *The support functionals of a convex set*, 1963 Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VII pp. 27–35 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[18] W. E. Bonnice, R. J. Silverman, *The Hahn-Banach theorem for finite dimensional spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 121 (1966), 210-222.

[19] W. E. Bonnice, R. J. Silverman, *The Hahn-Banach extension and the least upper bound properties are equivalent*, Proc. Amer. Math. Soc., 18, (1967), 843-849.

[20] Z. Boros, Zs. Páles, $\mathbb{Q}$*-subdifferential of Jensen-convex functions*, J. Math. Anal. Appl. 321 (2006), no.1, 99-113.

[21] W. W. Breckner, *Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), 23(37) (1978), 13-20.

[22] G. Buskes, *The Hahn-Banach Theorem surveyed*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 327 (1993), 49 pp.

[23] F. Cabello Sánchez, J. M. F. Castillo, *Banach space techniques underpinning a theory of nearly additive mappings*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 404, 4 (2002),73 pp.

[24] A. Chaljub-Simon, P. Volkmann, *Bemerkungen zu einem Satz von Rodé*, Arch. Math. (Basel) 57 (1991), no. 2, 180-188.

[25] J. X. Chen, Z. L. Chen, *On supra-additive and supra-multiplicative maps*, J. Funct. Spaces Appl. 2013, Art ID 108535, 3 pp.

[26] J. P. R. Christensen, *On sets of Haar measure zero in abelian Polish groups*, Proceedings of the International Symposium on Partial Differential Equations and the Geometry of Normed Linear Spaces (Jerusalem, 1972). Israel J. Math. 13 (1972), 255-260.

[27] J. P. R. Christensen, *Topology and Borel structure. Descriptive topology and set theory with applications to functional analysis and measure theory*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1974.

[28] V. Ciobotariu-Boer, *Hermite-Hadamard and Fejér Inequalities for Wright-convex functions*, Octogon Math. Magazine 17 (2009), no. 1, 53-69.

[29] Z. Daróczy, Zs. Páles, *Convexity with given infinite weight sequences*, Stochastica 11 (1987), no. 1, 5-12.

[30] J. Dhombres, *Sur les fonctions simultanement suradditives et surmultiplicatives*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 5 (1983), no. 5, 207–210.

[31] Z. Ercan, *A remark on supra-additive and supra-multiplicative operators on* $C(X)$, Math. Bohem. 132 (2007), no. 1, 55–58.

[32] W. Fechner, *Inequalities characterizing linear-multiplicative functionals*, J. Funct. Spaces 2015, Art. ID 945758, 3 pp.

[33] W. Fechner, *Inequalities connected with averaging operators. Part II*, Indag. Math. (N.S.) 26 (2015), no. 1, 40–49.

[34] P. Fischer and Z. Słodkowski, *Christensen zero sets and measurable convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), no. 3, 449-453.

[35] B. Fuchssteiner, *Sandwich theorems and lattice semigroups*, J. Functional Analysis 16 (1974), 1-14.

[36] B. Fuchssteiner and W. Lusky, *Convex cones*, North-Holland Mathematics Studies, 56. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 82. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981.

[37] Z. Gajda, Z. Kominek, *On separations theorems for subadditive and superadditive functionals*, Studia Math. 100 (1991), no. 1, 25-38.

[38] Z. Gajda, A. Smajdor, and W. Smajdor, *A theorem of the Hahn-Banach type and its applications*, Ann. Polon. Math. 57 (1992), no. 3, 243-252.

[39] R. Ger, *Homogeneity sets for Jensen-convex functions*, General inequalities, 2 (Proc. Second Internat. Conf., Oberwolfach, 1978), pp. 193–201, Birkhäuser, Basel-Boston, Mass., 1980.

[40] R. Ger, *On functional inequalities stemming from stability questions*, General inequalities, 6 (Oberwolfach, 1990), 227–240, Internat. Ser. Numer. Math., 103, Birkhäuser, Basel, 1992.

[41] R. Ger, *Stability aspects of delta-convexity*, Stability of mappings of Hyers-Ulam type, 99–109, Hadronic Press Collect. Orig. Artic., Hadronic Press, Palm Harbor, FL, 1994.

[42] R. Ger, M. Kuczma, *On the boundedness and continuity of convex functions and additive functions*, Aequationes Math. 4 (1970), 157-162.

[43] E. K. Godunowa and V. I. Levin, *Inequalities for functions of a broad class that contains convex, monotone and some other forms of functions (Russian)*, Numerical mathematics and mathematical physics (Russian), 138–142, 166, Moskov. Gos. Ped. Inst., Moscow, 1985.

[44] I. Gusić, *A note on certain maps between ordered fields*, J. Math. Inequal. 3 (2009), no. 4, 657–661.

[45] J. Hadamard, *Étude sur les properiétés entiéres et en particulier dúne fonction considerée par Riemann*, J. Math. Pures Appl. 58 (1893), 171-215.

[46] G. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, Reprint of the 1952 edition. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. xii+324 pp.

[47] Sh. Haruki, *A property of quadratic polynomials*, Amer. Math. Monthly 86 (1979), no. 7, 577-579.

[48] Ch. Hermite, *Sur deux limites dúne intégrale définie*, Mathesis 3 (1883), 82.

[49] Ho, Ming-In, *Fejér inequalities for Wright-convex functions*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 8 (2007), no. 1, Article 9, 9 pp.

[50] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 27 (1941), 222-224.

[51] D. H. Hyers, S. M. Ulam, *Approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 3, (1952) 821-828.

[52] D. H. Hyers, G. Isac, Th. M. Rassias, *Stability of Functional Equations in Several Variables*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 34. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998.

[53] A. D. Ioffe, *A new proof of the equivalence of the Hahn-Banach extension and the least upper bound properties*, Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), no. 3, 385-389.

[54] M. S. Jacobson, Pl. Kannappan and P. K. Sahoo, *A characterization of low degree polynomials*, Demonstratio Math. 28 (1995), no. 1, 87-96.

[55] G. Jameson, *Ordered linear spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 141. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[56] P. Jordan, J. v. Neumann, *On inner products in linear metric spaces*, Ann. of Math. (2) 36 (1935), no. 3, 719-723.

[57] S. Kakutani, *Ein Beweis des Sätzes von Edelheit über konvexe Mengen (German)*, Proc. Imp. Acad. 13 (1937), no. 4, 93-94.

[58] R. Kaufman, *Interpolation of additive functionals*, Studia Math. 27 (1966), 269-272.

[59] B. Koclęga-Kulpa, T. Szostok, *On a class of equations stemming from various quadrature rules*, Acta Math. Hungar. 130 (2011), no. 4, 340-348.

[60] B. Koclęga-Kulpa, T. Szostok, Sz. Wąsowicz, *Some functional equations characterizing polynomials*, Tatra. Mt. Math. Publ. 44 (2009), 27–40.

[61] Z. Kominek, *A continuity result on t-Wright convex functions*, Publ. Math. Debrecen 63 (2003), no. 1-2, 213-219.

[62] Z. Kominek, *Convex Functions in Linear Spaces. With Polish and Russian summaries*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach [Scientific Publications of the University of Silesia], 1087. Uniwersytet Śląski, Katowice, 1989.

[63] Z. Kominek, *On (a,b)-convex functions*, Arch. Math. (Basel) 58 (1992), no. 1, 64-69.

[64] Z. Kominek, *On additive and convex functionals*, Rad. Mat. 3 (1987), no. 2, 267–279.

[65] Z. Kominek, *On a problem of K. Nikodem*, Arch. Math. (Basel) 50 (1988), no. 3, 287–288.

[66] Z. Kominek, *On some property of $\mathcal{J}$-convex functions*, Rad. Mat. 3 (1987), no. 1, 143-147.

[67] H. König, *On the abstract Hahn-Banach theorem due to Rodé*, Aequationes Math. 34 (1987), no. 1, 89-95.

[68] P. Kranz, *Additive functionals on abelian semigroup*, Comment. Math. Prace Mat. 16 (1972), 239-246.

[69] N. Kuhn, *A note on t-convex functions*, General inequalities, 4 (Oberwolfach, 1983), 269–276, Internat. Schriftenreihe Numer. Math., 71, Birkhäuser, Basel, 1984.

[70] N. Kuhn, *On the structure of (s,t)-convex functions*, General inequalities, 5 (Oberwolfach, 1986), 161–174, Internat. Schriftenreihe Numer. Math., 80, Birkhäuser, Basel, 1987.

[71] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2009.

[72] K. Lajkó, *On a functional equation of Alsina and Garcia-Roig*, Publ. Math. Debrecen 52 (1998), no. 3-4, 507-515.

[73] V. I. Levin, S. B. Stečkin, *Inequalities*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 14 (1960), 1-29.

[74] Gy. Maksa, K. Nikodem, Zs. Páles, *Result on t-Wright convexity*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 13 (1991), no. 6, 274-278.

[75] Gy. Maksa, Zs. Páles, *Decomposition of higher-order Wright-convex functions*, J. Math. Anal. Appl. 359 (2009), no. 2, 439-443.

[76] J. Matkowski, *On a-Wright convexity and the converse of Minkowki's inequality*, Aequationes Math., 43 (1992), no. 2-3, 106-112.

[77] J. Matkowski, M. Pycia, *On* (α, a)*-convex functions*, Arch. Math. (Basel) 64 (1995), no. 2, 132-138.

[78] J. Matkowski, M. Wróbel, *A generalized a-Wright convexity and related functional equation*, Ann. Math. Sil. No. 10 (1996), 7–12.

[79] S. Mazur, W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires II*, Studia Math. 13 (1953), 137–179.

[80] M. R. Mehdi, *On convex functions*, J. London Math. Soc. 39 (1964), 321-326.

[81] C. T. Ng, *Functions generating Schur-convex sums*, General inequalities, 5 (Oberwolfach, 1986), 433–438, Internat. Schriftenreihe Numer. Math., 80, Birkhäuser, Basel, 1987.

[82] C. T. Ng, *On midconvex functions majorized by midpoint concave bounds*, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988), no. 3, 538-540.

[83] C. P. Niculescu, L. E. Persson, *Convex Functions and their Applications. A contemporary approach*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 23. Springer, New York, 2006.

[84] K. Nikodem, *Midpoint convex functions majorized by midpoint concave functions*, Aequationes Math. 32 (1987), no. 1, 45-51.

[85] K. Nikodem, *On some class of midconvex functions*, Ann. Polon. Math. 50 (1989), no. 2, 145-151.

[86] K. Nikodem, *On the support of midconvex operators*, Aequationes Math. 42 (1991), no. 2-3, 182-189.

[87] K. Nikodem, Zs. Páles, *Characterizations of inner product spaces by strongly convex functions*, Banach J. Math. Anal. 5 (2011), no. 1, 83-87.

[88] K. Nikodem, Zs. Páles, S. Wąsowicz, *Abstract separation theorems of Rodé type and their applications*, Ann. Polon. Math. 72 (1999), no. 3, 207-217.

[89] Zs. Páles, *On the separation of midpoint convex sets*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 8 (1986), no. 5, 309-312.

[90] Zs. Páles, *Hahn-Banach theorem for separation of semigroups and its applications*, Aequationes Math. 37 (1989), no. 2-3, 141-161.

[91] Zs. Páles, *A Stone-type theorem for Abelian semigroups*, Arch. Math. (Basel) 52 (1989), no. 3, 265-268.

[92] Zs. Páles, *A generalization of the Dubovitskii-Milyutin separation theorem for Abelian semigroups*, Arch. Math. (Basel) 52 (1989), no. 4, 384-392.

[93] Zs. Páles, *Geometric versions of Rodé's theorem*, Rad. Mat. 8 (1992/98), no. 2, 217–229.

[94] E.M. Pearce, A.M. Rubinov, *P -functions, quasi-convex functions and Hadamard-type inequalities*, J. Math. Anal. Appl. 240 (1999), no. 1, 92-104.

[95] J. Pečarič, F. Proschan, Y. L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications*, Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[96] E. S. Polovinkin, *Strongly convex analysis*, Mat. Sb. 187 (1996), no. 2, 103-130; translation in Sb. Math. 187 (1996), no. 2, 259–286.

[97] B. T. Polyak, *Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 166 (1966), 287–290.

[98] M. Rădulescu, *On a supra-additive and supra-multiplicative operator of $C(X)$*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N.S.) 24(72) (1980), no. 3, 303–305.

[99] T. Riedel, P. K. Sahoo, *Mean value theorems and functional equations*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998.

[100] T. Riedel, M. Sablik, A. Sklar, *Polynomials and divided differences*, Publ. Math. Debrecen 66 (2005), no. 3-4, 313-326.

[101] G. F. B. Riemann, *Gesammelte Mathematische Werke*, Dover Publications, Inc., New York, N. Y., 1953.

[102] G. F. B. Riemann, *Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen*, K. Hattendorff (ed.), Vieweg, Branschweig, (1869).

[103] A. W. Roberts, D. E. Varberg, *Convex Functions*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 57. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1973.

[104] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Mathematical Series, No. 28 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1970.

[105] G. Rodé, *Eine abstrakte Version des Satzes von Hahn-Banach*, Arch. Math. (Basel) 31 (1978/79), no. 5, 474-481.

[106] B. Rodriguez-Salinas, L. Bou, *A Hahn-Banach theorem for arbitrary vector spaces*, Boll. Un. Mat. Ital.(4) 10 (1974), 390-393.

[107] S. Rolewicz, *On $\alpha(\cdot)$-paraconvex and strongly $\alpha(\cdot)$-paraconvex functions*, Control Cybernet. 29 (2000), no. 1, 367-377.

[108] M. Sablik, *Taylor's theorem and functional equations*, Aequationes Math. 60 (2000), no. 3, 258–267.

[109] I. Schur, *Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf der Determinanten Theorie*, Sitzunsber. Berlin. Math. Ges. 22 (1923), 9-20.

[110] W. Sierpiński, *Sur les fonctions convexes mesurables*, Fund. Math. 1 (1920), 125-128.

[111] R. J. Silverman, T. Yen, *The Hahn-Banach theorem and the least upper bound property*, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 523-526.

[112] T. Szostok, *Problem 3, Report of Meeting the Fourteenth Debrecen-Katowice Winter Seminar*, Ann. Math. Sil. 28 (2014), 97-118.

[113] Jacek Tabor, Józef Tabor, *Generalized approximate midconvexity*, Control Cybernet. 38 (2009), no. 3, 655-669.

[114] Józef Tabor, *Remark 18, Report Of Meeting: The Twenty-second International Symposium on Functional Equations, December 16 – December 22, 1984, Oberwolfach, German*, Aequationes Math. 29, (1985), no. 1, 62-111.

[115] T.-O. To, *On the Hahn-Banach extension property*, Canad. Math. Bull. 13 (1970), 9-13; corrections, ibid., 13 (1970), 526.

[116] T.-O. To, *The equivalence of the least upper bound property and the Hahn-Banach extension property in ordered linear spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971), 287-295.

[117] K.-L. Tseng, G.-S. Yang, S.S. Dragomir, *Hadamard inequalities for Wright-convex functions*, Demonstratio Math. 37 (2004), no. 3, 525-532.

[118] S. Varošanec, *On h-convexity*, J. Math. Anal. Appl. 326 (2007), no. 1, 303-311.

[119] F. A. Valentine, *Convex sets*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London 1964.

[120] L. Veselý, L. Zajiček, *Delta-convex mappings between Banach spaces and applications*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 289 (1989), 52 pp.

[121] J. P. Vial, *Strong convexity of sets and functions*, J. Math. Economy 9 (1982), no. 1-2, 187-205.

[122] P. Volkmann, H. Weigel, *Systeme von Funktionalgleichungen*, Arch. Math. (Basel) 37 (1981), no. 5, 443–449.

[123] P. Volkmann, *Sur un systéme d'inéquations fonctionnelles*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 4 (1982), no. 3, 155–158.

[124] P. Volkmann, *Sur les fonctions simultanément suradditives et surmultiplicatives*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N.S.) 28(76) (1984), no. 2, 181–184.

[125] E. M. Wright, *An inequality for convex functions*, Amer. Math. Monthly 61 (1954), 620-622.

[126] L. Zalinescu, *Convex analysis in general vector spaces*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002.

Andrzej Olbryś