Prof. dr hab. Anna Kamont
Instytut Matematyczny PAN
Oddział w Gdańsku

Sopot, 4 kwietnia 2019 r.

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dr Andrzeja Olbrysia przed Radą Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach

Dr Andrzej Olbryś jako osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 16 *Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym*, przedstawił jednotematyczny cykl 6 prac, zatytułowany *Twierdzenia o oddzielaniu i podpieraniu dla wybranych klas odwzorowań i ich konsekwencje*. Na ten cykl składają się prace wymienione – wraz z dokładnymi danymi bibliograficznymi – na stronie 1 autoreferatu, i oznaczone tam numerami (I)-(VI). Prace (I)-(V) to samodzielne prace Habilitanta, praca (VI) to praca wspólna z Zs. Pálesem. Oświadczenie Zs. Pálesa, dokładnie opisujące współpracę obu autorów pracy (VI), znajduje się w dokumentacji.

Ocena jednotematycznego cyklu prac *Twierdzenia o oddzielaniu i podpieraniu dla wybranych klas odwzorowań i ich konsekwencje*

Tematykę badawczą dr Andrzeja Olbrysia – zarówno prac składających się na jednotematyczny cykl publikacji *Twierdzenia o oddzielaniu i podpieraniu dla wybranych klas odwzorowań i ich konsekwencje*, jak i pozostałych – można ogólnie opisać jako badanie różnych klas funkcji, będących uogólnieniami funkcji wypukłych i podaddytywnych, własności funkcji z tych klas oraz wzajemnych relacji różnych klas.

Prace (I)-(III), omówione na stronach 8-17 autoreferatu,[1] poświęcone są badaniu funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta. Stawiane pytania i uzyskane wyniki należy widzieć w kontekście pytania J. Matkowskiego [76] o to, czy każda funkcja t-wypukła w sensie Wrighta jest wypukła w sensie Jensena, oraz odpowiedzi na to pytanie, podanej w pracy Gy. Maksa, K. Nikodem, Zs. Páles [74]. Jak pokazują autorzy pracy [74], odpowiedź na pytanie J. Matkowskiego zależy od algebraicznych własności liczby t: (A) jeśli t jest liczbą wymierną, to każda funkcja t-wypukła w sensie Wrighta jest wypukła w sensie Jensena, istnieją też liczby niewymierne o tej własności, natomiast (B) dla t przestępnych oraz pewnych t algebraicznych istnieją funkcje t-wypukłe w sensie Wrighta, które są wklęsłe w sensie Jensena i nie są wypukłe w sensie Jensena, w pracy [74] podane są przykłady takich funkcji. Jak rozumiem ta odpowiedź na

[1] Autoreferat przygotowany jest starannie i dokładnie prezentuje otrzymane wyniki, zatem, dla uproszczenia, w recenzji odwołuję się raczej do auoreferatu, zamiast do prac.

AK

pytanie J. Matkowskiego, a w szczególności chęć zrozumienia natury przykładów z punktu (B), były impulsem do badań przedstawionych w pracach (I)-(III) .

W pracach (I), (II) Habilitant bada różne własności funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta, przede wszystkim podaje twierdzenia o oddzielaniu i o podpieraniu, a także przygląda się bliżej związkowi między t-wypukłością w sensie Wrighta a wypukłością w sensie Jensena. Zasadniczy pomysł tych prac widzę w zidentyfikowaniu znaczenia warunku ($\star$), sformułowanego np. w Twierdzeniu 5. Warunek ($\star$) opisuje zachowanie się badanej funkcji f na kolejnych iteracjach średnich M i N.[2] Jak się okazuje, warunek ($\star$) charakteryzuje te funkcje t-wypukłe w sensie Wrighta, dla których istnieje t-afiniczna w sensie Wrighta funkcja podpierająca, patrz Twierdzenia 6 i 7. Dalsze Twierdzenie 11 to reprezentacja funkcji spełniających warunek ($\star$) – zwróćmy uwagę, że pojawiająca się w Twierdzeniu 11 funkcja g musi być zarówno wypukła w sensie Jensena, jak i t-wypukła w sensie Wrighta. Jeśli chodzi o istnienie funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta, ktore nie spełniają warunku ($\star$), to mamy Uwagę 1: funkcje skonstruowane w pracy [74], wspomniane w punkcie (B) powyżej, są t-wypukłe w sensie Wrighta, ale nie spełniają warunku ($\star$). Zauważmy jeszcze, że wobec punktu (A) i Twierdzenia 11, gdy np. t jest wymierne, to każda funkcja t-wypukła w sensie Wrighta spełnia warunek ($\star$). Osobną część wyników stanowi poszukiwanie warunków charakteryzujących te funkcje t-wypukłe w sensie Wrighta, które są jednocześnie wypukłe w sensie Jensena, patrz Twierdzenia 8 i 10 oraz Wniosek 1. W dowodach wymienionych wyników – przede wszystkim, Twierdzeń 6 i 8 – istotne jest techniczne Twierdzenie 5, również odwołujące się do warunku ($\star$). Dopełnieniem tej serii wyników są twierdzenia o oddzielaniu - Twierdzenie 4, oraz o majoryzacji - Twierdzenie 12. Twierdzenie 13 to charakteryzacja tych funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta, które są wypukłe w sensie Wrighta. Patrząc na dowód tego wyniku w pracy (II) widzimy, że równoważność warunków (i) oraz (ii) była znana już wcześniej, wkład Habilitanta widzę w dodaniu warunków (iii) oraz (iv).

Praca (III) dotyczy analogicznych zagadnień co prace (I) i (II), ale niejako "z zamianą rolami" funkcji t-wypukłych i t-wklęsłych w sensie Wrighta, patrz np. sformułowanie twierdzenia o oddzielaniu, tj. Twierdzenia 15. Wyniki są analogiczne do wyników z (I), (II), z tym że warunek ($\star$) jest zastąpiony przez warunek ($\diamond$) (warunek ($\diamond$) sformułowany jest np. w Twierdzeniu 16). Dalej, Habilitant interesuje się podpieraniem "od góry" dla funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta, patrz Twierdzenie 16. Twierdzenie 18 podaje charakteryzację funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta i jednocześnie wklęsłych w sensie Jensena. Zwróćmy też uwagę na zmianę założeń o dziedzinie rozważanych funkcji – w (III) jest to cała przestrzeń liniowa X, podczas gdy w (I) i (II) może to być odpowiedni – np. t-wypukły, lub wypukły i algebraicznie otwarty – podzbiór $D \subset X$. Po pierwsze, wiąże się to ze zmianą natury narzędzia używanego w dowodach: w pracach (I), (II) są to średnie $M(x,z)$ i $N(x,z)$, skierowane "do wewnątrz" odcinka łączącego x i z, zaś używane w (III) funkcje $K(x,z)$ i $L(x,z)$ są skierowane "na zewnątrz" tego odcinka,[3] zaś iteracje funkcji K i L pojawiają się w warunku ($\diamond$), będącym odpowiednikiem w tej sytuacji warunku ($\star$).

[2] Średnie M i N są wprowadzone na stronie 9 autoreferatu.

[3] Para funkcji (K, L) jest odwzorowaniem odwrotnym do pary średnich (M, N), patrz definicja na stronie 15.

AK

Jednocześnie Example 1 z pracy (III) pokazuje, że pewna zmiana założeń o dziedzinie jest konieczna. W pracy (III) podane są też odpowiedniki innych wyników z (I) i (II), np. reprezentacja funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta, spełniający warunek ($\diamond$), patrz Twierdzenie 21, czy twierdzenie o majoryzacj, patrz Twierdzenie 22.

Zauważmy jeszcze, że w odróżnieniu od [74], ani przedstawione w pracach (I)-(III) wyniki, ani ich dowody, nie odwołują się algebraicznych własności liczby t.

Praca [IV], omówiona na stronach 18-20 autoreferatu, zawiera twierdzenia o oddzielaniu i o podpieraniu dla odwzorowań delta-podaddytywnych. Habilitant widzi te wyniki jako rozszerzenie rezultatów z pracy Z. Gajdy i Z. Kominka [37], z odwzorowań pod- i nadaddytywnych na odwzorowania delta-pod- i delta-nadaddytywne. Podzielam ten pogląd. Dokładniej, Twierdzenie 24 (o oddzielaniu) to rozszerzenie Theorem 1 z pracy [37] z wersji dla odwzorowań pod- i nadaddytywnych do wersji dla odwzorowań delta-pod- i delta-nadaddytywnych. Idąc za autorami pracy [37], zastanawiam się, na ile restrykcyjne jest pojawiające się w Twierdzeniu 24 założenie $\sup\{f(x) - g(x) : x \in S\} < \infty$. Na bardziej technicznym poziomie, dowód Twierdzenia 24 opiera się na Lemma 2 z pracy (IV), który to lemat jest rozszerzeniem Lemma 3 z [37], z odwzorowań pod- i nadaddytywnych na odwzorowania delta-pod- i delta-nadaddytywne. Dowód Twierdzenia 26 (o podpieraniu), będącego odpowiednikiem Theorem 7 z [37], opiera się na tym samym Lemma 2 oraz na twierdzeniu o podpieraniu dla funkcji delta-wypukłych w sensie Jensena, otrzymanym przez Habilitanta we wcześniejszej pracy (O7) (twierdzenie to znajdujemy w dalszej części autoreferatu jako Twierdzenie 38).

W pracy [V], omówionej na stronach 21-24 autoreferatu, Habilitant wprowadza klasę funkcji (ω, t)-wypukłych. Z jednej strony, jest to wspólne uogólnienie szeregu pojęć wypukłości znanych w literaturze, patrz lista na stronie 21 autoreferatu, a także wstęp do pracy (V).[4] Z drugiej strony, jak słusznie zauważa Habilitant (patrz dalej strona 21 autoreferatu), pojęcie to jest tak ogólne, że dla każdej funkcji f można znaleźć (wręcz – podać wzorem) funkcję ω taką, że f jest (ω, t)-afiniczna. Główny wynik pracy (V) – twierdzenie o podpieraniu dla funkcji (ω, t)-wypukłych – jest przytoczony w autoreferacie jako Twierdzenie 27.[5] Widzę to twierdzenie następująco: jeśli dla danej funkcji ω istnieje pewna funkcja (ω, t)-afiniczna, to funkcja ω musi spełniać warunki (a)-(c) z Twierdzenia 27, nawet z równością zamiast nierów-

[4]Niektóre z podanych przykładów wydają mi się jednak nieco mylące. Ostatni przykład z listy na stronie 21 autoreferau – 21_7, przykład nieobecny w pracy (V) – ma łączyć pojęcia (ω, t)-wypukłości i t-wypukłości w sensie Wrighta. O ile dla funkcji f, definiującej funkcję ω z 21_7, pojęcia (ω, t)-wypukłości i t-wypukłości w sensie Wrighta pokrywają się, to dla $g \neq f$ spełnienie warunku definiującego (ω, t)-wypukłość oznacza tu spełnienie nierówności

$$g(tx + (1-t)y) + f((1-t)x + ty) \leqslant tg(x) + (1-t)g(y) + (1-t)f(x) + (1-t)g(y).$$

Ta nierówność nie pokrywa się z nierównością definiującą t-wypukłość w sensie Wrighta funkcji g.

W przypadku przykładu z 21_8, podanego także w pracy (V), wydaje się, że badanie (ω, t)-wypukłości z funkcją ω zdefiniowaną jak w 21_8, z ustalonym odwzorowaniem F, oznacza badanie rodziny funkcji f, które są funkcjami kontrolnymi dla tego ustalonego odwzorowania F.

[5]W autoreferacie, w warunku (c) w Twierdzeniu 27 jest literówka, zmieniająca sens tej nierówności. Patrz warunek (c) w Theorem 3 w (V).

AK

ności w punkcie (c) i dla dowolnych $y, u, v, x, z \in D$.[6] Z drugiej strony, jeśli funkcja ω spełnia dla ustalonego $y \in D$ warunki (a)-(c) oraz mamy daną (ω, t)-wypukła funkcja f, to dla tej funkcji istnieje (ω, t)-afiniczna funkcja podpierająca w punkcie y. W konsekwencji, w takiej sytuacji funkcja ω musi spełniać wymienioną wyżej silniejszą wersję warunków (a)-(c). Tą zależność można wykorzystać do pokazania, że dla zadanej funkcji ω nie istnieją funkcje (ω, t)-wypukłe – jak rozumiem, ten argument jest istotą dowodu Twierdzenia 32, dla $t \in (0, 1)$ i $\omega(x, y, t) = -c\|x - y\|$ ze stałą $c > 0$.

Dalej, praca (V) zawiera szereg faktów dotyczących charakteryzacji funkcji (ω, t)-wypukłych – patrz Twierdzenia 29 i 30, a także Theorem 4 w (V); dowody tych faktów opierają się na twierdzeniu o podpieraniu, tzn. Twierdzeniu 27.

Interesujace wydaje się sprawdzenie, dla jakich funkcji ω warunki (a)-(c) w Twierdzeniu 27 są spełnione. Różne wyniki w tym kierunku zawiera rodział 3 pracy (V). Najciekawszy z tych wyników wydaje się rezultat przytoczony w autoreferacie jako Twierdzenie 31, które mówi kiedy funkcja $\omega(x, y, t) = ct(1 - t)\|x - y\|^2$, $c > 0$, spełnia warunek (c) z Twierdzenia 27. Jak się okazuje, wówczas przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$ musi być przestrzenią unitarną. Nie jest dla mnie jasne czym jest zbiór D w warunku (α) z Twierdzenia 27, ale zauważmy, że jeśli $D = X$, to implikację $(\alpha) \Rightarrow (\gamma)$ można znaleźć w ksiażce D. Amira [7], patrz Chapter 6, strony 47-49, oraz warunek (6.3) na stronie 48, patrz też referencje podane w [7].

Wspólna z Zs. Pálesem praca (VI), omówiona na stronach 24-29 autoreferatu, dotyczy abstrakcyjnej wersji twierdzenia Hahna-Banacha i twierdzenia o podpieraniu, dla odwzorowań o wartościach w zbiorze częściowo uporządkowanym z własnością *lcc (lower chain complete)*. Główne wyniki pracy (VI) są przytoczone jako Twierdzenia 33 i 34. Bezpośrednia motywacja pochodziła ze wcześniejszej pracy Habilitanta (O7), w której pokazał on twierdzenie o podpieraniu dla odwzorowań delta (s, t)-wypukłych, patrz Twierdzenie 38 w dalszej czesci autoreferatu. Za główny punkt pracy (VI) uważam zidentyfikowanie struktur, pozwalających na otrzymanie uogólnionej wersji twierdzenia Hahna-Banacha, Twierdzenie 33, i twierdzenia o podpieraniu, Twierdzenie 34. Po pierwsze, potrzebne są algebraiczne odpowiedniki zbiorów wypukłych i ekstremalnych (są one opisane w rozdziale 2 pracy). Drugie potrzebne pojęcie to rodziny odwzorowań parami dystrybutywnych (wprowadzone w rozdziale 4 pracy). Istotną częścią pracy jest pokazanie przykładów zbiorów częściowo uporządkowanych $(Y, \leqslant)$, spełniających warunek *lcc*, interesujących z punktu widzenia zastosowań głównych wyników, w tym przykładów pozwalających na umiejscowienie w tych abstrakcyjnych strukturach wcześniejszych wyników z (O7). (Jest to treścią rozdziału 3 pracy.) Efektem połączenia tych przykładów i głównych wyników pracy są wyniki przytoczone w autoreferacie jako Twierdzenia 35 i 36.

Podsumowanie. Twierdzenie Hahna-Banacha, jego różne postacie i konsekwencje, oraz własności funkcji takie jak wypukłość czy podaddytywność, należą są podstawowymi narzędziami stosowanymi w wielu dziedzinach matematyki. Pytania stawiane w pracach składajacych się na omawiany cykl publikacji wywodzą się z tych pojęć,

[6] W istocie, tak przebiega dowód Twierdzenia 27 w jedną stronę, patrz dowód Theorem 3 w (V).

AK

dotyczą różnych ich rozszerzeń i uogólnień, oraz ich wzajemnych powiązań. Niektóre wyniki widzę jako objaśnienie zjawisk zaobserwowanych wcześniej przez innych autorów (por. wyniki z prac (I)-(III) oraz [74]). Mimo pewnych uwag sądzę, że prace napisane są starannie, m.inn. dostrzegam dbałość Autora o przedstawienie motywacji rozważanych pytań. Sądzę, że przedstawiony cykl prac spełnia wymogi stawiane przez *Ustawę o stopniach naukowych i tytule naukowym* .

Ocena pozostałego dorobku naukowego i aktywności naukowej Habilitanta

Poza pracami wchodzącymi w skład rozprawy habilitacyjnej, dr Andrzej Olbryś jest autorem lub współautorem 13 prac opublikowanych i 1 preprintu, wymienionych na stronie 30 autoreferatu jako pozycje (O1) - (O14). Z tych prac 3, (O1)-(O3), wchodziły w skład Jego rozprawy doktorskiej. Podobnie jak w przypadku prac (I)-(VI), tematykę prac (O1)-(O14) można opisać ogólnie jako badanie rozmaitych klas funkcji, będących uogólnieniami funkcji wypukłych lub podaddytywnych. Wyniki te są opisane szczegółowo na stronach 30 – 39 autoreferatu, tutaj potraktuję je więc skrótowo.

- Badanie regularności funkcji t-wypukłych w sensie Wrighta, w tym poszukiwanie warunków, które w połączeniu z t-wypukłością w sensie Wrighta implikują lepsze własności tych funkcji, jak ciągłość lub wypukłość – prace (O4), (O6), a także wcześniejsze (tzn. będące częścią doktoratu) prace (O1) i (O2).

- Wspólna z M. Lewickim praca (O5) odpowiada na pytanie Zs. Pálesa o wypukłość w sensie Jensesna lub t-wypukłość funkcji niesymetrycznie t-wypukłych, dla t przestępnych.

- Wprowadzenie nowych rodzajów wypukłości – delta (s, t)-wypukłości oraz delta wypukłości w sensie Schura, badanie własności funkcji wypukłych w takim sensie, prace (O7), (O8).

- Badanie własności funkcji h-wypukłych – prace (O9), (O10).

- Nierówności typu Hermita-Hadamarda – wspólna z T. Szostokiem praca (O11), praca (O13) i preprint (O14).

  Narzędziem stosowanym w tych ostatnich pracach jest uogólnienie całki Riemanna, wprowadzone w (O13).

- Wspólna z W. Fechnerem praca (O12) dotyczy rozwiązań pewnych układów nierówności w klasie odwzorowań między pierścieniami z częściowym porządkiem.

Zapoznałam się z przedstawionymi w załączniku 3 danymi bibliometrycznymi prac Habilitanta, obejmującymi sumaryczny *impact factor*, listę cytowań i indeks Hirscha. Dodam, że wg bazy MathSciNet prace Habilitanta były cytowane 43 razy przez 16 autorów (dane z 18.III.2019).

 AK

Zapoznałam się z danymi przedstawionymi w załącznikach 4 – 7. Opisują one działalność dydaktyczną Habilitanta, otrzymane przez Habilitanta nagrody i wyróżnienia, udział w konferencjach, w tym referaty, referaty w ramach seminariów naukowych i działalność recenzencką. Z tych danych chciałabym podkreślić zaangażowanie Habilitanta w prowadzenie specjalności *Matematyka w finansach i ekonomii* w IM UŚ. Odbicie tego zaangażowania widać zarówno w zestawie prowadzonych zajęć dydaktycznych (wykłady i ćwiczenia z przedmiotów związanych z matematyka finansową), jak i w tematach prowadzonych prac magisterskich – odnotujmy, że matematyki finansowej dotyczą 22 spośród 30 prowadzonych przez dr Olbrysia prac magisterskich oraz wszystkie 6 prowadzonych przez niego prac licencjackich. Zauważmy też, że jedna ze współprowadzonych przez dr Olbrysia prac magisterskich – praca pani mgr Małgorzaty Pakuły, której współpromotorem był profesor Ger Koole z Vrije Universiteit Amsterdam – została nagrodzona w organizowanym przez PTM konkursie na najlepszą pracę studencką z teorii prawdopodobieństwa i zastosowań matematyki (rok 2014, III nagroda).

Podsumowując, myślę, że dorobek ten jest wystarczający do pozytywnego zaopiniowania wniosku habilitacyjnego dr Andrzeja Olbrysia.

Konkluzja

Myślę, że przedstawiony przez dr Andrzeja Olbrysia jednotematyczny cykl publikacji *Twierdzenia o oddzielaniu i podpieraniu dla wybranych klas odwzorowań i ich konsekwencje* oraz pozostała aktywność naukowa i dydaktyczna Habilitanta spełniają wymagania stawiane przez *Ustawę o stopniach naukowych i tytule naukowym* kandydatom do stopnia naukowego doktora habilitowanego. Proponuję nadanie dr Andrzejowi Olbrysiowi stopnia naukowego doktora habilitowanego nauk matematycznych.

Anna Kamont

Anna Kamont