

Łódź, 17 grudnia 2018 r.

Prof. dr hab. Marek Balcerzak
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dr Andrzeja Olbrysa

1. Omówienie wyróżnionego cyklu publikacji. Wyróżniony cykl prac składa się z pięciu artykułów monoautorskich i jednej wspólnej pracy z Zsoltem Pálosem. Habilitant zaprezentował twierdzenia o oddzielaniu i podpieraniu dla wybranych klas odwzorowań wraz z pewnymi konsekwencjami. Badanymi klasami odwzorowań są tu:

- funkcje t -wypukłe w sensie Wrighta (w pracach (I)–(III));
- odwzorowania delta-podaddytywne i delta-nadaddytywne (w pracy (IV));
- odwzorowania (ω, t) -wypukłe (zdefiniowane przez autora w pracy (V));
- abstrakcyjne odwzorowania (ω, Ω) -wypukłe (rozpatrywane w pracy (VI)).

Różnego typu wypukłość funkcji rzeczywistych rozważa się, gdy ich dziedziną jest podzbiór wypukły rzeczywistej przestrzeni liniowej. Klasę funkcji wypukłych w sensie Wrighta wprowadził tenże matematyk w 1954 roku. Jako pierwszy t -wypukłość w sensie Wrighta rozpatrywał Matkowski w 1992 roku. Zaproponowano porównanie z klasycznym pojęciem wypukłości w sensie Jensena, gdzie kluczową rolę pełni skalar $1/2$. Pewne własności funkcji t -wypukłych w sensie Wrighta były przedmiotem rozprawy doktorskiej Habilitanta obronionej w 2005 roku. Jej wyniki zostały opublikowane w pracach (O1)–(O3) zaliczonych do pozostałego dorobku naukowego. W kilku publikacjach wyróżnionego cyklu dr Olbrys nadal badał tę samą klasę funkcji, ale pod kątem innych, bardziej zaawansowanych własności.

Praca (I) pochodząca z omawianego zestawu zawiera twierdzenia o podpieraniu i oddzielaniu dla funkcji t -wypukłych w sensie Wrighta określonych na wypukłym podzbiórze D przestrzeni liniowej nad ciałem \mathbb{K} , przy czym $\mathbb{Q}(t) \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{R}$. Twierdzenia o podpieraniu i oddzielaniu dla zwykłej wypukłości należą do kanonu analizy funkcjonalnej i znajdują liczne zastosowania, np. w teorii optymalizacji i ekonomii. Kluczowym narzędziem dowodowym w klasycznym przypadku jest twierdzenie Hahna-Banacha. Abstrakcyjne twierdzenie Rodego z 1978 roku pozwala m.in. uzyskać twierdzenia o oddzielaniu dla funkcji wypukłych w sensie Jensena. Habilitant zaproponował nową oryginalną metodę w celu wykazania odpowiednich twierdzeń dla funkcji t -wypukłych w sensie Wrighta. W kolejnej publikacji (II) można

znaleźć serię interesujących konsekwencji tych rezultatów. Są to pomysły i nietrywialne charakteryzacje pewnych ważnych podklas rodziny funkcji t -wypukłych w sensie Wrighta. Artykuł (III) został napisany na motywach prac (I) i (II). Dotyczy on funkcji t -wypukłych oraz t -wkłęsłych w sensie Wrighta określonych na całej przestrzeni, a nie, jak poprzednio, na dowolnym ustalonym zbiorze wypukłym. Metody dowodowe i twierdzenia w pracy (III) są w znacznym stopniu analogiczne do tych pochodzących z poprzednich publikacji (I) i (II). To obniża wartość artykułu (III). Habilitant powinien poświęcić w nim więcej miejsca na porównanie odpowiednich wyników, a pewne powtarzające się fragmenty mógł po prostu pominąć. Należało też wyraźniej zaakcentować, co nowego wnosi zmodyfikowane ujęcie.

Kolejna praca (IV) zawiera ciekawe twierdzenia o podpieraniu dla odwzorowań delta-podaddytywnych oraz o oddzielaniu dla odwzorowań delta-podaddytywnych i delta-nadaddytywnych określonych na półgrupach słabo przemiennej. W dowodach stosuje się m.in. częściowy porządek w stożkach Lorenza. Jako prosty wniosek z jednego z twierdzeń uzyskano klasyczny wynik o stabilności dla równania Cauchy'ego. Geneza tych badań jest dobrze umotywowana. Pojęcie delta-wypukłości pochodzi od Veselý'ego i Zajička (1989), zaś pojęcie delta-podaddytywności od Gera (1992). Badania wokół tych pojęć wniosły zauważalne ożywienie w teorii równań i nierówności funkcyjnych.

Przedmiotem badań w artykułach (V) i (VI) są twierdzenia o podpieraniu dla uogólnionych i abstrakcyjnych odwzorowań wypukłych. Takie podejście w matematyce jest cenne, gdyż podejmuje ono próbę ogólnego spojrzenia na dotychczasowe wyniki i metody dowodowe oraz wyabstrahowania istotnych własności, które dobrze działają w znanych szczególnych przypadkach. W pracy (V) wprowadzono funkcje (ω, t) -wypukłe, które są modyfikacją funkcji wypukłych polegającą na dodaniu składnika zaburzającego ω . Pomysł dr Olbrysa obejmuje kilka znanych pojęć uogólnionej wypukłości odwzorowań. Dla tego rodzaju funkcji uzyskał on twierdzenie o podpieraniu i kilka innych własności oraz ich zastosowań, m.in. nową charakteryzację przestrzeni unormowanych unitarnych. W artykule (V) autorzy sformułowali śmiałą koncepcję uogólnienia następujących obiektów: zbioru wypukłego, zbioru ekstremalnego i punktu wewnętrznego względem danej rodziny operacji dla odpowiednich struktur algebraicznych. W dalszej kolejności pojawia się pojęcie odwzorowań wypukłych o wartościach w przestrzeni częściowo uporządkowanej. Uzyskano rozszerzoną wersję twierdzenia Hahna-Banacha, którą następnie zastosowano do abstrakcyjnego twierdzenia o podpieraniu, dzięki czemu otrzymano w szczególności wcześniejszy wynik Habilitanta z jego pracy (O7).

Wszystkie prace cyklu zostały starannie zredagowane. W artykule (III) zauważyłem drobny błąd drukarski: we wzorze (4), na str. 3 symbol D należy zastąpić przez X . Usterka podobnego typu pojawia się w autoreferacie, w sformułowaniu Twierdzenia 15 – dotyczy ona dziedziny funkcji g .

Oceniając wartość wyróżnionego cyklu, należy zwrócić uwagę na oryginalność i elegancję większości wyników oraz urozmaicony zestaw metod dowodowych należących do arsenału narzędzi teorii równań i nierówności funkcyjnych. Wymieniłbym tu użycie częściowych porządków, lematu Kuratowskiego-Zorna, stożków Lorenza, zręcznych metod rekurencyjnych,

odwołanie do struktur algebraicznych, np. półgrup, słabych wersji przemienności, itp. oraz teorii przestrzeni unormowanych. Prace (I), (II), (IV) wyróżniają się pomysłowością rachunkową, zaś prace (V)–(VI) (a zwłaszcza ta druga) kreatywnością – poprzez trafne tworzenie nowych pojęć uogólniających w dużym stopniu wcześniejsze badania. Można oczekiwać, że w niedalekiej przyszłości rezultaty te będą cytowane w środowisku specjalistów. Nowe koncepcje pracy (VI) powinny wzbudzić zainteresowanie i mają szansę kontynuacji. Według mojej wiedzy uogólnione funkcje wypukłe nie przyniosły na razie nowych zastosowań w innych działach matematyki, czego przyczyną jest zapewne nieregularność nieciągłych funkcji wypukłych. Pomimo to, niewątpliwie warto było prowadzić badania rozszerzające klasyczne podejście w różnych kierunkach. Podsumowując, doceniam wysiłek Habilitanta i wartość jego dokonań oraz uważam, że jego osiągnięcie wnosi znaczący wkład do rozwoju dyscypliny naukowej.

2. Ocena pozostałego dorobku naukowego oraz aktywności naukowej i dydaktycznej Habilitanta. Na pozostały dorobek naukowy dr Olbrysa składa się 13 artykułów naukowych oraz preprint. Większość tych prac, podobnie jak publikacje wchodzące w skład wyróżnionego cyklu, wydrukowano w dobrych periodykach. Nawiązują one do rezultatów znanych specjalistów. Pięć publikacji z tego dorobku (podobnie jak trzy prace omawianego wcześniej cyklu) dotyczy t -wypukłości w sensie Wrighta. Nie jest to zaskakujące, gdyż doktorat i napisane na jego podstawie trzy artykuły (O1)–(O3) były poświęcone tej tematyce, więc badania w kolejnych pracach po doktoracie też podążały w tym kierunku. Śledząc dalszy rozwój naukowy Habilitanta, można odnotować poszerzenie problematyki i metod badawczych. Każda próba wyjścia poza klasyczne schematy dała korzystny efekt w jego poczynaniach naukowych. Na przykład w pracy (O5) rozwiązano problem Pálesa dotyczący funkcji niesymetrycznie t -wypukłych. W artykułach (O7)–(O10) badano inne rodzaje wypukłości funkcji: (s, t) -wypukłość (uogólnioną potem w pracy (VI)), wypukłość w sensie Schura oraz h -wypukłość. Ciekawa jest charakteryzacja funkcji t -wypukłych w sensie Wrighta przez górną drugą pochodną symetryczną uzyskana w artykule (O6) wydrukowanym w 2015 roku. Warto dodać, że w tymże roku Habilitant opublikował w sumie 6 prac, w tym 5 monoautorских.

Publikacje (O7) i (O9) dotyczą twierdzeń o podpieraniu i oddzielaniu dla odwzorowań wypukłych różnego typu, a więc tematycznie wiążą się z wyróżnionym cyklem. Uzyskane wyniki są może mniej spektakularne, choć też zawierają nowe pomysły. O poszerzeniu tematyki badawczej Habilitanta świadczą zwłaszcza jego prace (O11)–(O14). Trzy z nich są efektem badań wokół nowych aspektów nierówności Hermite'a-Hadamarda. Wątek numeryczny pojawił się w artykule (O11), gdzie zastosowano m.in. twierdzenie Levina-Stečkina dla całek Riemanna-Stieltjesa. W pracy (O13) autor wprowadził interesujące pojęcie K -całki Riemanna, dzięki czemu otrzymał rozszerzoną wersję nierówności Hermite'a-Hadamarda. To nowe pojęcie całki powinno znaleźć kolejne zastosowania. W pracy (O14) Habilitant otrzymał eleganckie rozwiązanie problemu Szostoka dające opis rozwiązań nierówności generowanej przez

klasyczny wzór Hermite'a-Hadamarda. Zainteresowanie wzbudza praca współautorska (O12), która przedstawia charakteryzację homomorfizmów między częściowo uporządkowanymi pierścieniami za pomocą stosownych nierówności funkcyjnych.

Z powyższego omówienia wynika, że dorobek naukowy dr Olbrysia jest wartościowy. Jego rezultaty są cytowane kilkanaście razy przez matematyków z różnych ośrodków, choć oczekiwania w przypadku wniosku habilitacyjnego bywają większe. Widać, że Habilitant dysponuje dużą wiedzą w swojej tematyce oraz widzi potrzebę wzmocnienia istniejących wyników i ostrzegania ich w ogólniejszym ujęciu. Nie brakuje mu inwencji twórczej i pracowitości. Z powodzeniem stosuje wybrane metody funkcji rzeczywistych, umiejętnie operuje strukturami algebraicznymi i uporządkowanymi. W jego dorobku przeważają publikacje samodzielne, a tam, gdzie jest współautorem, widoczne są dodatkowe efekty współpracy. Dr Olbryś był trzykrotnie wyróżniany nagrodą im. Kuczmy za prace z równań funkcyjnych. Zapewne Habilitant ma świadomość tego, że szybkie tempo rozwoju współczesnej matematyki narzuca konieczność wychodzenia poza hermetyczny zakres zainteresowań, atakowania ciekawych i trudnych problemów, sięgania do nowych metod badawczych i kojarzenia faktów z różnych działów matematyki.

Zwraca uwagę duża aktywność dr Olbrysia w zakresie referatów konferencyjnych i seminarijnych. Wśród konferencji przeważają międzynarodowe sympozja cykliczne z równań i nierówności funkcyjnych organizowane w Polsce i za granicą (Węgry, Austria, Rumunia, Bośnia). Niewątpliwą korzyść przyniosła współpraca Habilitanta z profesorem Pálosem podczas stażu naukowego w Debrecenie w 2016 roku. Dr Olbryś zrecenzował też kilkanaście artykułów do uznanych czasopism naukowych.

Na koniec warto wspomnieć o sukcesach dydaktycznych i pracy organizacyjnej Habilitanta. Wypromował on 30 magistrantów, przy czym jedna jego dyplomantka otrzymała nagrodę PTM. Tematyka wielu spośród wypromowanych prac magisterskich dotyczy zastosowań matematyki w finansach i ekonomii. Ponadto dr Olbryś pełnił funkcję sekretarza międzynarodowego sympozjum z równań funkcyjnych oraz wygłosił referat plenarny na cyklicznej międzynarodowej konferencji studenckiej.

Konkluzja. Moja ocena wyróżnionego osiągnięcia naukowego dr Andrzeja Olbrysia podobnie jak pozostałego dorobku oraz aktywności naukowej i dydaktycznej jest pozytywna. Uważam, że recenzowany wniosek spełnia wymagania ustawowe w postępowaniu habilitacyjnym.

M. Balcerzak