

Prof. Zbigniew Marciniak  
Instytut Matematyki  
Uniwersytet Warszawski

## Recenzja dorobku habilitacyjnego doktora Adama Woryny

Pan doktor Adam Woryna zajmuje się nowoczesną kombinatoryczną teorią grup. Klasyczna kombinatoryczna teoria grup wyrosła z topologii geometrycznej i bada własności grup zadanych przez generatory i relacje. Nowoczesna kombinatoryczna teoria grup ma swoje źródła w dwóch, klasycznych już, grupach problemów.

Pierwsza z nich to tak zwane Problemy Burnside'a. Najstarszy z nich pytał o istnienie skończonej generowanej, nieskończonej  $p$ -grupy; od ponad stu lat wiadomo, że w klasycznych rodzinach grup, na przykład pośród podgrup grup liniowych, taki przykład nie istnieje. Choć już w połowie XX wieku pokazały się pierwsze konstrukcje takich grup, prawdziwy przełom przyniosły prace Olszańskiego, który – za pomocą przemysłnych diagramów na płaszczyźnie – przedstawił metodę konstrukcji wielu grup o zaskakujących własnościach, generowanych przez dokładnie dwa elementy. Na przykład, podał on, dla dostatecznie dużej, ustalonej liczby pierwszej  $p$ , konstrukcję grupy nieskończonej o dwóch generatorach, której wszystkie właściwe podgrupy są izomorficzne z grupą cykliczną  $C_p$ . Techniki geometryczne Olszańskiego, choć efektywne, są bardzo złożone. W ostatnich dziesięcioleciach techniki te są w kombinatorycznej teorii grup coraz częściej zastępowane metodami z teorii grafów oraz automatów, które dostarczają bardziej oszczędnego języka do opisu konstrukcji oraz dostarczają nowych możliwości dowodowych.

Drugim ważnym źródłem inspiracji nowoczesnej kombinatorycznej teorii grup stanowi teoria wzrostu grup (uogólniona następnie do teorii wzrostu algebr). Wyrosła ona z przenikliwej obserwacji J. Milnora, że istnieje związek tempa wzrostu objętości kuli wraz ze wzrostem jej promienia w ustalonej rozmaitości riemannowskiej, a tempem wzrostu liczby elementów grupy podstawowej tej rozmaitości, które można zapisać za pomocą ustalonych generatorów w postaci słów o długości  $\leq n$ , wraz ze wzrostem  $n$ . Doprowadziło to do powstania pojęcia (tempa) wzrostu grupy skończonej generowanej.

Dość szybko okazało się, że skończone rozszerzenia skończonej generowanej grupy nilpotentnych mają wzrost wielomianowy. Natomiast nieabelowe grupy wolne, a zatem także grupy zawierające takie podgrupy, mają wzrost wykładniczy. Piękne, choć trudne twierdzenie Gromowa mówi, jeśli skończonej generowana grupa ma wzrost wielomianowy, to jest skończonym rozszerzeniem grupy nilpotentnej.

Pojawił się też problem, czy mogą istnieć grupy wzrostu pośredniego, to jest o wzroście wolniejszym od wykładniczego, ale szybszym od wzrostu wielomianowego dowolnie wysokiego stopnia. Istnienie takich grup pierwszy wykazał Grigorczyk, konstruując odpowiedni automat, generujący taką grupę, w sensie opisanym we wstępie do Autoreferatu. Z czasem, pojawił się znacznie szerszy krąg naturalnych pytań dotyczących grup nieskończonych, sformułowanych w języku grafów i teorii automatów.

Dorobek doktora Woryny wpisuje się w ten nurt badań. Przedstawiony do oceny zestaw ośmiu publikacji stanowi dobrą reprezentację tematyki jego badań. Oto, moim zdaniem, najważniejsze wyniki uzyskane przez pana doktora Worynę w pracach przedstawionych do oceny.

Część dorobku dr Woryny wpisuje się w nurt badań, które poszukują możliwości badania klasycznych konstrukcji teorii-grupowych za pomocą odpowiednio dobranych automatów. I tak, w pracy [H5] poszukuje się automatów Mealy'ego o możliwie małej liczbie stanów, które generują przeliczalnie iterowany spłot permutacyjny ustalonej skończonej grupy permutacji. W szczególności, dla iterowanych spłotów grup alternujących dr Woryna znajduje automat minimalny, o zaledwie dwóch stanach.

W złożonej technicznie pracy [H6] Autor znajduje proste kryterium automatowe, za pomocą którego można stwierdzać, że dana grupa nie jest skończenie prezentowalna. W tej samej pracy dr Woryna wprowadził interesujące pojęcie niemal finitarnego automorfizmu drzewa. Grupa automorfizmów drzewa jest z definicji niemal finitarna, jeśli jej wszystkie elementy są niemal finitarne. Wykorzystując to pojęcie, podał w pracy [H6] interesujące kryterium na to, by dana grupa automorfizmów drzewa nie zawierała nieabelowej podgrupy wolnej. Kryteria takie są interesujące w kontekście poszukiwania przykładów grup, które mają wzrost wykładniczy z innych powodów, niż takich, że zawierają podgrupę wolną, która ma w oczywisty sposób wzrost wykładniczy. Jego wyniki prowadzą do konstrukcji grup generowanych przez automaty, które nie są skończenie prezentowalne, nie zawierają podgrupy nieabelowej wolnej, a jednocześnie są średniowalne i mają wzrost wykładniczy.

Ponieważ iterowane konstrukcje teoriogrupowe, takie jak na przykład spłot, mają naturalną strukturę systemu odwrotnego, wprowadza się w nich naturalną topologię proskończoną, a następnie stosuje się ją do badania własności tych konstrukcji. Jednym z rozważanych tu problemów jest poszukiwanie minimalnych zbiorów generatorów topologicznych, tj. układów generatorów podgrup gęstych w całej grupie z ustaloną topologią. W pracy [H6] Autor podejmuje tę problematykę i wskazuje dla dość szerokiej rodziny iterowanych spłotów dwuelementowe zbiory ich topologicznych generatorów.

Tematyka ta jest także przedmiotem prac [H1], [H2], [H4]. W pracach tych Autor znacznie uogólnia swoje wcześniejsze wyniki, dotyczące spłotów skończonych grup cyklicznych. Udało mu się usunąć wszystkie, czynione wcześniej, dodatkowe założenia techniczne oraz wyznaczyć dokładne liczby generatorów topologicznych dla nieskończonych spłotów skończonych abelowych grup permutacji. Udowodnił też w pracy [H2] istnienie ścisłego związku skończoności liczby generatorów topologicznych nieskończonego spłotu grup cyklicznych z możliwością wygenerowania tego spłotu przez automat.

W pracy [H3] Autor analizuje strukturę iterowanych splotów grup abelowych. Wskazuje elegancki układ generatorów topologicznych oraz dowodzi, że podgrupy generowane przez układy tych generatorów mają przejrzystą strukturę iloczynów półprostych wolnych grup abelowych, zaś podpólgrupy, jakie one generują mają naturalną strukturę produktów wolnych.

W pracy [H8] doktor Woryna zajmuje się grupami średniowalnymi. Pojęcie to stanowi teoriogrupowy odpowiednik mierzalności zbiorów orbit działania danej grupy; w szczególności grupa wolna nieabelowa nie jest średniowalna, co umożliwia konstrukcję paradoksalnego rozkładu kuli, odkrytego przez Banacha-Tarskiego. Autor dowodzi, że nieskończone sploty skończonych, prostych, tranzytywnych grup permutacji są średniowalne, a ponadto mają wzrost wykładniczy, nie mają skończonej prezentacji, lecz zawsze mają 2-elementowy zbiór generatorów topologicznych.

Wszystkie prace składające się na dorobek habilitacyjny reprezentują bardzo dobry poziom techniczny. Autor swobodnie posługuje się skomplikowanym aparatem z zakresu zarówno teorii grup, teorii działań na drzewach oraz z teorii automatów. Dr Woryna odwołuje się też do najnowszych wyników innych autorów, dając tym dowód aktualności swojej wiedzy. Co więcej, trafnie konstruuje nowe pojęcia, które skutecznie porządkują badany obszar i pozwalają uzyskać bardzo satysfakcjonujące wyniki. Zastosowane techniki dowodowe potwierdzają dużą dojrzałość matematyczną doktora Woryny, jego dobrą intuicję kombinatoryczną, pomysłowość oraz wysoką skuteczność dowodową.

Wyniki, jakie uzyskał pan dr Woryna z pewnością plasują się w centralnym obszarze badań dotyczących badania grup nieskończonych za pomocą metod kombinatorycznych i wnoszą istotny wkład w te badania. Zostały one opublikowane w czasopismach o globalnym zasięgu, drukujących najlepsze prace dotyczące tematyki badań dr Woryny, takich jak Journal of Algebra, Communications in Algebra, Journal of Pure and Applied Algebra, Archiv der Mathematik.

Jeśli chodzi o pozostały dorobek doktora Woryny, to warto podkreślić jego interdyscyplinarność. Niektóre z prac dotyczą po prostu teorii automatów i ukazały się drukiem w dobrych czasopismach informatycznych, takich jak Theoretical Computer Science, Lecture Notes in Computer Science, Journal of Computer and System Sciences.

Warte podkreślenia jest też to, że pan dr Woryna pozostaje w kontakcie z czołowymi badaczami za granicą, pracującymi w podobnej tematyce. Był też zapraszany na seminaria i konferencje międzynarodowe, gdzie przedstawiał swoje wyniki.

Na koniec chciałbym podkreślić dużą staranność, z jaką został przygotowany autoreferat – nieczęsto mogę napisać taką pochwałę.

Wszystkie przytoczone wyżej przesłanki stanowią dla mnie przekonującą podstawę do tego by uznać, że przedłożone osiągnięcie naukowe, jak i cała aktywność naukowa pana doktora Woryny całkowicie spełniają wymagania stawiane kandydatom do stopnia doktora habilitowanego. Dlatego z całym przekonaniem przedkładam wniosek o dalsze procedowanie tej sprawy.

Umaral