Kraków, 02 lipca 2018r.

RECENZJA

rozprawy doktorskiej Pana magistra Sebastiana Żurka pt „Algebry Liego macierzy nieskończonych"

Praca doktorska przedstawiona do recenzji składa się ze spisu treści, spisu oznaczeń, wstępu, sześciu rozdziałów oraz bibliografii. Do rozprawy jest dołączony dodatek zawierający dowód nieprzeliczalności modułu nieskończonych macierzy o skończonej liczbie współczynników niezerowych w każdej kolumnie $M_{cf}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ (a więc i algebry Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$; patrz str. 21) nad dowolnym ciałem $\mathbb{K}$ (twierdzenie 6.2).

Pojęcie pierścienia (algebry) łącznego czy niełącznego z różniczkowaniem jest znanym pojęciem, odgrywa ważną rolę w analizie, geometrii algebraicznej, równaniach różniczkowych oraz algebrze. Inspiratorem stosowania pojęcia różniczkowania w algebrze był R. Dedekind jeszcze w XIX stuleciu, ale dopiero E. Steinitz w 1910 r. formalnie zdefiniował różniczkowanie w ciele funkcji wymiernych. A. Weil zastosował to pojęcie w ważnym dla współczesnej geometrii algebraicznej badaniu budowy transcendentnych rozszerzeń ciał w 1946 r. Ważny jest też wpływ O. Orego, który odkrył w latach 30-tych ubiegłego wieku konstrukcję nieprzemiennych pierścieni wielomianów $R[X, \delta]$ zbudowanych za pomocą różniczkowania δ w podstawowym pierścieniu łącznym R. W latach 40-tych XX wieku było już wiadomo, że teoria Galois równań algebraicznych może być stosowana i w teorii zwykłych równań różniczkowych (co spowodowało powstanie teorii Picarda-Vessiota). Jedną z najbardziej znanych (i do tej pory otwartych) hipotez w geometrii algebraicznej jest hipoteza jakobianowa, która jest równoważnie sformułowana w terminach różniczkowań. Zainspirowała ona aktywne badania nilpotentnych i lokalnie nilpotentnych różniczkowań w różnych strukturach algebraicznych. Na samym początku największy wpływ na uaktywnienie badań własności pierścieni łącznych i niełącznych miało twierdzenie Skolema-Noether mówiące o tym, że każde rózniczkowanie prostej centralnej algebry nad ciałem jest różniczkowaniem wewnętrznym. W 1937 r. N. Jacobson opublikował jedną pracę o algebrach mających tylko różniczkowania wewnętrzne i właśnie w tej pracy udowodnił, że zbiór wszystkich różniczkowań algebry tworzy algebrę Liego, a zbiór wszystkich wewnętrznych rózniczkowań jest jej ideałem. Faktycznie publikacja tej pracy spowodowała intensywne badanie pierścieni Liego różniczkowań pierścieni niełącznych. W ubiegłej dekadzie ukazało się wiele publikacji o własnościach różniczkowań (klasycznych, Liego czy Jordana) łącznych pierścieni skończonych (odp. nieskończonych) macierzy.

Niniejsza praca doktorska została poświęcona badaniu własności różniczkowań (nieskończenie wymiarowych) algebr Liego macierzy nieskończonych i ich krat ideałow. Na dzień dzisiejszy nie ma ogólnej teorii algebr Liego nieskończonego wymiaru, mało jest również prac opublikowanych o algebrach

Liego macierzy nieskończonych. W pewnym sensie praca mgra S. Żurka zapoczątkowała wypełnienie tej luki.

Rozważmy zawartość pracy doktorskiej. Niech dalej $\mathbb{K}$ będzie dowolnym ciałem, a $\mathbf{R}$ będzi dowolnym pierścieniem przemiennym z jedynką 1.

Po krótkim wstępie autor definiuje w pierwszym rozdziale podstawowe pojęcia rozpatrywane w pracy, omawia historię podjętej tematyki, cele i pokrótce różne zastosowania macierzy nieskończonych oraz ilustruje je przykładami. Rozdziały 1 oraz 2 zawierają również niezbędne pojęcia i fakty o skończenie i nieskończenie wymiarowych (w szczególności macierzowych) algebrach Liego wprowadzajęce w temat.

W rozdzialie 3 zostały zdefiniowane algebra nieskończonych macierzy o skończonej liczbie współczynników niezerowych w każdej kolumnie $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ oraz algebra macierzy o współczynnikach indeksowanych zbiorem liczb całkowitych, o skończonej liczbie niezerowych współczynników w kazdej kolumnie $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{Z}, \mathbf{R})$. Udowodniono, że są one izomorficzne (stwierdzenie 3).

W rozdzialach 4, 5 oraz 6 autor otrzymał następujące **główne** wyniki:

- udowodniono prostotę algebry Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ (twierdzenia 4.1 oraz 6.1),
- ustalono, że każde różniczkowanie φ algebry Liego nieskończonych macierzy ściśle górnotrójkątnych $\mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ jest sumą rózniczkowania wewnętrznego i diagonalnego
$$\varphi = \mathrm{ad}_C + \mathrm{diag}_D,$$
gdzie $C \in \mathfrak{n}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ oraz $D \in \mathfrak{o}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ (twierdzenie 5.1),
- udowodniono, że każde różniczkowanie φ algebry Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$ jest sumą
$$\varphi = \mathrm{ad}_A + \eta_\sigma$$
różniczkowania wewnętrznego ad_A, gdzie A jest elementem klasycznej algebry Liego $\mathfrak{gl}(\mathbb{N}, \mathbf{R})$, i różniczkowania η_σ indukowanego przez homomorfizm σ (twierdzenie 5.2),
- przedstawiono opis krat ideałów algebry Liego nieskończonych macierzy $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ oraz ich własności (twierdzenie 6.1 oraz wnioski 18,19).

Wszystkie wyniki pracy doktorskiej są **nowe, aktualne, merytorycznie poprawne** i **wartościowe**. Nie znalazłem żadnych istotnych uchybień w dowodach.

Mam kilka uwag krytycznych edytorskich.

1) W definicji 1.12 zamiast „istnieje liczba n" trzeba napisać „istnieje liczba całkowita dodatnia n".
2) Praca jest w większości bardzo dobrze zredagowana; zastrzeżenia mam tylko do sposobów napisania (lub nie) przecinków i kropek.

Podane powyżej uwagi krytyczne nie zmniejszają wartości wyników pracy doktorskiej.

Bibliografia rozprawy liczy 39 pozycji.

Praca doktorska zawiera wyniki opublikowane w artykulach naukowych (jedna w solidnym piśmie algebraicznym (w *Communications in Algebra*) oraz jedna w recenzji).

Przedstawiona do recenzji rozprawa doktorska jest bardzo dobrą i oryginalną pracą matematyczną, zawiera szereg ważnych i głębokich wyników o macierzach nieskończonych. Autor wykazał się gruntowną wiedzą z teorii liniowych algebr Liego.

Uważam, że przedstawiona do recenzji rozprawa spełnia wszystkie warunki ustawowe stawiane pracom doktorskim. Wnoszę o przyjęcie tej pracy i dopuszczenie Pana magistra Sebastiana Żurka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Recenzent
Prof. dr hab. Orest Artemovych
Instytut Matematyki
Politechnika Krakowska
ul. Warszawska 24
31-155 Kraków

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
im. Tadeusza Kościuszki
Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki
INSTYTUT MATEMATYKI
31-155 Kraków, ul. Warszawska 24
tel. (12) 634-22-03, (12) 628-29-88
fax (12) 632-65-68