UNIWERSYTET
WARSZAWSKI

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki

dr hab. Jerzy Matczuk, prof.UW

Warszawa, 20 Lipca 2018

Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Sebastiana Żurka
pt. ALGEBRY LIEGO MACIERZY NIESKONCZONYCH
dla Rady Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego

Celem recenzowanej rozprawy jest badanie podalgebr algebr Liego nieskończonych macierzy nad ustalonym pierścieniem przemiennym R mających w każdej kolumnie tylko skończenie wiele niezerowych współczynników (dalej określanych jako algebra kolumnowo-skończonych macierzy i oznaczana przez $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}; R)$) Jest to tematyka dobrze umocowana we współczesnych badaniach dotyczących algebr Liego. W przypadku gdy R jest ciałem, korzystając z klasycznego twierdzenia Poincare-Birkhoffa-Witta, każda przeliczalnie wymiarowa R-algebra Liego jest podalgebrą Liego łącznej algebry mającej przeliczalny wymiar (uniwersalnej algebry obwiedniej) i jako taka ma reprezentację w $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}; R)$.

Recenzowana rozprawa dotyczy podstawowych i klasycznych problemów. Autor koncentruje się na opisie kraty ideałów oraz różniczkowań pewnych wyróżnionych, ważnych podalgebr algebry $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}; R)$. Ma ona silne związki zarówno z reprezentacjami przeliczalnie wymiarowych algebr Liego jak i algebr łącznych.

Rozprawa pisana jest bardzo starannie i czytelnie, składa się z sześciu rozdziałów, a bibliografia zawiera 39 pozycji. Trzy pierwsze rozdziały przedstawiają pojęcia wykorzystywane w dalszej części pracy, podstawowe przykłady oraz informacje o klasycznych wynikach, głównie związanych z klasyfikacją skończenie wymiarowych algebr prostych. Rozdziały te są napisane bardzo dobrze,

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 534
e-mail: jmatczuk@mimuw.edu.pl

w sposób zwarty. Uważam jednak, że część klasycznych informacji, szczególnie dotyczących klasyfikacji skończenie wymiarowych algebr Liego nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero można było pominąć, bez starty dla jakości rozprawy. W zamian za to więcej miejsca można by poświęcić algebrom nieskończenie wymiarowym.

Głównym rezultatem Rozdziału 4 jest Twierdzenie 4.1 pokazujące, że specjalna liniowa nieskończona algebra Liego $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}; K)$ (składająca się z macierzy mających tylko skończoną liczbę niezerowych wierszy i ślad równy zero) jest algebrą prostą dla dowolnego ciała bazowego K. Dowód tego twierdzenia jest krótki, elementarny i elegancki. Wynik ten jest krokiem w kierunku pełnego opisu prostych finitarnych algebr Liego, to znaczy prostych podalgebr algebry $\mathfrak{gl}_{fr}(\mathbb{N}; K) \subset \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}; K)$ składającej się z macierzy mających tylko skończoną liczbę niezerowych wierszy. W serii prac A.A. Baranow uzyskał pełną charakteryzację takich algebr w przypadku gdy K jest ciałem liczb zespolonych, a następnie dla dowolnych ciał zerowej charakterystyki. Wspólnie z H. Strade, podali taką charakteryzację w przypadku gdy K jest ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki $p \geq 5$. Pełna charakteryzacja, niezależna od własności ciała bazowego jest jeszcze problemem otwartym. W trakcie tych badań, pokazywali w każdym z wyżej wymienionych przypadków, że algebra $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}; K)$ jest algebrą prostą.

W Rozdziale 5, autor zajmuje się ważnym i trudnym problemem opisu różniczkowań nieskończenie wymiarowych algebr Liego. W szczególności taki opis został uzyskany w Twierdzeniu 5.1 dla algebry $\mathfrak{n}(\mathbb{N}; R) \subset \mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}; R)$ macierzy ściśle górnotrójkątnych, to znaczy macierzy mających zera na i poniżej głównej przekątnej. Okazuje się, że każde różniczkowanie $\mathfrak{n}(\mathbb{N}; R)$ jest sumą różniczkowania wewnętrznego i diagonalnego. Twierdzenie 5.2 podaje jednoznaczny rozkład dowolnego różniczkowania algebry $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}; R)$ na sumę różniczkowania wewnętrznego i centralnego. Dowódy obu twierdzeń zostały poprzedzone szeregiem lematów.

W Rozdziale 6 uzyskano (Twierdzenie 6.2) pełny opis kraty ideałów algebry $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}; K)$ nad dowolnym ciałem K. Okazuje się, że krata ta składa się z sześciu ideałów. Twierdzenie to ma liczne konsekwencje. W szczególności, umożliwiło ono, dla dowolnego ciała K, skonstruowania nowego przykładu prostej K-algebry Liego mającej nieprzeliczalny wymiar. Wynika również z niego, że

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 534
e-mail: jmatczuk@mimuw.edu.pl

algebra $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}; K)$ jest doskonała, tzn. równa swojemu komutatorowi.

Przedstawione wyniki oceniam wysoko, pochodzą one z trzech prac, z których dwie zostały już opublikowane. Stanowią istotny wkład w badania nieskończenie wymiarowych algebr Liego. Rozprawa jest napisana w sposób dojrzały i pokazuje, że jej autor posiada obszerna wiedzę z zakresu algebr Liego. Większość prezentowanych w rozprawie dowodów jest elementarna, co nie oznacza, że są one proste. Wymagały one od autora zarówno głębokiego zrozumienia szerokiej tematyki jak i dużej pomysłowości, sprawności i cierpliwości rachunkowej. W pracy zabrakło ogólniejszego spojrzenia na prezentowane rezultaty.

Podsumowując stwierdzam, że recenzowana rozprawa spełnia zarówno ustawowe jak i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie Pana mgr Sebastiana Żurka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Jerzy Matczuk

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 534
e-mail: jmatczuk@mimuw.edu.pl