Mgr Marta Nowakowska
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii
Uniwersytet Śląski w Katowicach

Katowice, 6 maja 2016 roku

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Rozszerzenia i ideały pierścieni łącznych

W całej rozprawie będą rozważane pierścienie łączne, ale niekoniecznie przemienne i z jedynką. Celem rozprawy jest badanie struktury pierścieni łącznych przy pomocy własności ich ideałów jednostronnych.

Zbadamy, jak własność tranzytywności pewnych odmian relacji bycia ideałem jednostronnym wpływa na strukturę pierścienia. Niech x, y, z będą elementami ze zbioru $\{$lewostronny, prawostronny, dwustronny$\}$. Interesująca dla nas będzie sytuacja, kiedy x-ideał y-ideału pierścienia jest z-ideałem tego pierścienia. Klasę pierścieni, w której spełniona jest taka zależność nazywamy klasą Veldsmana i oznaczamy jako $\mathcal{K}(x, y; z)$. W ten sposób wprowadzone klasy są naturalnym uogólnieniem klasy pierścieni filialnych i zostały wprowadzone przez S. Veldsmana w [8].

W kontekście powyższego zagadnienia ważnym staje się problem, jak dla danego pierścienia wyglądają jego rozszerzenia, w którym jest on ideałem jednostronnym. Wielu autorów w różnych kontekstach zajmowało i zajmuje się tą tematyką. Rozważania te w naturalny sposób ograniczają się do istotnych rozszerzeń pierścieni (tzn. A jest istotnym rozszerzeniem pierścienia R, jeśli R ma niezerowe przecięcie z każdym niezerowym ideałem pierścienia A). Dlatego na nich skupimy naszą uwagę.

W rozdziale pierwszym, który jest rozdziałem wprowadzającym, przedstawiamy oznaczenia, pojęcia i fakty z nimi związane stosowane w całej rozprawie. Wprowadzamy pojęcie (x, y)-podpierścienia w pierścieniu, które okaże się pomocne przy dowodzeniu rezultatów z rozdziału czwartego. Ponadto prezentujemy pewne nowe własności prostych dziedzin.

W rozdziale drugim przedstawimy warunki konieczne i dostateczne na to, aby dla danego pierścienia istniało jego uniwersalne istotne lewostronnie ideałowe rozszerzenie. Rezultat ten jest odpowiednikiem tw. Flanigana dotyczącego dwustronnych ideałowych rozszerzeń. K.I. Beidar w [2] wprowadził pojęcie uniwersalnego istotnego ideałowego rozszerzenia pierścienia. Mówiąc pobieżnie jest to takie istotne rozszerzenie pierścienia, w które da się zanurzyć każde istotne ideałowe rozszerzenie tego pierścienia. Zadał on pytanie o istnienie takich rozszerzeń dla danego pierścienia. Okazało się, że odpowiedź na to pytanie już istniała, udzielił jej J.F. Flanigan w [4] używając do tego celu zaawansowanych technik zaczerpniętych z teorii kategorii. W [1] R.R. Andruszkiewicz przedstawił dowód J.F. Flanigana w języku teorii pierścieni. W tej części podamy także nowy, elementarny dowód warunku dostatecznego tw. Flanigana. Wykorzystując metody użyte w tym dowodzie uzyskamy odpowiedź na pytanie postawione przez M. Petricha w [6] dotyczące czystych rozszerzeń pierścieni.

W rozdziale trzecim sklasyfikujemy wszystkie klasy pierścieni wprowadzone w [3] będące uogólnieniem tzw. $*$-prostych pierścieni (tzn. pierścieni, które nie zawierają nietrywialnych ideałów, które są ideałami we wszystkich ich ideałowych rozszerzeniach). Ich wprowadzenie wiązało się z teorią radykałów. W [3] zostało zdefiniowane pojęcie $(x, y; z)$-ideału pierścienia R, jako x-ideału, który jest z-ideałem we wszystkich rozszerzeniach pierścienia R, w których jest on y-ideałem. Pierścienie nie zawierające nietrywialnych $(x, y; z)$-ideałów nazywamy $(x, y; z)$-prostymi pierścieniami. Niektóre z tych dwudziestu siedmiu klas zostały scharakteryzowane w [3]. My przedstawimy charakteryzacje pozostałych pokazując, że dwanaście z nich jest równych klasie wszystkich pierścieni oraz że wystarczy znaleźć opis czterech z nich, by z ich opisu uzyskać charakteryzacje pozostałych piętnastu klas. Ponadto uzyskamy jednorodny sposób wyznaczania ich opisów.

Rozdział czwarty jest poświęcony zagadnieniom związanym z klasami Veldsmana $\mathcal{K}(x, y; z)$. W literaturze szczególnie intensywnie były badane dwie spośród nich, mianowicie klasy pierścieni filialnych i lewostronnie filialnych. My będziemy się starać zbadać strukturę wszystkich dwudziestu siedmiu klas. Pokażemy, że wystarczy ograniczyć badania do trzech z nich, by korzystając z pewnej symetrii występującej wśród tych klas oraz wyników dla lewostronnie filialnych pierścieni, uzyskać twierdzenia strukturalne dla pozostałych. Zbadamy związki występujące między nimi oraz uzyskamy ich nowe charakteryzacje korzystając z pojęcia (x, y)-podpierścienia. Opiszemy radykał pierwszy pierścieni z trzech wybranych klas pokazując, że jest on prawostronnie duo T-nilpotentnym pierścieniem. Podamy m.in. twierdzenia strukturalne algebr nad ciałami, pierścieni pierwszych i dziedzin z tych klas. Użyjemy własności kilku radykałów do badania ich struktury. Pokażemy, że klasa zredukowanych pierścieni lewostronnie filialnych jest największą klasą lewostronnie dziedziczną zawartą w dwóch z trzech klas przez nas rozważanych. Wyniki zamieszczone w tym rozdziale zostały opublikowane w [5].

Literatura

[1] R.R. Andruszkiewicz, On maximal essential extensions of rings, Bull. Aust. Math. Soc. 83 (2011), 329-337.

[2] K.I. Beidar, On essential extensions, maximal essential extensions and iterated maximal essential extensions in radical theory, in: Theory of Radicals (Szekszard, 1991), Colloq. Math. Soc. János. Bolyai, 61 (North-Holland, Amsterdam, 1993), 17–26.

[3] M. Filipowicz, M. Kępczyk, Note on some ideals of associative rings, Acta Math. Hungar. 142 (2014), 72–79.

[4] F.J. Flanigan, On the radical and radical embedding of algebras, I. Extreme embeddings, J. Algebra 50 (1978), 153–174.

[5] M. Nowakowska, E.R. Puczyłowski, Veldsman's classes of associative rings, Acta Math. Hungar. 146 (2015), 466–495.

[6] M. Petrich, Ideal extensions of rings, Acta Math. Hungar. 45 (1985), 263–283.

[7] E.R. Puczyłowski, On unequivocal rings, Acta Math. Hungar., 36 (1980), 57–62. vol. 1, Oxford 1967.

[8] S. Veldsman, Extensions and ideals of rings, Publ. Math. Debrecen 38 (1991), 297–309.