



WYDZIAŁ INFORMATYKI

Politechniki Białostockiej



15-351 Białystok, ul. Wiejska 45A
tel. +48 85 746 90 50, fax +48 85 746 90 57

e-mail: wi.sekretariat@pb.edu.pl
www.wi.pb.edu.pl

prof. dr hab. Piotr Grzeszczuk
Politechnika Białostocka
Wydział Informatyki

Białystok, 16.08.2016r.

Recenzja

rozprawy doktorskiej magister Marty Nowakowskiej

p.t. *Rozszerzenia i ideały pierścieni łącznych*

dla Rady Instytutu Matematyki
Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach

Rozprawa doktorska magister Nowakowskiej dotyczy nieprzemiennych pierścieni łącznych i mieści się w ramach szeroko rozumianej teorii rozszerzeń pierścieni. Wśród wielu aspektów tej problematyki wyróżniają się badania nad opisem tzw. ideałowych rozszerzeń danego pierścienia, czyli rozszerzeń w których jest on ideałem dwustronnym lub jednostronnym. Problematyka opisu ideałowych rozszerzeń oraz pierwsze rezultaty pojawiły się już w pracach C. J. Everetta z 1942 roku oraz S. Mac Lane'a z 1958 roku. Na szczególną uwagę zasługują późniejsze badania K.I. Beidara oraz J.F. Flanigana nad istnieniem uniwersalnego ideałowego istotnego rozszerzenia, a więc istotnego ideałowego rozszerzenia w które daje się zanurzyć każde istotne ideałowe rozszerzenie danego pierścienia. Prowadzone też były badania nad strukturą pierścieni z własnością tranzytywności relacji bycia ideałem (dwustronnym lub jednostronnym). Dokładniej (za G. Ehrlich [1984]), pierścień R nazywa się *filialnym* jeśli dla dowolnych podpierścieni $A \subset B$ w R , jeśli A jest ideałem w B i B jest ideałem w R , to A jest ideałem w R . Problem opisu takich pierścieni pojawił się w monografii F. Szásza, *Radikale der Ringe* z 1975 roku (ang. tłum. *Radicals of Rings* z 1981 r.). Był związany z pewnymi fundamentalnymi pytaniami, intensywnie rozwijającej się w latach 60-80-tych XX stulecia, teorii radykałów pierścieni łącznych. Z drugiej strony, pierścienie filialne są naturalnym uogólnieniem tzw. H -pierścieni w których wszystkie podpierścienie są ideałami (były badane w latach 1952-1969 przez takich autorów jak L. Rédei, V. I. Andrianow, R.L. Kruse). Pierścienie filialne odegrały istotną rolę w teorii radykałów przy badaniu stabilizacji łańcuchów Kurosza. Główne wyniki omawianej rozprawy dotyczą problemu istnienia uniwersalnego istotnego lewostronnie rozszerzenia ideałowego oraz opisu pewnych uogólnień pierścieni filialnych.

Rozprawa o typowym układzie składa się ze wstępu, czterech głównych rozdziałów oraz bibliografii, w której wymieniono 60 pozycji. Wstęp zawiera motywacje, krótki rys historyczny oraz syntetyczne sformułowania głównych wyników rozprawy.

W rozdziale pierwszym przedstawione są definicje i niezbędna wiedza z zakresu podstaw teorii pierścieni nieprzemiennych. Szczególnie dokładnie zaprezentowano podstawowe pojęcia teorii radykałów, oraz własności nieprzemiennych prostych dziedzin. Wprowadzone jest tu również, kluczowe dla całej pracy, pojęcie (x, y) -podpierścienia.

W rozdziale drugim badane są istotne lewostronnie ideałowe rozszerzenia pierścieni. Wykazano, iż dla danego pierścienia R warunkiem koniecznym i wystarczającym na istnienie uniwersalnego istotnego lewostronnie ideałowego rozszerzenia jest zerowanie lewostronnego anihilatora R . Autorka podaje wzmocnienie (do wersji jednostronnej) oraz nowy bardzo pomysłowy dowód twierdzenia Flanigana o nieistnieniu uniwersalnego istotnego rozszerzenia ideałowego pierścieni z niezerowym anihilatorem. Dla danego pierścienia z niezerowym lewostronnym anihilatorem i dla dowolnej liczby kardynalej α , konstruowane jest istotne lewostronnie ideałowe rozszerzenie mocy nie mniejszej niż α .

W obszernym rozdziale trzecim autorka opisała klasy pierścieni składające się z różnych odmian (ze względu na stronę) $*$ -prostych pierścieni wprowadzonych przez M. Filipowicz oraz M. Kępczyka (w pracy z roku 2014). Wykazała, że dwanaście spośród dwudziestu siedmiu (teoretycznie możliwych) klas pokrywa się z klasą wszystkich pierścieni oraz, że cztery klasy wystarczą do opisu pozostałych piętnastu klas. Ponadto w Twierdzeniu 3.2.13 pokazano jawny opis pierścieni z tych czterech klas. Rozdział ten zawiera szereg ciekawych (interesujących samych w sobie) wyników cząstkowych, np. Twierdzenie 3.2.4 charakteryzujące idempotentne lewostronne ideały pierścieni prostych.

Rozdział czwarty rozprawy dotyczy pierścieni tworzących tzw. klasy Veldsmiana $\mathcal{K}(x, y, z)$, które stanowią uogólnienie pierścieni filialnych. Przypomnijmy, że pierścień R należy do klasy $\mathcal{K}(x, y, z)$ jeśli dla dowolnych podpierścieni $I \subseteq J \subseteq R$ z faktu, że I jest x -ideałem w J i J jest y -ideałem w R wynika, że I jest z -ideałem, gdzie x, y, z oznaczają: lewostronny, prawostronny lub dwustronny. Autorka wykazała, że badania dwudziestu siedmiu możliwych klas Veldsmiana można tak naprawdę zredukować do czterech: $\mathcal{K}(t, t, l)$, $\mathcal{K}(l, t, l)$, $\mathcal{K}(t, l, l)$ i $\mathcal{K}(l, l, l)$. Zasadniczą część tej części rozprawy zajmują nowe charakteryzacje i własności pierwszych trzech klas. Ostatnia, czyli klasa pierścieni lewostronnie filialnych, została dość precyzyjnie opisana przez M. Filipowicz oraz E. R. Puczyłowskiego. Wśród wielu interesujących twierdzeń strukturalnych wyróżnia się opis radykału pierwszego pierścieni z klasy $\mathcal{K}(t, t, l)$, który okazuje się być prawostronnie duo pierścieniem (Twierdzenie 4.3.1) oraz jest prawostronnie T -nilpotentny (Twierdzenie 4.3.9). Interesująca jest też obserwacja, że pierścienie beztorsyjne oraz algebry nad ciałami z klasy $\mathcal{K}(t, t, l)$ mają nilpotentny radykał pierwszy (stopnia nilpotentności 3). W ostatnim rozdziale badane też były pierścienie zredukowane (pierścienie bez niezerowych elementów nilpotentnych). Podsumownie subtelnych rozważań stanowi Twierdzenie 4.4.16 stwierdzające, że klasa zredukowanych pierścieni lewostronnie filialnych stanowi największą klasę lewostronnie dziedziczną zawartą w rozważanych klasach Veldsmiana.

Ocena.

Przechodząc do podsumowania pragnę stwierdzić, że w mojej ocenie poziom naukowy omawianej rozprawy jest wysoki. Rozważane w pracy zagadnienia mają mocne zamocowanie w teorii rozszerzeń pierścieni oraz w klasycznej teorii radykałów pierścieni łącznych. W latach 50-80-tych ubiegłego stulecia zaangażowanych w nią było wielu znakomitych matematyków. Bardzo pozytywnie oceniam wartość merytoryczną uzyskanych wyników. Doktorantka rozwiązuje kilka trudnych zadań badawczych. Przedstawione przez nią wyniki i rozumowania odznaczają się dojrzałością podejścia do problemu i dobrym wyczuciem w doborze pojęć i środków dowodowych. Świadczą o jej sporej już wiedzy i dojrzałości matematycznej. Rozprawa zawiera wiele nowych rezultatów, które wzbogacają istniejącą wiedzę z zakresu szeroko pojętej teorii pierścieni nieprzemiennych. Znaczna część zaprezentowanych rezultatów przeszła już pierwszą weryfikację. Wyniki dotyczące klas Veldsmiana

opublikowane zostały w obszernej pracy (współautorskiej z E. R. Puczyłowskim) w wysoko notowanym czasopiśmie węgierskim *Acta Mathematica Hungarica*. Wydaje się, iż przedstawione wyniki stanowią podstawę do przygotowania kolejnej publikacji dotyczącej uniwersalnych ideałowych lewostronnie istotnych rozszerzeń pierścieni.

Dowody prezentowanych rezultatów mają zróżnicowany stopień trudności. W większości są jednak dość skomplikowane technicznie. Ich czytelne, a jednocześnie dostatecznie formalne przedstawienie wymagało więc znacznego wysiłku. Praca, w zakresie przedstawienia dowodów, jest dobrze i przejrzysto zredagowana. Prezentację wyników wzbogacają liczne przykłady ilustrujące istotność czynionych założeń. Świadczą o dobrym rozumieniu rozważanych zagadnień. Rozprawa zawiera liczne komentarze wartościujące uzyskane wyniki i odniesienia do badań innych autorów.

Praca jest bardzo starannie zredagowana, o czym świadczy znikoma liczba błędów literowych.

Podsumowanie.

Artykuł 13.1 Ustawy z dnia 14.03.2003 r. **O stopniach naukowych i tytule naukowym (...)** stwierdza, że rozprawa doktorska *powinna stanowić oryginalne rozwiązanie problemu naukowego lub oryginalne dokonanie artystyczne oraz wykazywać ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w danej dyscyplinie naukowej lub artystycznej oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej lub artystycznej*". Nie mam wątpliwości, że przedłożona rozprawa spełnia te warunki. Przedstawione rezultaty są wartościowe i ciekawe dla specjalistów. Autorka rozprawy wykazuje też, że potrafi się swobodnie posługiwać dość szerokim spektrum metod oraz głęboką wiedzą z teorii pierścieni nieprzemiennych. Uważam, że rozprawa doktorska spełnia wszystkie ustawowe warunki i uzasadnia nadanie magister Marcie Nowakowskiej stopnia naukowego doktora nauk matematycznych. Wnoszę o jej przyjęcie oraz dopuszczenie kandydatki do dalszych etapów przewodu doktorskiego.



Piotr Grzeszczuk