Recenzja

rozprawy doktorskiej mgr Joanny Kubieniec
pt. *„Ergodyczne własności losowych układów dynamicznych ze skokami o intensywności zależnej od stanu”*

Rozprawa doktorska mgr Joanny Kubieniec napisana została pod kierunkiem prof. dr hab. Katarzyny Horbacz, pełniącej rolę promotora, oraz dr. Dawida Czapli - promotora pomocniczego. Praca składa się z trzech części: preliminariów, opisu i analizy modelu przedstawiającego stany pewnego kawałkami deterministycznego procesu, będącego głównym przedmiotem rozważań pracy, oraz zastosowań związanych z równaniami stochastycznymi z zaburzeniem poissonowskim.

W pracy badana jest asymptotyka operatorów Markowa-Fellera w przestrzeni polskiej, będących operatorami przejścia dla jednorodnego łańcucha Markowa, opisującego stany pewnego kawałkami deterministycznego procesu, pojawiające się w następstwie skoków realizowanych przez ciągłe transformacje, które wybierane są z prawdopodobieństwami zależnymi od położenia. W pierwszej części rozprawy autorka podaje definicje pojęć oraz najważniejsze twierdzenia wykorzystywane w pracy. Należą do nich głównie kryteria T. Szarka z [Diss. Math. 415, 1–62 (2003)], gwarantujące istnienie przyciągającej miary niezmienniczej nierozszerzających w normie Fortet-Mouriera operatorów Markowa z pewną własnością koncentracji. Oprócz asymptotycznej stabilności operatora, autorkę interesuje również wykazanie tempa zbieżności jego iteracji. W tym celu wykorzystuje pewną technikę sprzęgania kopii łańcucha według M. Heirera [Probab. Theory Relat. Fields 124, 345–380 (2002)], przyjmując jako narzędzie twierdzenie R. Kapicy i M. Ślęczki o geometrycznym tempie zbieżności pewnej klasy operatorów Markowa. Na koniec autorka przytacza twierdzenie A. Shirikyana z pracy [Proceedings of the Swansesa 2002 Workshop, 263–271 (2003)], które gwarantuje, że geometrycznie ergodyczny operator Markowa, mający dodatkowe własności kontrolujące jego asymptotykę, spełnia pewien rodzaj mocnego prawa wielkich liczb. W oryginale twierdzenie to dotyczy łańcuchów markowskich w przestrzeni Hilberta. Autorka podkreśla ten fakt stwierdzając, że analiza dowodu wskazuje, że twierdzenie to jest również prawdziwe, gdy przestrzenią stanów jest przestrzeń polska. Myślę, że rozprawa była dobrym miejscem do zaprezentowania dowodu dla tego ogólniejszego, a istotnego dla pracy przypadku. Druga część dysertacji, obok tytułowego „opisu modelu”, zawiera w istocie najważniejsze rezultaty recenzowanej rozprawy, dotyczące asymptotycznej stabilności i geometrycznego tempa zbieżności jednorodnego w czasie łańcucha Markowa, opisującego ów model. Analizowany łańcuch można zapisać w postaci

$$(*) \qquad \{(Y_n, \xi_n)\} = \{(Y(\tau_n), \xi(\tau_n)\},$$

gdzie $\{Y(t)\}$ jest pewnym procesem zadanym przez semipotok $S_i : [0, \infty) \times X \times I \to X \times I$, X jest przestrzenią polską, $i \in I = \{1, \ldots, N\}$, $\{\xi(t)\}$ jest pewnym procesem schodkowym, a ciąg (τ_n) opisuje chwile kolejnych skoków. Konstrukcja modelu jest subtelna i na tyle skomplikowana, że nie będziemy podawać więcej szczegółów. Z punktu widzenia badań, istotny jest zresztą bardziej operator przejścia dla tego łańcucha, którego postać podana jest w pracy na str. 19 wzorem (2.4), dający się poddać dalszej analizie. Formuły na ten operator autorka jednak nie dowodzi (stwierdza, że można ją łatwo wykazać); wydaje mi się, że warto było podać jakieś uzasadnienie. W ostatniej części pracy autorka rozważa zagadnienie początkowe będące stochastycznym równaniem różniczkowym z zaburzeniem poissonowskim. Przez rozwiązanie tego zagadnienia rozumie się pewien proces cadlag $\{Y(t)\}$, którego konstrukcja jest w rozprawie podana. Zadaje on łańcuch postaci $(*)$. Przy odpowiednio wyspecyfikowanych założeniach na występujące w nim zmienne mgr J. Kubieniec podaje twierdzenie o jego geometrycznej zbieżności do rozkładu stacjonarnego, będące wnioskiem z Twierdzenia 2.6 z drugiej części pracy.

Tematyka rozprawy wpisuje się w nurt zagadnień teorii procesów o tej własności, że przyszłe stany procesów są warunkowo niezależne od stanów przeszłych. Odkrycie tej własności przeszło sto lat temu zawdzięczamy Andriejowi Markowowi. W latach pięćdziesiątych William Feller wprowadził operatory na miarach, opisujące ewolucję rozkładów dla losowych układów dynamicznych. Od tego czasu teoria operatorów Markowa stale i systematycznie się rozwija, a udział w jej rozwoju miało i ma wielu znakomitych uczonych. Można stwierdzić, iż badania mgr J. Kubieniec dotyczą aktualnej problematyki wymienionej wyżej gałęzi matematyki, która zajmuje matematyków z różnych ośrodków akademickich w kraju i za granicą.

Głównym osiągnięciem mgr J. Kubieniec jest wypracowanie wspomnianego we wstępie modelu i jego gruntowna analiza w oparciu o różnego rodzaju narzędzia. Sam model nawiązuje do modelów biologicznych, związanych z ekspresją genu czy modelu cyklu komórkowego. (Modele tego rodzaju badane były intensywnie już w latach osiemdziesiątych, zob. np. [A. Lasota, M.C. Mackey, J. Math. Biol. 19, 43–62 (1984)], [J.J. Tyson, K.B. Hannsgen, J. Math. Biol. 23 (1986), 231–246]). Czy i jak dobrze opisuje on jakiś rzeczywisty układ, trudno odpowiedzieć (sama autorka nie podaje jego interpretacji), ma on jednak matematyczny sens i wydaje się, że jako taki może w sobie nieść bogactwo potencjalnych zastosowań. Autorka rozprawy potrafi swobodnie posługiwać się szerokim spektrum technik, dobierając je właściwie do swojego modelu, wykazując się przy tym dobrą orientacją w literaturze przedmiotu. W szczególności stosuje z powodzeniem wspomniane wyżej kryteria T. Szarka asymptotycznej stabilności. Tę część doktoratu opiera Ona na samodzielnej pracy [Ann. Math. Sil. 30, 63–87 (2016)]; w kolejnej części rozprawy bazuje na publikacji [Dyn. Syst. 34, 130–156 (2019)], którą napisała wespół z promotorem pomocniczym, skutecznie aplikując metodę sprzęgania łańcuchów.

Uzyskane rezultaty charakteryzują się niemałą złożonością techniczną. Wyniki rozprawy nie są może specjalnie zaskakujące (co pośrednio wynika z faktu, że autorka stosuje stosunkowo znane i sprawdzone narzędzia), wymagały one jednak opanowania przez mgr J. Kubieniec różnych technik i metod dowodowych, którymi zręcznie się posługuje. Praca jest ogólnie dobrze zredagowana, poprawna też jest jej struktura. Nieliczne są błędy drukarskie (choć dwa występują w tytułach rozdziałów).

Poniżej zamieszczam uwagi szczegółowe.

1. Pewne stwierdzenia rozprawy (o części z nich wspomniałem wyżej) warto było rozszerzyć o stosowne uzasadnienia.

2. Wadliwie określona jest definicja rodziny Φ_0 na str. 8.

3. W tezie twierdzenia 1.27 bazującego na pracy A. Shirikyana pojawia się błędnie zmienna ξ_k.

4. Na str. 18 zapis „przestrzeń topologiczna (Θ, Δ) z miarą σ-skończoną" może sugerować, że Δ jest topologią. (Na str. 32 autorka unika tej dwuznaczności).

5. Na str. 24 i 32 zamiast (2.5) powinno być (2.4).

6. W dowodzie twierdzenia 2.5 na str. 30 autorka stwierdza, że otwarty jest zbiór $G := \bigcup_{l=1}^{m_0} U(z_l) \times I$, gdzie $U(z_l)$ jest podzbiorem (określonej postaci) zbioru zwartego. Nie jest to dla mnie dostatecznie jasne.

7. W kroku 1 dowodu twierdzenia 2.6 niefortunnie sformułowane jest ostatnie zdanie (można odnieść wrażenie jakby ten pierwszy krok kończył dowód).

8. Sformułowanie wniosku 2.7 jest zbyt oszczędne. Założenia można co prawda zrekonstruować, ale przynajmniej trzeba było napisać czym są zmienne Y_k i ξ_k.

Powyższe uwagi nie wpływają na ogólną - pozytywną - ocenę pracy. Moim zdaniem recenzowana rozprawa spełnia wymagania art. 13.1 aktualnej ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę zatem o dopuszczenie mgr Joanny Kubieniec do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Kraków, 14 listopada 2019 roku

dr hab. Rafał Kapica

RKapica